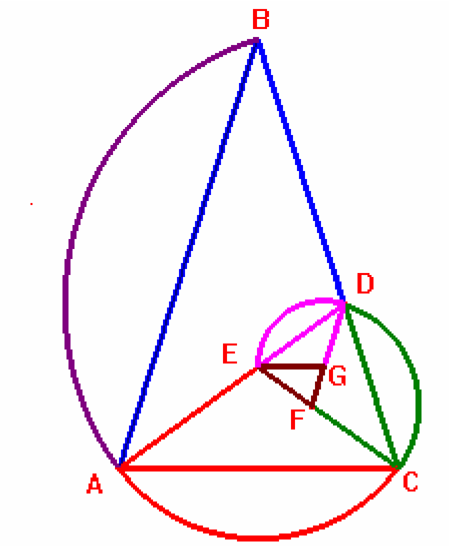
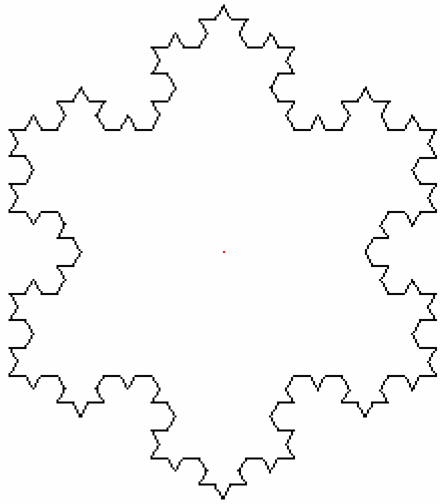
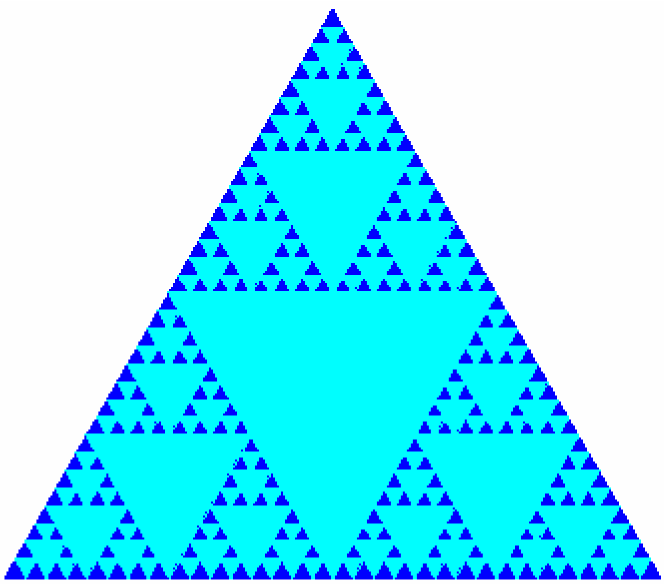
Triángulos



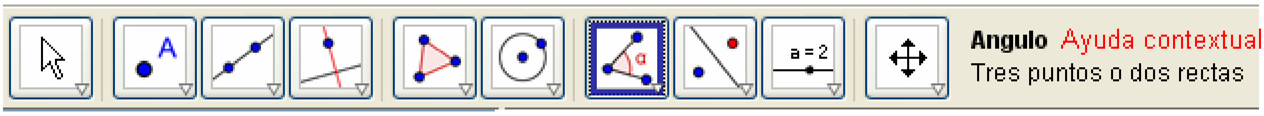




Ángel Corral Cedena

Índice

Antes de comenzar la actividad vamos mostrar el aspecto de la barra de ▶**Herramientas**◀, pero no hacemos una descripción exhaustiva (que luego nadie lee y que, por otra parte puede consultarse, si se desea en …….), describiremos sus funcionalidades a medida que las vayamos necesitando. Por otra parte al seleccionar cada icono se nos muestra una pequeña ayuda de cómo usarla y además disponemos de la ayuda de Geogebra:

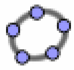


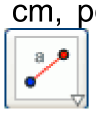
① Construcción de triángulos

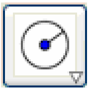
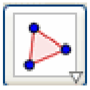
❶❶ Conocidos los tres lados

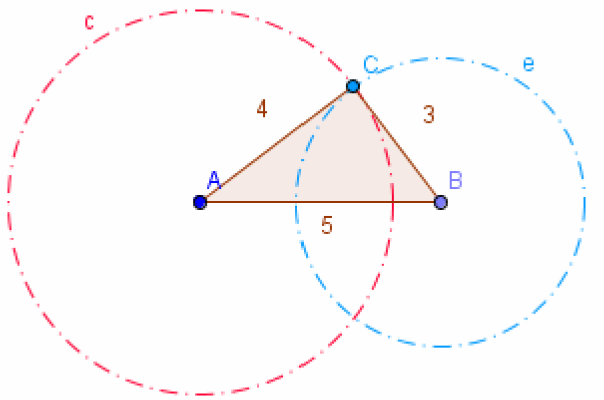
Deducir la relación entre los lados de un triángulo para que pueda construirse.

❶ *Construye un triángulo cuyos lados midan : a = 4 cm, b = 3 cm, c = 5 cm y mide sus ángulos.*

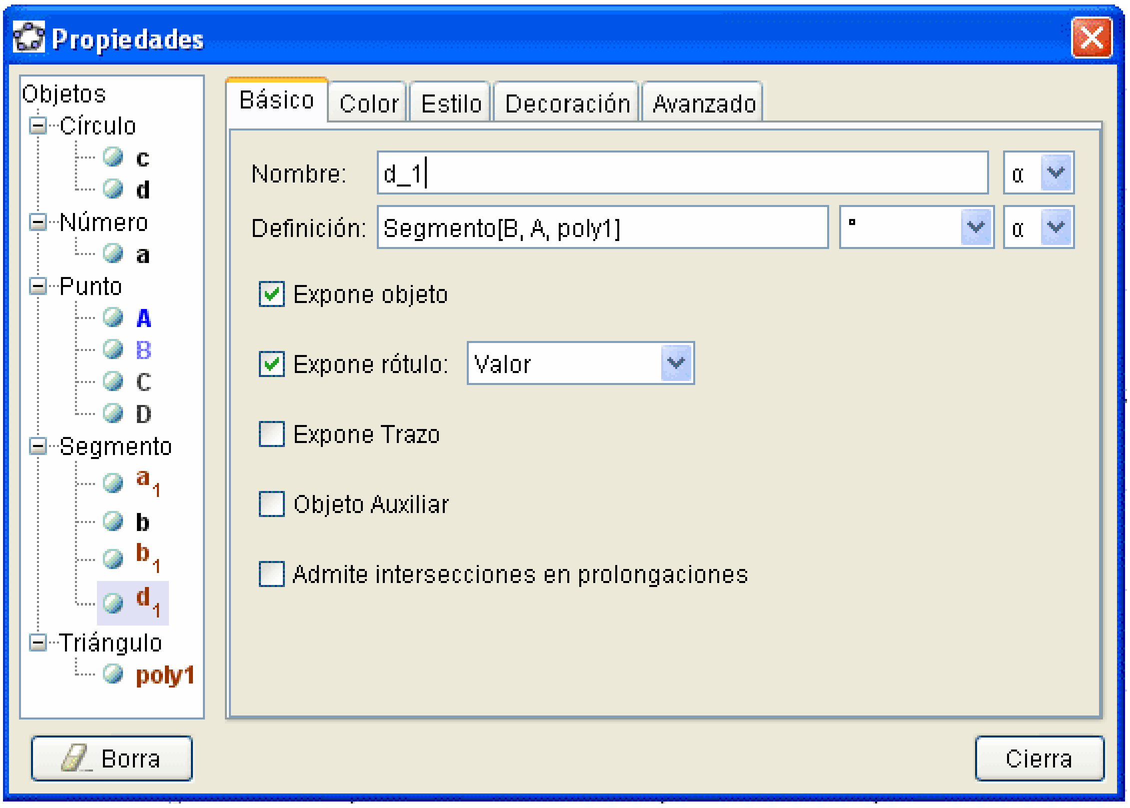
Abre el programa Geogebra pulsando sobre el icono  .

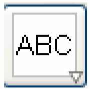
Dibujamos primero uno de los lados (el de mayor longitud, **a** = 5 cm, por ejemplo) utilizando la herramienta ▶ **Segmento con longitud dada desde el punto**◀ 

Por uno de los extremos del segmento anterior se dibuja una circunferencia de radio igual a la longitud de otro lado (c = 4 cm, por ejemplo), mediante la herramienta ▶**Circunferencia por centro y radio**]  ◀, y por el otro extremo, una circunferencia de radio igual a la longitud del otro lado, con la misma herramienta. La intersección de las dos circunferencias nos proporciona el tercer vértice del triángulo buscado que dibujamos, con la herramienta ▶Polígono◀ 



❁ Podemos cambiar los nombres, colores y estilos por defecto de los vértices y los lados, haciendo clic con el botón derecho y eligiendo la opción [Propiedades] del menú contextual que nos aparece :



❁ Mediante la herramienta ▶InsertaTexto◀ 

escribe tu nombre a un lado del dibujo y 🖫 guarda el archivo en tu carpeta del servidor con el nombre *Trian1*.

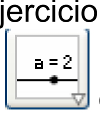
◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

¿Cualquier trío de longitudes pueden formar triángulo?¿ Qué relación debe de existir entre ellas?

❷ *Intenta construir triángulos con las siguientes longitudes de sus lados:*

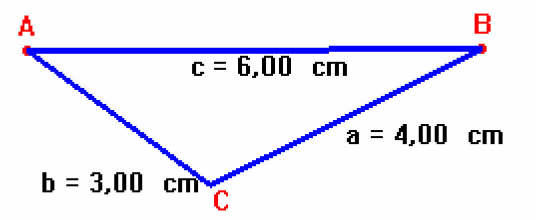
Triángulos	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
Lado1	6	6	8	8	6	5	6	5
Lado2	4	4	4	5	4	4	5	4
Lado3	3	2	3	3	5	4	5	3

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Para realizar esta actividad no necesitas dibujar los ocho triángulos, vamos a partir de un triángulo construido como el ejercicio anterior pero representando las longitudes de los lados con tres deslizadores variables 

cuyas propiedades pueden fijarse en su menú contextual:

Si arrastramos los deslizadores podemos modificar las longitudes de los lados de nuestro triángulo. Comenzamos modificando el lado mayor cambiando su longitud de 5 cm a 6 cm, después el intermedio y el menor los dejamos en sus valores, Geogebra va modificando el triángulo hasta quedar :



Ves completando la tabla :

Triángulos	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
L. Mayor	6	6	8	8	6	5	6	5
L. Interm	4	4	4	5	4	4	5	4
L. menor	3	2	3	3	5	4	5	3
L. Mayor								
L.I+L.m								
L.Inter								
L.M – L.m								
¿forman?								

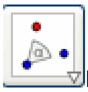
Escribe las relaciones que, a la vista de la tabla, has deducido :

❶❷ Se conocen dos lados y el ángulo que forman

❸ *Dibuja un triángulo de lados* a = 4 cm *y* b = 3 cm, *y que el ángulo comprendido entre ambos sea* $\hat{C} = 70^\circ$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

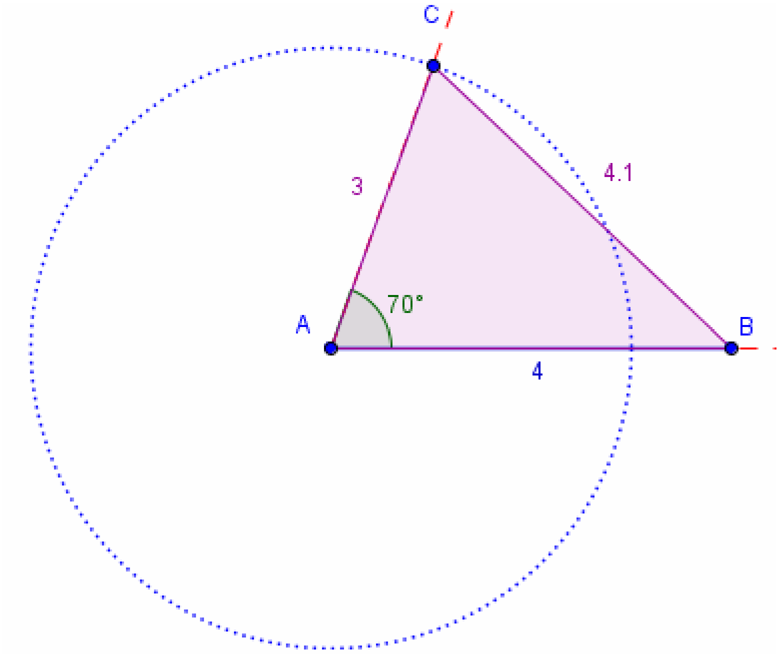
❉ A partir de punto cualquiera **A**, traza una semirrecta horizontal.

❉ Con la herramienta ▶ **rota objeto alrededor de un punto por un ángulo** ◀ rota la semirrecta 70º en sentido antihorario.

❉ A partir del punto **A** puedes trazar los lados de longitudes 4 cm y 3 cm en las dos semirrectas dibujadas, mediante ▶ **circunferencia dados su centro y radio** ▶ ya conocida de la práctica anterior.

❉ Ahora ya tienes los vértices del triángulo, en las intersecciones de las dos circunferencias y las dos semirrectas, que dibujas.

❉ Dibuja el triángulo ABC, oculta los elementos auxiliares, escribe tu nombre y 🖫 guarda el archivo en tu carpeta del servidor con nombre *Trian2*.



❉ Investiga las restricciones de esta construcción editando, modificando los valores numéricos y seleccionando y arrastrando el vértice A, y las escribes a continuación :

❶❸ Se conoce un lado y los dos ángulos contiguos

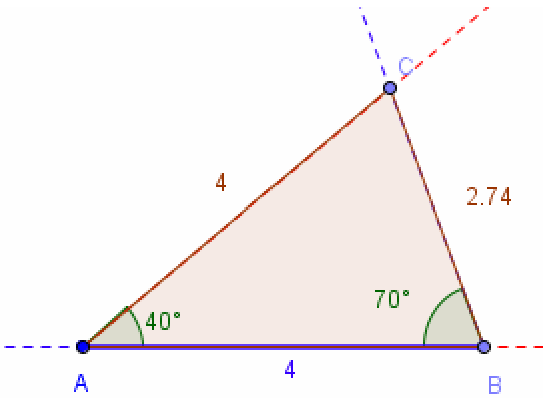
❹ *Dibuja un triángulo de lados* a = 4 cm *y los ángulos contiguos* $\hat{C} = 70º$ y $\hat{B} = 40º$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❖ Con la herramienta ▶**segmento con longitud dada desde el punto**▶ (prática ❶) introduce la longitud del lado a = 4 cm.

❖ A partir de los extremos del segmento anterior, rota el segmento los ángulos de 70º y 40º , uno en sentido antihorario y el otro en sentido horario. El punto de corte (tal vez necesites superponer una recta con los segmentos girados para que se corten) nos proporciona el tercer vértice del triángulo.

❖ Dibujas el triángulo, escribes tu nombre y guardas el archivo con el nombre Trian3 :



❖ Variando la longitud del lado podemos comprobar que los ángulos permanecen constantes (¿como se llaman esos triángulos?: _______________) y si editas los ángulos y los modificas puedes deducir, observando cuando desparece el triángulo qué relación debe existir entre los ángulos : ___________________________________.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

② Clasificación de triángulos

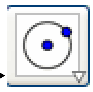
❷❶ Por la longitud de sus lados

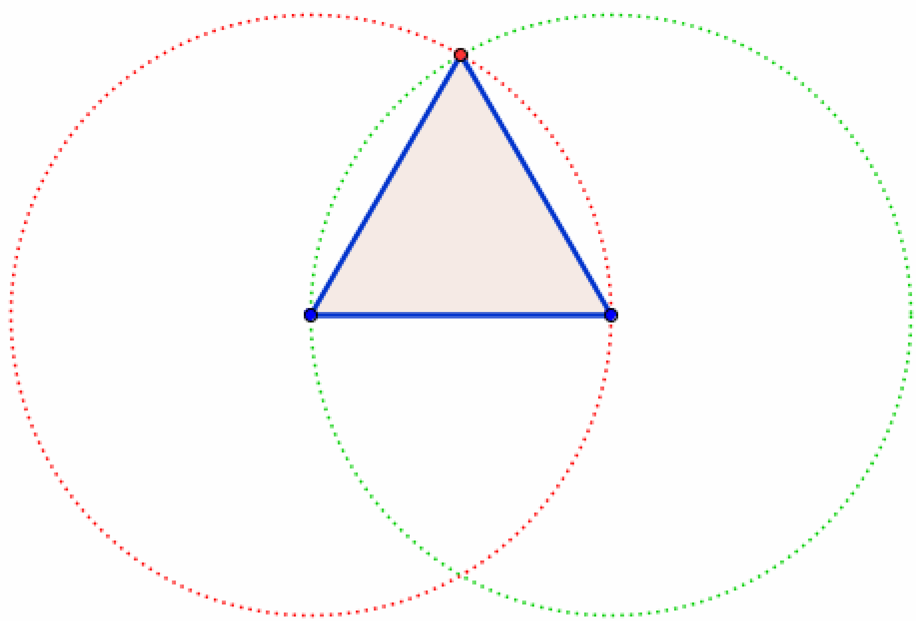
❺ *Dibuja un triángulo equilátero cuyos lados midan* 3 cm.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

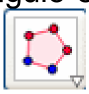
◉ Para que te sirva para otros triángulo equiláteros, añade un deslizador (a) (de intervalo de 1 a 10) que fijamos en el valor 3 que va a ser la longitud del lado de nuestro triángulo equilátero.

◉ Dibujamos uno de los lados con la herramienta ▶**segmento con longitud dada desde el punto inicial**▶, pulsamos en el punto inicial y nos aparecerá una ventana en que hemos de introducir su longitud, introducimos a, que es como hemos llamado, por defecto, al deslizador que va a variar la longitud del lado.

⦿ Una vez que tenemos un lado (variable con el deslizador) dibujado, segmento AB, dibujamos, con la herramienta ▶**circunferencia con centro y punto que cruza** ▶  dos circunferencias, una con centro en A y extremo en B y otra con centro en B y extremo en A. La intersección de esas dos circunferencias no proporciona el tercer vértice del triángulo, que etiquetamos como **C**.



⦿ Si modificas la longitud del lado puedes obtener triángulos equiláteros semejantes.

⦿ Pero ¿hay alguna forma de dibujar un triángulo equilátero de forma más rápida?, por supuesto, con la herramienta ▶Polígono regular▶  que está en el mismo grupo de la herramienta polígono . Con la herramienta activada, pulsamos sobre los dos puntos que van a a formar un lado y se nos abre una ventana que nos pide el número de vértices (3 en nuestro caso), y se nos dibuja el triángulo (que podemos personalizar: color, trazo, sombreado, medidas, etc). Si pulsamos sobre cualquiera de los dos puntos iniciales se modifican las longitudes de los lados

⦿ Selecciona la herramienta ▶**Polígono regular**◀ y dibuja un polígono regular de tres lados (triángulo equilátero) cuyos lados midan lo mismo que el anterior, etiqueta los vértices, mide los lados, 🖫 guárdalo con nombre *Equilatero1* y explica el procedimiento usado :

---

❻ *Dibuja un triángulo isósceles cuyos lados midan* 3 cm, 4 cm y 4 cm.

Una vez dibujado etiqueta los vértices, mide los lados y archívalo con nombre Isosceles en tu carpeta del servidor.

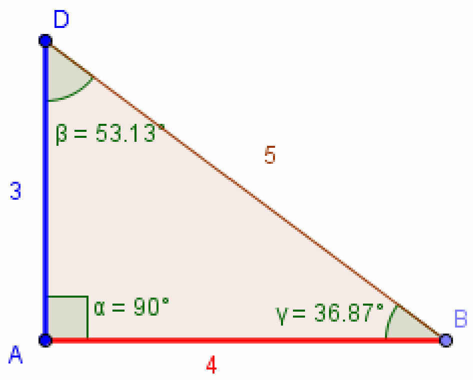
❼ *Dibuja un triángulo escaleno cuyos lados midan* 7 cm, 5 cm y 4 cm.

Una vez dibujado etiqueta los vértices, mide los lados y archívalo con nombre Escaleno en tu carpeta del servidor.

❷❷ Por la amplitud de sus ángulos

Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

❽ *Dibuja un triángulo cuyos lados midan* 5 cm, 4 cm y 3 cm y *comprueba que es rectángulo*

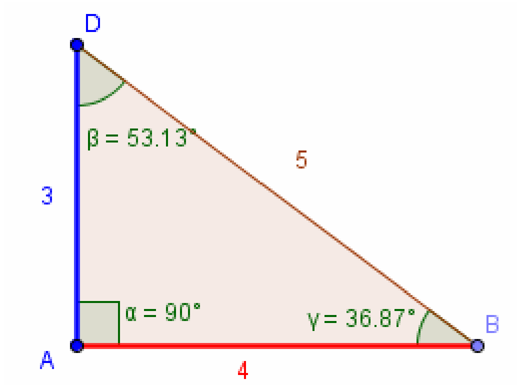


Sigue el procedimiento del ejercicio ❶, y mide sus ángulos para comprobar que uno de ellos es recto, ¿cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto? ________________, ¿y los otros dos? ________________, ¿cuánto suman los ángulos que no son rectos? ___________, ¿cómo se llaman esos ángulos? _____________. Lo archivas con nombre Rectangulo1.

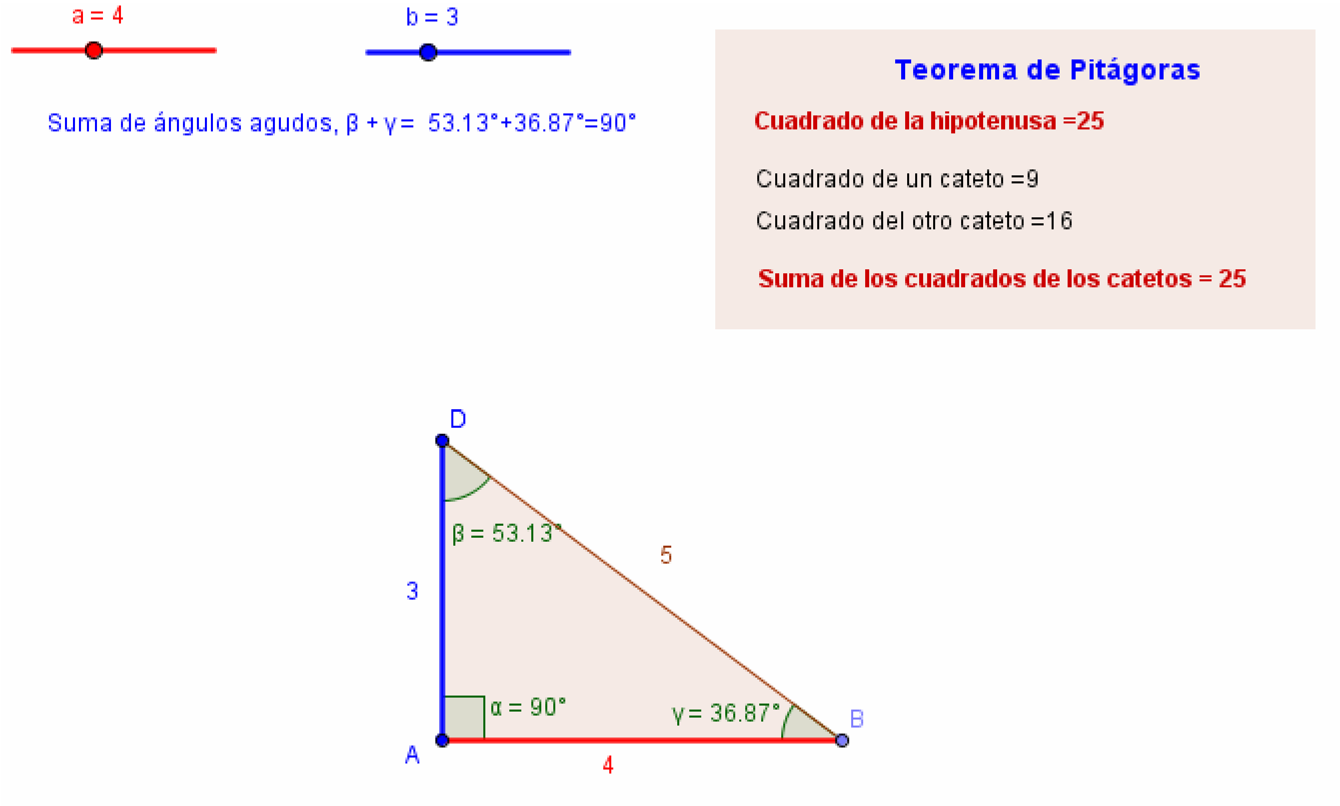
❾ *Comprueba que un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios y comprueba el teorema de Pitágoras.*

① Dibuja un segmento **AB** mediante deslizador.
② Traza una ▶**Recta perpendicular**◀ al segmento por el extremo **A** y llámala **r**.

③ Dibuja un punto **C** sobre la recta r.
④ Traza los segmentos que forman los lados.
⑤ Dibuja el triángulo **ABC** y oculta la recta **r**.
⑥ Marca (al marcar el de 90º, te saldrá la marca de ángulo recto) y mide los ángulos. Deberás obtener algo similar a :



⑦ El ángulo **A** no se modifica, el triángulo sigue siendo rectángulo.
⑧ La suma de los dos ángulos agudos tampoco varía. B + C = 90º, son complementarios.
⑨ La hipotenusa al cuadrado y la suma de los cuadrados de los catetos sí varían pero permanecen iguales entre sí, teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$). Lo compruebas introduciendo los valores como en la imagen siguiente.



🖫 Guarda el archivo como Pitagoras1 y ciérralo.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

🝖 ❶⓿ *Otra comprobación del teorema de Pitágoras.*

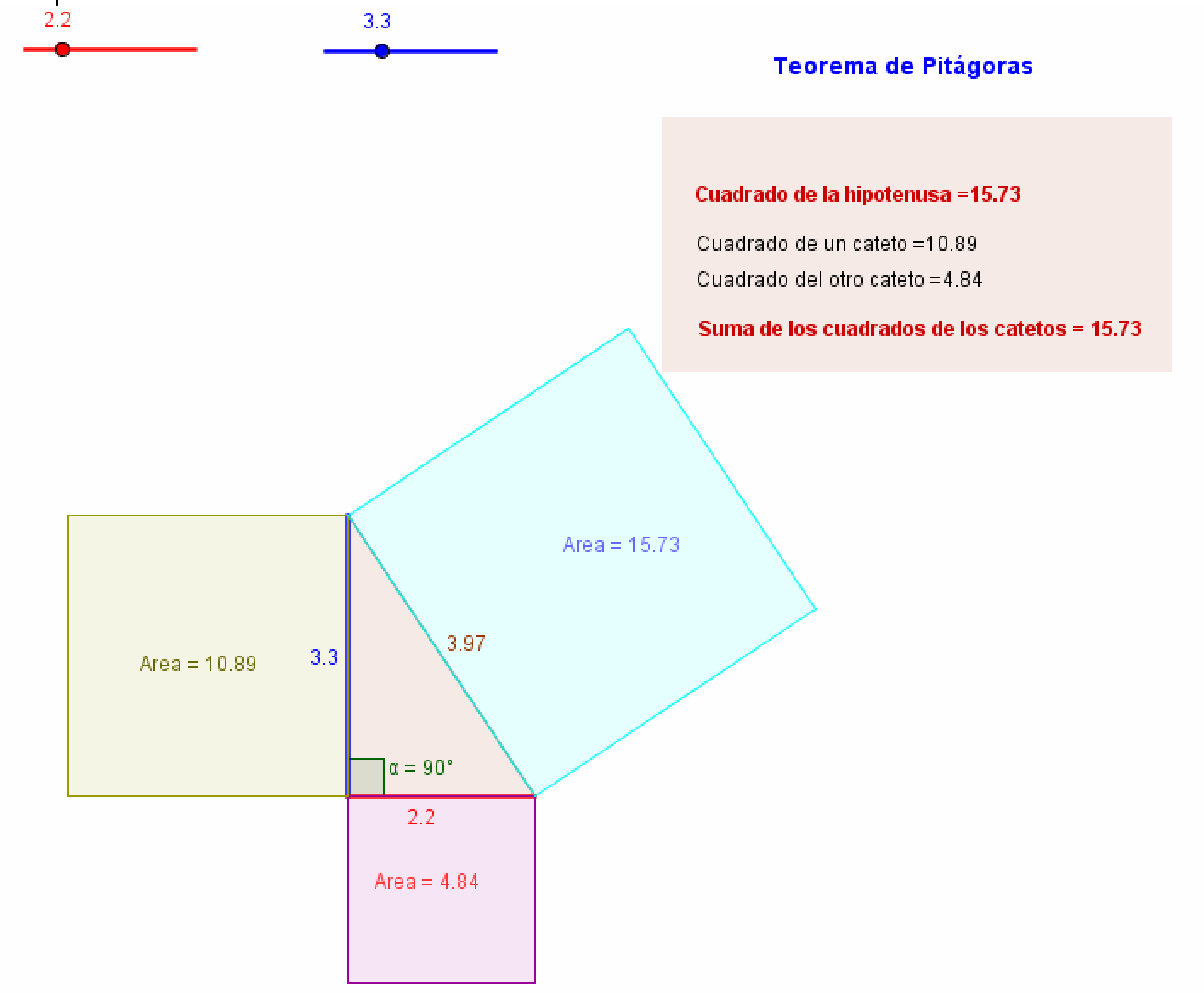
◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❂ Abre un archivo nuevo y sigue los pasos del ① al ⑥ del ejercicio anterior para dibujar y etiquetar un triángulo rectángulo.

❂ Dibujamos un cuadrado sobre cada uno de los lados mediante las herramientas ▶**Polígono regular**◀ que ya conocemos.

❂ Mostramos las áreas de los cuadrados dibujados con botón derecho y [Nombre y valor] en el menú [Propiedades] de cada cuadrado.

❂ Sumamos las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (b^2 + c^2) y constatamos que es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (a^2) lo que comprueba el teorema :



🖫 Guarda el archivo como *Pitagoras2*.

¿Puede saberse si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo a partir de la longitud de sus lados, antes de dibujarlo?, ¿qué relación ha de darse entre esas longitudes?

Para deducirla representa los triángulos que se te proponen a continuación, clasifícalos atendiendo a sus ángulos y completa la tabla que te ayudará a deducir la relación que buscamos :

❶❶ *Clasifica los siguientes triángulos según sus lados.*

Lados			Tipo	a^2	b^2	c^2	Relación
a	b	c					
6	5	5					
6	5	4					
5	4	3					
4	3	2,6					
6	5	3					
13	12	5					
7	5	3					

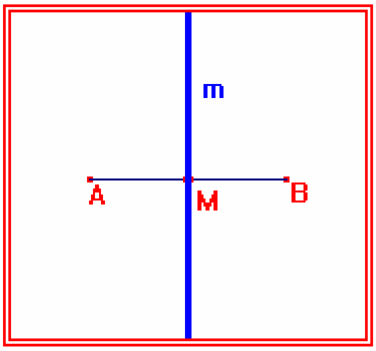
Recuerda el teorema de Pitágoras, ¿ya sabes la relación?, escríbela :

Triángulo	Relación entre los lados
Acutángulo	
Rectángulo	
Obtusángulo	

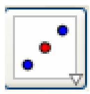
③ Puntos y rectas notables del triángulo.

❸❶ Mediatrices

Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada por su punto medio



◇ Abre un nuevo archivo de Geogebra y dibuja un segmento **AB**.

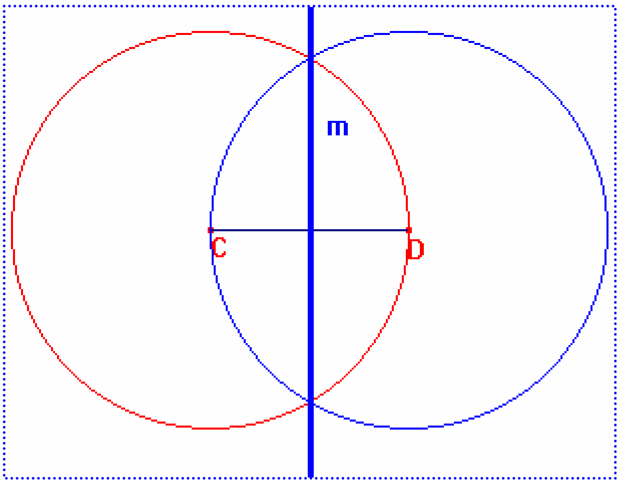
◇ Activa la herramienta ▶**Punto medio**◀  y señala el punto medio pulsando sobre los extremos del segmento, etiquétalo como **M**.

◇ Traza la recta perpendicular que pasa por ese punto medio y tienes la mediatriz (**m**) del segmento **AB.**

Otra definición de mediatriz como lugar geométrico (conjunto de puntos que cumplen una/s determinada/s propiedad/es):

Mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Basándote en esta definición puedes trazar la mediatriz de un segmento siguiendo el procedimiento :



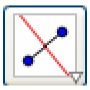
▣ En otro archivo dibuja en otra parte un segmento **CD** y etiqueta sus extremos.

▣ Traza una circunferencia con centro en **C** y que pasa por el otro extremo **D**.
▣ Traza otra circunferencia con centro en **D** y que pase por **C**.
▣ Traza la recta (m) que pasa por los puntos de intersección de ambas circunferencias y esa el la mediatriz del segmento **CD**.

Comprobémoslo :

☑ Elige un punto **P** de la mediatriz y mide la distancia hasta ambos extremos del segmento **CD** y comprueba que es la misma.
☑ Si seleccionas el punto con el puntero y los desplazas por la mediatriz comprobarás como las medidas van cambiando pero permanecen iguales entre sí, todos los puntos de la mediatriz ostentan la propiedad de equidistar de los extremos del segmento en que se ha trazado.

🖫 Guarda este archivo con el nombre *Mediatrices*.

Geogebra dispone de una herramienta que se llama ▶**Mediatriz**◀  y que nos permite trazarla directamente sin más que activarla y señalar los extremos del segmento o el lado del polígono, es la que vamos a usar para trazar las mediatrices de un triángulo :

⌖ Dibuja un triángulo acutángulo **ABC** y etiqueta su vértices.
⌖ Activa la herramienta ▶**Mediatriz**◀ y traza las tres mediatrices de sus lados (m_1, m_2, m_3).
⌖ El punto intersección de las tres mediatrices equidista de los extremos de los segmentos que forman los lados del triángulo al ser mediatrices de ellos y por tanto se puede trazar una circunferencia con centro en ese punto y que pase por los tres vértices, es decir circunscribe al triángulo, por eso se le llama **Circuncentro,** mide las distancias del circuncentro a los vértices y traza la circunferencia circunscrita.
⌖ Selecciona uno de los vértices del triángulo, desplázalo y observa como se modifican las medidas realizadas y que la circunferencia siempre pasa por los tres vértices del triángulo, ¿cuándo “sale” el circuncentro del triángulo? : ____, ¿ en

qué punto se halla el circuncentro cuando se halla sobre uno de los lados y cómo es el triángulo?: ____.
.

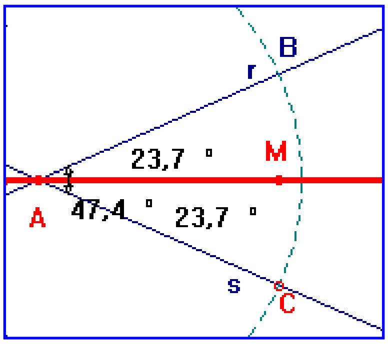
⌖ Ya puestos, te presento otra posibilidad que es activar la traza de ciertos objetos, si lo hacemos con el Circuncentro y lo movemos variando los vértices del triángulo, ¿qué trayectoria describe la traza del circuncentro ?: _______________________________.

🖫 No se te olvide guardar este archivo con nombre *Mediatrices1*.

❸❷ Bisectrices

Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales, lo bisecta.

- Traza dos rectas no coincidentes que pasen por un punto **A**, que llamamos **r** y **s**.
- Marca el ángulo y mídelo.



- Dibuja una circunferencia de centro **A** y marca los puntos de intersección con ambas rectas como **B** y **C**.
- Halla el punto medio del segmento **BC** y llámalo **M**.
- La bisectriz del ángulo formado por las rectas **r** y **s** es la recta que pasa por los puntos **A** y **M**. Compruébalo marcando y midiendo los ángulos.

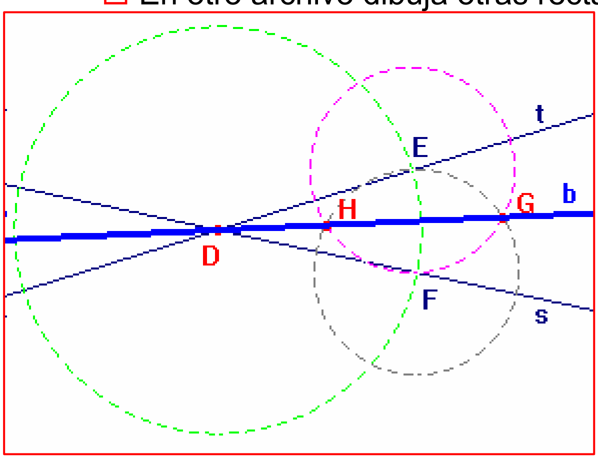
- Observa lo que ocurre si seleccionas una de las recta y modificas la amplitud del ángulo.
- Activa la traza del punto **M** y anima una de las rectas **r** o **s**, ¿qué forma la traza? ____________________ , ¿cómo es respecto de la circunferencia trazada? ___________________, ¿por qué? ____.

Otra definición de bisectriz como lugar geométrico :

Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Basándote en esta definición puedes trazar la bisectriz de un ángulo con el procedimiento :

- En otro archivo dibuja otras rectas **t** y **s** que pasen por **D** y las etiquetas.



- Traza una circunferencia con centro en **D** y señala los puntos de intersección con las rectas como **E** y **F**.
- Traza otra circunferencia con centro en **E** y que pase por **F**.
- Traza otra circunferencia con centro en **F** y que pase por **E**.
- Traza la recta (**b**) que pasa por los puntos de intersección de ambas circunferencias **G** y **H** (que también pasará por el vértice **D** del ángulo) y esa el la bisectriz del ángulo formado por **t** y **s** con vértice en **D**.

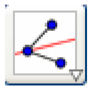
Comprobémoslo :

☑ Elige un punto **P** de la bisectriz **b** y mide la distancia desde **P** a los lados **t** y **s** y comprueba que es la misma.

☑ Si seleccionas el punto con el puntero y los desplazas por la bisectriz comprobarás como las medidas van cambiando pero permanecen iguales entre sí, y si modificas la apertura del ángulo moviendo los lados también se conservan las distancias, todos los puntos de la bisectriz ostentan la propiedad de equidistar de los lados del ángulo en que se ha trazado.

Activa la traza de los puntos **G** y **H** y anima uno de los lados, ¿qué forman la traza de esos puntos?______________________________, ¿cómo son entre sí y respecto de la circunferencia primera? _____________________ ____.

🖫 Guarda este archivo con el nombre *Bisectrices1*.

Geogebra dispone de una herramienta que se llama ▶**Bisectriz**◀  y que nos permite trazarla directamente sin más que activarla y señalar tres puntos del ángulo, el segundo de los cuales ha de ser el vértice :

⌖ Dibuja un triángulo acutángulo **ABC** y etiqueta su vértices.

⌖ Activa la herramienta ▶**Bisectriz**◀ y traza las tres bisectrices de sus ángulos ($\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$).

⌖ El punto intersección de las tres bisectrices (**I**) equidista de los lados del triángulo y, por tanto, se puede trazar una circunferencia con centro en ese punto y que sea tangente interior a los tres lados, es decir se inscribe en el triángulo, por eso se le llama **Incentro.**

⌖ Traza un perpendicular desde el incentro a cualquiera de los tres lados del triángulo y llama a la intersección **P** y traza la circunferencia con centro el incentro y que pasa por **P**, es la circunferencia inscrita.

⌖ Mide las distancias del incentro a cada lado, selecciona uno de los vértices del triángulo, desplázalo y observa como se modifican las medidas realizadas y que la circunferencia siempre es tangente a los tres lados del triángulo, ¿cuándo "sale" el circuncentro del triángulo? : _________ ____.

⌖ Modifica los vértices y observa que se conservan las distancias a los lados.

🖫 Guarda este archivo con nombre *Bisectrices2*.

❸❸ Medianas

Mediana es el segmento trazado por el vértice opuesto al punto medio del lado.

○ Dibuja un triángulo **ABC**. Los puntos medios de los lados **M**, **N** y **P**.

○ Traza sus medianas, $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ y $\mathbf{m_3}$. Etiqueta el punto de corte como **G**, que se llama ______________.

⭘ Mide en cada mediana las distancias del baricentro (**G**) al vértice y del baricentro al punto medio del lado opuesto, ¿qué relación existe, para cada mediana, entre esas dos longitudes?: ____.

⭘ Calcula esa relación y ponla al lado, anima los vértices y observa qué sucede: _______________________. ¿Sale el baricentro del triángulo, porqué? : ____ .

🖫 Guarda este archivo en tu carpeta del servidor con nombre *Medianas*.

❸❹ Alturas

Altura sobre un lado del triángulo es el segmento perpendicular al lado (o su prolongación) trazado por el vértice opuesto.

⭘ Dibuja un triángulo **ABC**.

⭘ Traza las rectas que contiene sus alturas, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ y $\mathbf{h_3}$. Etiqueta el punto de corte como **O**, que se llama ______________.

⭘ Anima los vértices y observa qué sucede, ¿sale el ortocentro del triángulo? : ___, ¿cuándo?__________________________, cuando coincide con uno de los vértices? ____ .

🖫 Guarda este archivo en tu carpeta del servidor con nombre *Alturas*.

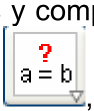
❸❺ Recta de Euler

¤ Dibuja un triángulo **ABC**.

¤ Dibuja el circuncentro y lo etiquetas **P**.

¤ Dibuja el ortocentro y lo llamas **O**.

¤ Dibuja el Baricentro y lo nominas **G**.

¤ Dibuja una recta que pase por los dos primeros y comprueba que también pasa por el tercero usando la herramienta ▶**Relación entre dos objetos** ◀ 

, pulsa sobre la recta y el tercer punto y Geogebra te dirá que también pertenece a la recta , es la recta de Euler:

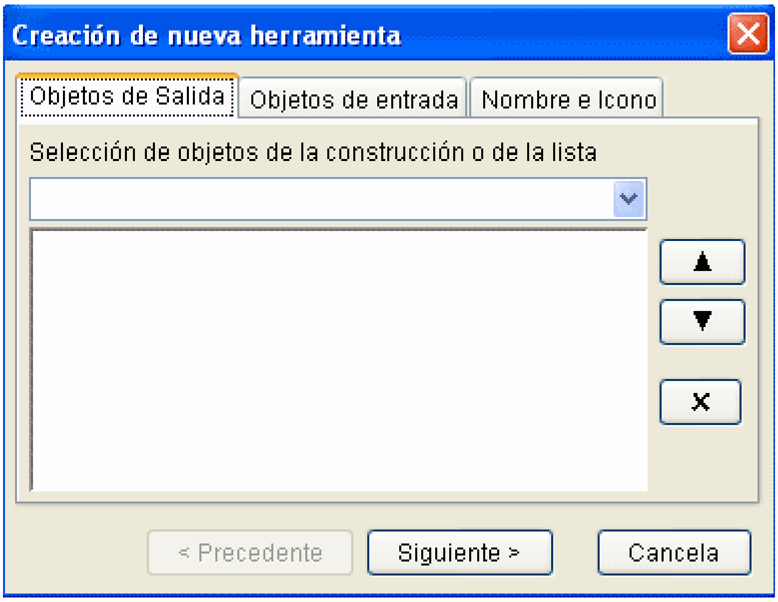
🖫 Nombre del archivo: *Euler.*

Creo que ya tienes suficientes conocimientos y destreza en el manejo de Geogebra, si has realizado las prácticas anteriores, como para que aprendas a crear nuevas herramientas.

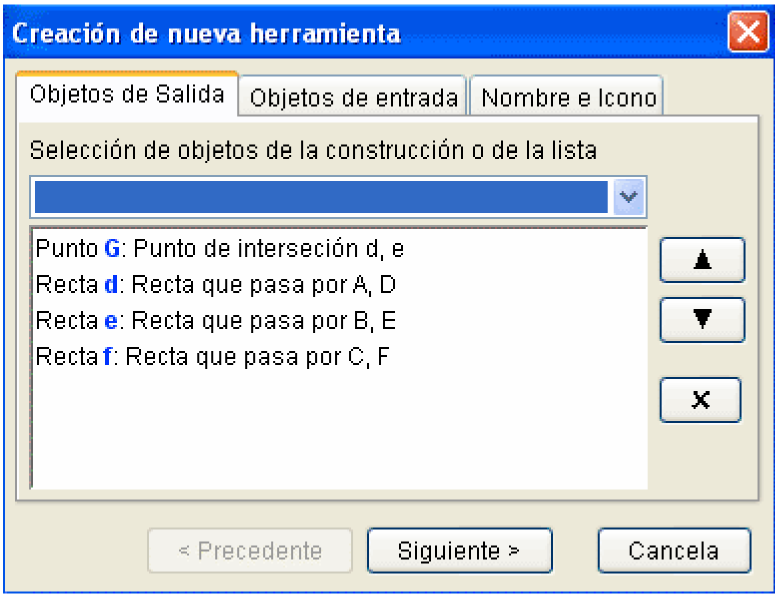
Vamos a crear una herramienta nueva que nos dibuje las medianas y el baricentro de cualquier triángulo (hay una herramienta para las mediatrices y otra para las bisectrices pero no para las alturas y medianas):

1) Dibuja un triángulo, después los puntos medios de sus tres lados y las rectas que pasan por los puntos medios y el vértice opuesto (medianas), como intersección de dos de las medianas tenemos el baricentro G. Este es el dibujo base que nos va a servir, en los pasos siguientes para definir nuestra nueva herramienta que dibuje las medianas y el baricentro de cualquier triángulo.

2) En el menú herramientas abrimos la opción [Creación de nueva herramienta] y se nos abrirá la ventana de creación de herramientas:

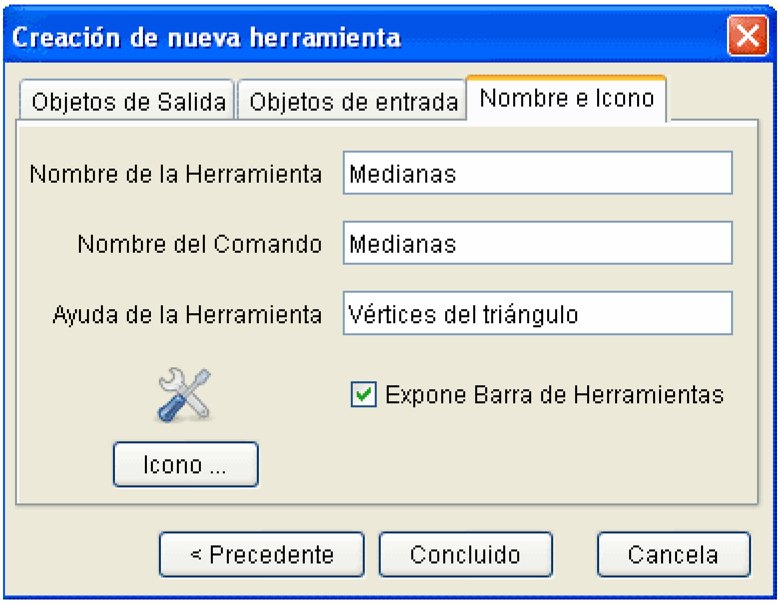


en donde seleccionamos los elementos de salida (los que queremos obtener, las medianas y el baricentro):



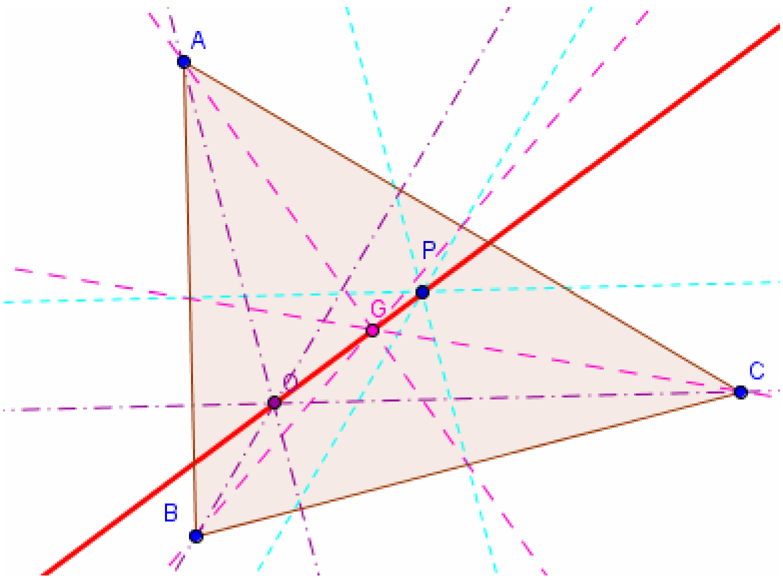
3) Pulsa sobre el botón siguiente para elegirlos elementos de entrada (los tres vértices del triángulo inicial que en este caso salen por defecto).

4) Pulsamos siguiente y vamos a la pestaña en donde se introduce el nombre de la herramienta, la ayuda que se quiera introducir y el icono (si se desea poner uno):



y ya está creada, ahora sólo tienes que seleccionarla y pulsar sobre los tres vértices del triángulo cuyas medianas y baricentro quieras dibujar.

Dibuja la recta de Euler con estas nuevas herramientas creadas:



Si mueves los vértices del triángulo, ¿qué observas? ______________________ ______________________________.

Halla la relación entre las longitudes de los segmentos **GO**/**GP**, **GO**/(**GO**+**GP**) y **GP**/(**GO**+**GP**), anima uno de los vértices y contesta que has observado :____________ ____ ____.

🖫 Nombre del archivo: *Euler*.

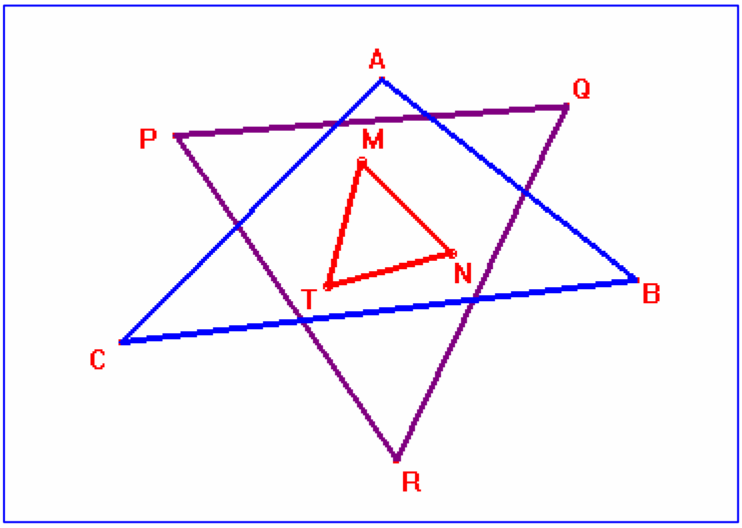
Teorema de Napoleón : *"Si sobre los lados de cualquier triángulo se construyen un triángulo equilátero y unimos los centros de estos, siempre resulta un triángulo que es equilátero"*.

- ❖ Construye un triángulo escaleno **ABC**.
- ❖ Dibuja sobre cada lado un triángulo equilátero.
- ❖ ¿Qué punto notable es el centro del triángulo equilátero y porqué?:

___

❖ Halla los centros (que nominaremos **P**, **Q** y **R**) de estos tres triángulos equiláteros construidos y dibuja un triángulo de vértices **P**, **Q** y **R**.

❖ Mide los lados del triángulo **PQR** y comprueba que es equilátero.



❖ Anima los vértices **ABC** del triángulo original y constata que **PQR** se mantiene equilátero.

☒ Realiza la misma práctica pero con los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del original hacia dentro en vez de hacia fuera, uniendo sus centros se formará otro triángulo equilátero que nominamos **M**, **N**, **T**.

☒ Estudia la relación entre las áreas de los triángulos **ABC** (original) **PQR**, (con vértices en los centros de los dibujados hacia fuera) y **MNT** (con vértices en los centros de los construidos hacia dentro) y la escribes a continuación : ______________________________.

🖫 Nombre del archivo : Napoleon

④ Perímetro y área

Con Geogebra se puede hallar directamente el perímetro de cualquier polígono ya que se pueden mostrar las longitudes de los lados (sólo hay que sumarlas) y el área con la herramienta ▶**Área**◀ del mismo grupo

❶❷ *Construye todos los triángulos cuyas longitudes de los lados sean números enteros y su perímetro mida 12 y completa la tabla.*

Lados			Ángulos			Perímetro	Área	Clasificación	
a	b	c	A	B	C			Por lados	Por ángulos

Guarda el archivo con todos los triángulos y sus datos como Ejerci12.

Ya podemos estudiar otra de las propiedades de las medianas de un triángulo:

13 *Dibuja un triángulo* **ABC**, *traza la mediana que pasa por el vértice* **A**, *llama* **M** *al punto medio del lado opuesto a* **A** *y estudia la relación entre las áreas los triángulos* **ABM**, **ACM** *y* **ABC**.

Relación entre las áreas : ____.

Propiedad de las medianas : ______________________________________.

Nombre del archivo : Ejerci13.

El ejercicio siguiente se basa en las propiedades de las bisectrices y el incentro.

14 *Demuestra y comprueba que el área de un triángulo puede calcularse mediante la fórmula* $A = r \cdot p = \frac{1}{2} r(a+b+c)$ *siendo* r *el radio de la circunferencia inscrita y* $p = \frac{a+b+c}{2}$ *el semiperímetro del triángulo*.

Escribe la demostración :

🖫 Guarda el archivo como *Ejerci14*.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

⑤ Semejanza de triángulos

❋ Dibuja un punto **O**.
❋ A su derecha un triángulo cualquiera **ABC**.
❋ Traza una recta que pase por **OA** (**r**), otra que pase por **OB** (**s**) y una tercera por **OC** (**t**) (si son muy abiertas aleja el punto **O** del triángulo, empequeñece el triángulo **ABC** o ambas acciones).
❋ En la recta **r** coloca un punto **A'** y traza por él una paralela al lado **AC** (**m**) y otra al **AB** (**n**).
❋ El punto de intersección entre las rectas **m** y **t** le etiquetas **C'** y el de corte entre **n** y **s** **B**'.
❋ Dibuja el triángulo **A'B'C'** que es semejante con el **ABC**, y se suele simbolizar **A'B'C'** ∽**ABC**.
❋ Marca y mide los ángulos **A** y **A'**, ¿cómo son eso ángulos correspondientes?: ____________, en geometría también se les llama congruentes.
❋ Marca y mide las otras dos parejas de ángulos correspondientes **B** y **B'** , **C** y **C'** y comprueba que son también congruentes.
❋ Traza los segmentos que forman los seis lados de los dos triángulos, mídelos y calcula la relación entre lados correspondientes u homólogos : **A'B'/AB** = _________, **B'C'/BC** = ____________, **A'C'/AC** = __________. ¿Cómo son estas relaciones? ______.

A ese valor le llamamos razón de semejanza (k) entre A'B'C' y ABC.

Ya deberías ser capaz de enunciar una definición de triángulos semejantes :

Dos triángulos son semejantes

🖫 Guarda el archivo como *Semetri*.

Para saber si dos triángulo son semejantes comprobaríamos que se cumplen las condiciones que has enunciado, pero esas condiciones se pueden restringir un poco, son los llamados **criterios de semejanza de triángulos** que vas a deducir a continuación.

❺❶ Primer criterio

⊙ Traza por un punto **A**, dos semirrectas **r** y **s** (no alineadas).
⊙ Señala un punto **B** en r y otro punto **C** en s, **ABC** forman un triángulo.
⊙ Mide los ángulos **A**, **B** y **C**.
⊙ Marca otro punto **B'** en **r** y con la herramienta **▶Rota en torno a punto el ángulo indicado◀** gira la semirrecta **r** alrededor de **B'** el ángulo **B** medido.
⊙ La intersección de esta nueva semirrecta con s el punto **C'**.
⊙ Dibuja los triángulos superpuestos **ABC** y **AB'C'**, que se dice en **posición de Tales** (en honor al matemático griego **Tales** de **Mileto**, el del teorema que también lleva su nombre).
⊙ Mide el ángulo **B'** que debe ser congruente con **B** ya que **AB** y **AB'** son coincidentes y **BC** y **B'C'** son paralelos.
⊙ Como los ángulos de un triángulo suman 180 y **A** es común (al estar superpuestos) y **B** = **B'**, ha de ser **C** = **C'**, con lo que tenemos la condición de semejanza, ángulos homólogos o

correspondientes iguales o congruentes. Aplicando el teorema de tales podemos demostrar que los lados son proporcionales, comprueba que : **AB**/ **AB'** = **BC**/**B'C'** = **AC**/**AC'** = **k**, razón de semejanza .

Un primer criterio de semejanza puede pues enunciarse como :

Para que dos triángulos sean semejantes basta con tengan dos de sus ángulos homólogos iguales.

🖫 Guarda el archivo como *Simetri1cri*.

❺❷ Segundo criterio

♦ Traza por un punto **A** una semirrecta (**r**).

♦ Introduce la amplitud de un ángulo y gira la semirrecta con centro en **A** esa amplitud para obtener el otro lado del triángulo.

♦ Introduce las longitudes de dos de los lados y, con transferencia de mediadas dibuja los puntos **B** en la semirrecta **r** y **C** en la girada. Tenemos el triángulo original cuyos lados miden las longitudes de los segmentos **AB**, **AC** y **CB**.

♦ Ahora vamos a dibujar otro triángulo en posición de Tales, superpuesto en el vértice **A**, cuyos lados estén en una proporción dada (la mitad para facilitar el dibujo). Hallamos los puntos medios de **AB** y **AC** y serán los vértices **B'** y **C**', de manera que **AB** = 2 **AB'** y **AC** = **2AC'**, si comprobamos que **BC** ∥ **B'C'** mediante la herramienta ▶**Paralelo**◀ del grupo {*Comprobar propiedades*}, por el teorema de Tales puedes deducir que **BC** = **2B'C'** (compruébalo)

♦ Como al ángulo A es común a ambos triángulos y ∡**B**= ∡**B'** ya que **BC** ∥ **B'C'** y el otro lado (semirrecta **r**) es común, el tercer ángulo será igual ∡**C**= ∡**C'** (compruébalo) y por tanto el triángulo **AB'C'**~ triángulo **ABC**.

Un segundo criterio de semejanza puede pues enunciarse como :

Para que dos triángulos sean semejantes es suficiente con tengan dos de sus lados homólogos proporcionales y congruente el ángulo que forman.

🖫 Guarda el archivo como *Simetri2cri*.

❺❸ Tercer criterio

Dibuja un triángulo **ABC** y mide sus lados.

Dibuja , aparte otro triángulo **A'B'C'** cuyos lados sean proporcionales, el segmento **A'B'** = k · **AB**, **A'C'** = k · **AC** y **CB** = k · **C'B'**.

Mide los ángulos y constata que ∡**A** =∡**A'**, ∡**B** = ∡**B'** y ∡**C** = ∡**C'** y por tanto los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes, es el tercer criterio de semejanza :

Para que dos triángulos sean semejantes es suficiente con tengan sus tres lados homólogos proporcionales.

🖫 .*Simetri3cri*.

Para los triángulos rectángulos estos tres criterios de semejanza se reducen aún más, ya que uno de los ángulos es recto y los lados están relacionados según el teorema de Pitágoras, intenta ahora tú formular los tres criterios de semejanza para triángulos rectángulos :

❺❹ Relación entre los perímetros y las áreas de triángulos semejantes

En cualesquiera de los triángulos semejantes dibujados con anterioridad obtén, con la calculadora, la razón, relación o cociente entre lados correspondientes u homólogos para obtener la razón de semejanza y colócala a un lado de la pantalla escribiendo delante **k =** , mide después los perímetros y obtén su relación que colocas debajo de la anterior, modifica las medidas de los lados arrastrando uno de los vértices (o animándolo) y observa lo que sucede, ¿qué deduces?: ______________________

____.

Intenta demostrarlo a partir de las propiedades de las proporciones:

Realiza lo mismo pero con la relación entre las áreas de los triángulos semejantes, ¿qué deduces ahora? ____

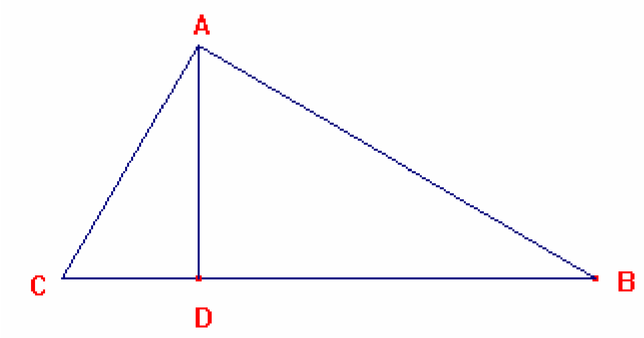
____ .

Intenta una demostración a partir de las proporciones :

❺❺ Teoremas de la altura y del cateto en un triángulo rectángulo

- Dibuja un triángulo rectángulo **ABC**, con base la hipotenusa **CB** y ángulo recto en el vértice **A**.
- Traza la altura sobre la hipotenusa cuyo punto de intersección etiquetas **D**.
- Se han formado dos triángulos **ACD** y **ABD** en los que se cumple que $\measuredangle$**CDA** = $\measuredangle$**BDA** = 90º, ya que ____, además $\measuredangle$**B** = $\measuredangle$**DAC** puesto que ____ y $\measuredangle$**C** = $\measuredangle$**DAB** porque ____, (mide los ángulos para comprobarlo). Luego son semejantes y, si son semejantes, sus lados homólogos o correspondientes son proporcionales (dibuja los segmentos correspondientes a sus lados y mídelos para comprobarlo) y por tanto :

$$\frac{\text{Cateto menor de ACD}}{\text{Cateto mayor de ACD}} = \frac{\text{Cateto menor de ABD}}{\text{Cateto mayor de ABD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$$



Es el **teorema de la altura** cuyo enunciado debes formular :

Terealtura

- Comprueba con Geogebra que el triángulo **ABC** es también semejante a **ACD** y a **ABD**, ya que : ____
____
____
____
____
______________ podemos establecer también las relaciones :

① Para el cateto **AB**

$$\frac{\text{Hipotenusade ABC}}{\text{Cateto mayor de ABC}} = \frac{\text{Hipotenusa de de ABD}}{\text{Cateto mayor de ABD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$$

② Para el cateto **AC**

$$\frac{\text{Hipotenusade ABC}}{\text{Cateto menor de ABC}} = \frac{\text{Hipotenusa de de ACD}}{\text{Cateto menor de ACD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

Es el **teorema del cateto** cuyo enunciado debes formular :

💾 Teorecateto

❺❻ Construcción de la media proporcional a dos segmentos dados

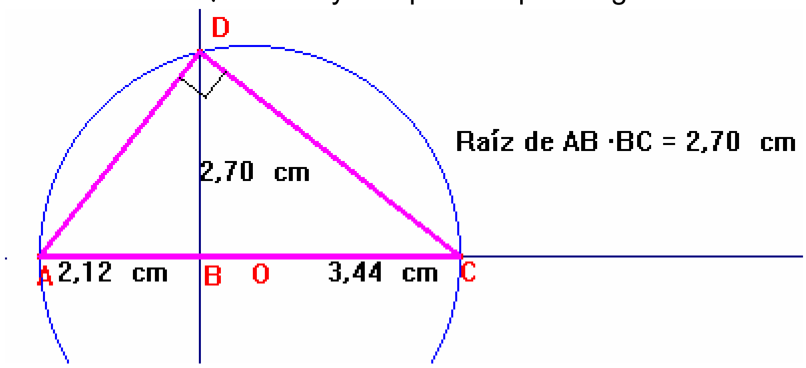
Deseamos dibujar un segmento cuya longitud **m** sea media proporcional entre otros dos de longitudes conocidas **a** y **b**, es decir :

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b} \Leftrightarrow m^2 = a \cdot b \Leftrightarrow m = \sqrt{ab}$$

o sea la media geométrica de dos medidas. Nos basamos en la semejanza entre triángulos:

① **Utilizando el teorema de la altura** (forma clásica)

❍ Dibuja dos segmentos **a y b** de distinta longitud y mídelos.
❍ Dibuja una semirrecta de origen en **A**.
❍ Transfiere la medida del primer segmento a la semirrecta y etiqueta el punto final **B**.
❍ Transfiere la longitud del segundo segmento a partir del punto **B** y etiqueta el punto obtenido como **C**. Tienes un segmento **AB** cuya longitud es **a** y otro **BC** cuya longitud es **b**.
❍ Trazamos una circunferencia cuyo diámetro sea la suma de las longitudes **a** + **b**, es decir la del segmento **AC**, para lo cual necesitamos primero el centro que será el punto medio de **AC** que etiquetamos **O** y el radio que es **OC** (o **AO**)
❍ Traza un perpendicular a **AC** por **B**, que corta a la circunferencia en un punto **D**.
❍ Dibuja el triángulo **ACD** y los segmento **AB** = **a**, **BC** = **b** y **BD** = **m**.
❍ Para comprobarlo calcula $\sqrt{AB \cdot BC}$ y comprueba que es igual a **BD**.



❍ Si modificas las longitudes de los segmentos originales, arrastrando sus extremos comprobarás que sigue cumpliendo que la media proporcional entre ellos es **BD**.

Antes de dejar esta práctica, halla la media aritmética (**a**+**b**)/2 que colocas debajo. ¿Qué segmento representa la media aritmética y por qué? ________________ _______________________, ¿pueden ser iguales, ambas medias?_____, ¿cuándo sean iguales, qué condiciones han de cumplirse? ____________________________________ ___________________. Cuando son distintas ¿ cuál de las dos es mayor? __________ _____________.

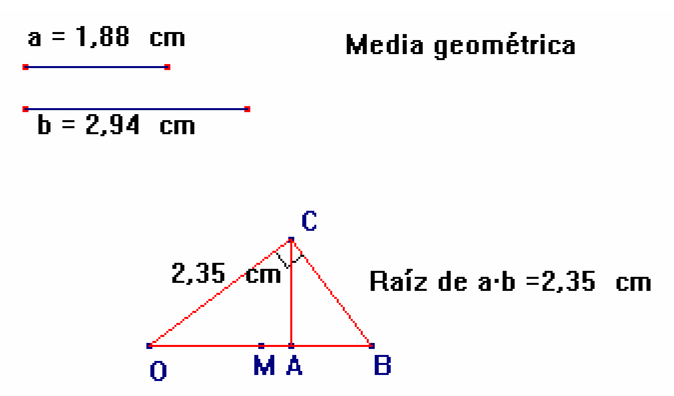
💾 Medgeo1.

② **Utilizando el teorema del cateto** (forma alternativa)

❂ Trazamos dos segmentos cuya media proporcional se desea construir y se miden.

❂ Dibujamos una semirrecta con origen **O** y transferimos las medias de ambos segmentos a partir del origen y obtenemos los puntos **A** y **B** de manera que las longitudes **OA** = **a** y **OB** =**b**.

❂ Traza la circunferencia con centro en el punto medio del segmento **OB** que nominas **M** y radio **MB** (o **MO**).



❂Levanta una perpendicular por **A** y en la intersección con la circunferencia tenemos el tercer vértice del triángulo rectángulo **OCB** (compruébalo).

❂ El cateto **OC** es la media proporcional que deseamos hallar, pues como según el *teorema del cateto* **cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella**, tenemos :

$$\frac{\text{Cateto OC}}{\text{Hipotenusa OB}} = \frac{\text{Proyección OA}}{\text{Cateto OC}} \Leftrightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow m^2 = a \cdot b \Leftrightarrow m = \sqrt{a \cdot b}$$

❂ Mide **OC** y comprueba que es la raíz de **OA·OB**.

🖫 Medgeo2.

③ **Basada en la semejanza** de **triángulos** (forma inusual)

✧ Comienza por dibujar los segmentos cuya media proporcional quieres calcular.

✧ Transfiere sus longitudes a una recta a partir de un punto O, de manera que **OA** = **a** y **OB** = **b**.

✧ Dibuja el punto medio de **OA**, que etiquetas **M** y el simétrico de **B** respecto de **M**, que etiquetas **B'**.

✧ Traza dos circunferencias, una con centro en **B** y radio **BO** = **b** y la otra con centro en **B'** y radio **B'A** = **b**. La intersección superior de ambas es el punto **C** Que forma tres triángulos isósceles :

✪ El triángulo **OBC**, de lados **OB** = **BC** = **b** y **OC** = **m**.
✪ El triángulo **AB'C**, de lados **B'A** = **B'C** = **b** y **CA** = **m**.
✪El triángulo **OCA**, de lados **OC** = **CA** = **m** y **OA** = **a**.

Estos tres triángulos son semejantes por :

✧ Luego aplicando la proporcionalidad entre los lados en **OBC** (ó **OB'C**) y **OCA** tenemos :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow m^2 = a{\cdot}b \Leftrightarrow m = \sqrt{a{\cdot}b}$$

✧ Mide el lado **OC** = **OA** = **m**.
✧ Calcula $\sqrt{a{\cdot}b}$ y comprueba que coinciden.
✧ Cambia las longitudes de los segmentos y observa si coinciden la medida y la raíz.

🖫 Medgeo3.

⑥ Ejercicios de refuerzo.

❶ Dado un triángulo y un punto P exterior, dibujar otro igual al original con uno de los vértices en P y cuyos lados no sean paralelos al inicial. 🖫 Ejerre1.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ Construir un triángulo conocidos los puntos medios de sus lados. 🖫 Ejerre2.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ Construir un triángulo conocidas las tres medianas. 🖫 Ejerre3.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ Construir un triángulo conocidos la base, la mediana y al altura que parten del mismo vértice. 🖫 Ejerre4.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ Construir un triángulo dados dos lados y la altura relativa a uno de ellos. 🖫 Ejerre5.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ Crea una macro para calcular la media proporcional entre dos segmentos. 🖫 Ejerre6.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ Dibuja las circunferencias exinscritas que son la circunferencias tangentes por el exterior a cada lado del triángulo y a la prolongación de las otras dos. Los exincentros se encuentran en el punto de corte de una bisectriz interior con dos exteriores de cada vértice. 🖫 Exinscri.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ Comprueba que las rectas que unen los vértices de un triángulo con los correspondientes puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas son concurrentes. El punto en el que concurren se llama **punto de Nagel**. 🖫 Nagel.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ Traza la **recta de Simsom** que está formada por los pies de las perpendiculares a los lados de un triángulo trazadas de un punto exterior al triángulo pero perteneciente a la circunferencia circunscrita.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ Demuestra que una de la bisectrices internas de un triángulo y la mediatriz del lado opuesto se cortan sobre la circunferencia circunscrita.

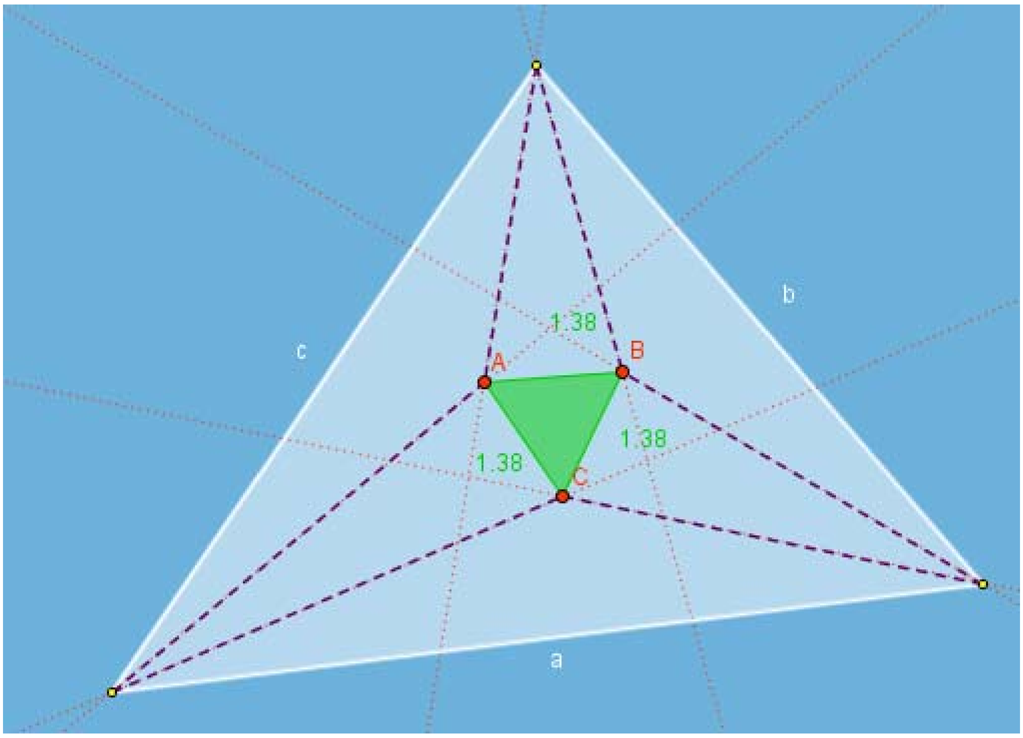
◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

⑦ Complementos y curiosidades

❶ Triángulo de Morley

Dibuja un triángulo cualquiera no equilátero.

Traza las rectas que trisecan los ángulo creando una nueva herramienta al efecto, activándola y marcando los ángulos :



Dibuja el triángulo que une los puntos **ABC**, mide sus lados y comprueba que es equilátero. Modifica los vértices del triángulo original y observa que se mantiene equilátero. 🖫 *Morley*.

Cuidado el otro triángulo **DEF** no tiene esta propiedad. ¿ Cómo distinguirías unos puntos de otros? : ____.

❷ Circunferencia de los nueve puntos

La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo, llamada así por J.V. Poncelet, se define :

En cualquier triángulo, los pies de las tres alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios que unen los vértices con el ortocentro, están en una circunferencia, cuyo radio es la mitad de la circunferencia cicunscrita

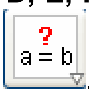
A la circunferencia de los nueve puntos se la conoce también como circunferencia de Euler o circunferencia de Feuerbach.

☒ Dibuja un triángulo cualquiera y halla los puntos medios de los lados, con lo que tienes tres de los nueve puntos **A**, **B** y **C**.

☒ Traza las alturas y sus pies son otros puntos **D**, **E** y **F**. El punto de corte de las alturas, el ortocentro lo nominas **M**.

☒ Dibuja los puntos medio de los segmentos que unen el ortocentro **M** con cada uno de los tres vértices del triángulo y los nominas **G**, **H** e **I**, con lo que ya tienes los nueve puntos. Pero ¿cual es el centro?. El centro de la circunferencia de los nueve puntos está situado en la recta de Euler, equidistante del ortocentro y del circuncentro, pero no necesitamos saberlo, lo comprobaremos después. Dibujamos dos cuerdas, **FH** y **AI**, por ejemplo, y sus mediatrices se cortan en el centro **O**.

☒ Ya puedes dibujar la circunferencia de centro en **O** y radio cualesquiera de los nueve puntos.

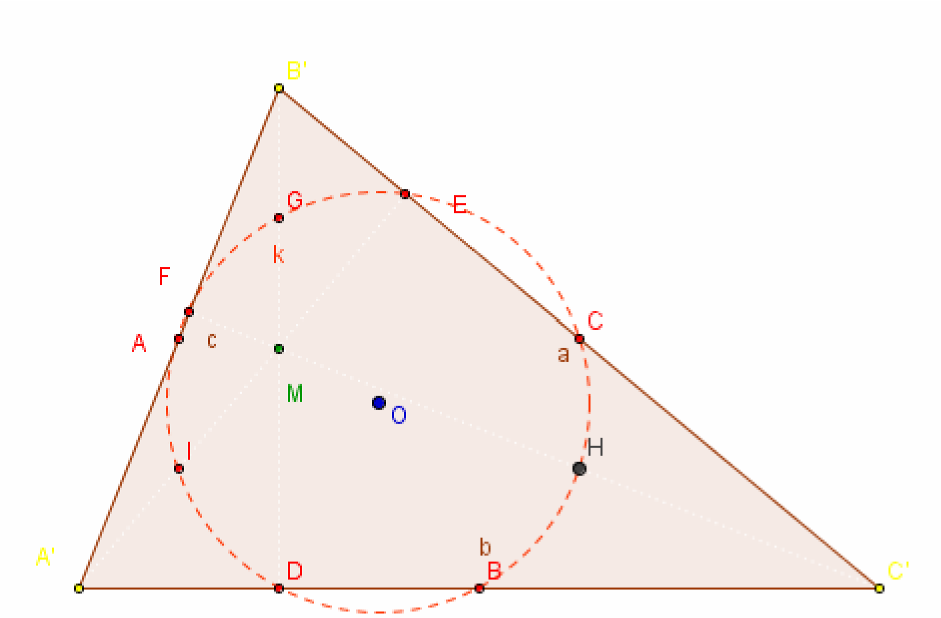
☒ Comprueba que los nueve puntos (**A, B, C, D, E, F, G, H** e **I**) pertenecen a la circunferencia mediante la herramienta **▶Relación entre 2 objetos◀** 

.

☒ Traza las mediatrices y dibuja el circuncentro (**P**) y comprueba que **el centro O de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento MP formado por el ortocentro (M) y el circuncentro (P).**

Una última propiedad: **la circunferencia de los nueve puntos es tangente tanto a la circunferencia inscrita como a las tres circunferencias exinscritas al triángulo.**

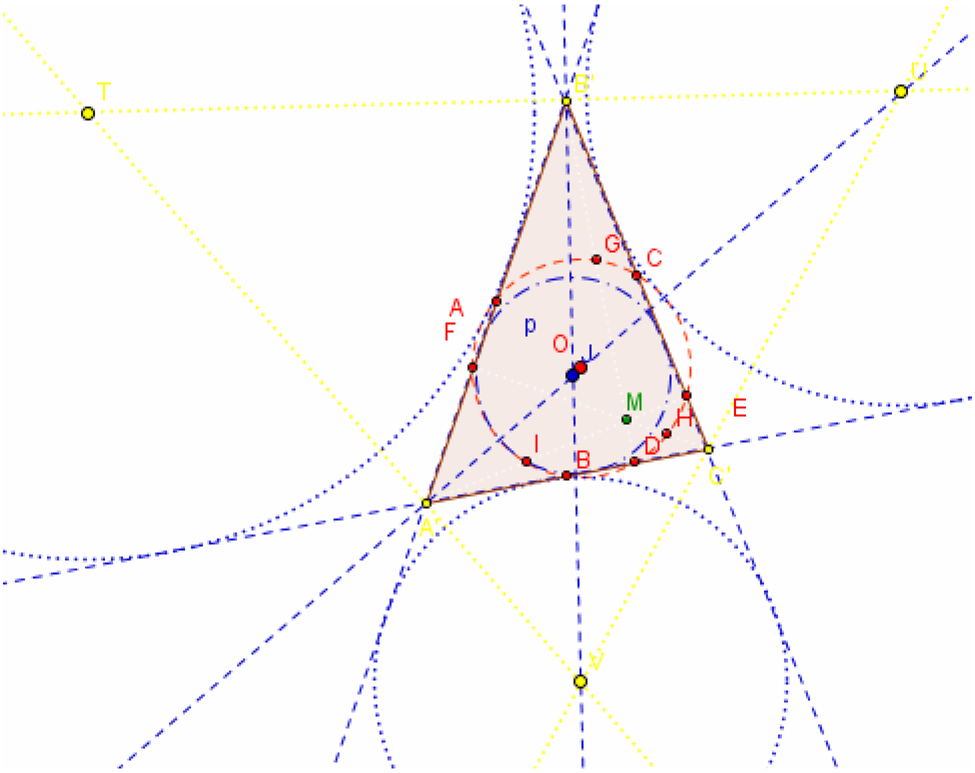
☑ Oculta los elementos auxiliares y dibuja la circunferencia inscrita, hallando el incentro como intersección de las bisectrices.



☑ Ahora vas a dibujar las circunferencias exinscritas. Traza rectas por los lados y dibuja las bisectrices exteriores.

☑ Dibuja los exincentros en los puntos de corte de dos bisectrices exteriores con una interior.

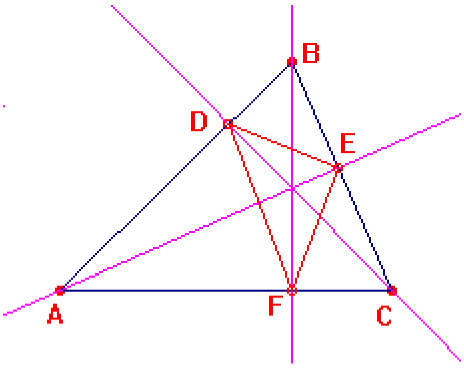
☑ Traza por los exincentros perpendiculares a las rectas que pasan por los lados para tener el radio y dibuja las tres circunferencias exinscritas :



🖫 Cirnueve

❸ **Triángulo órtico**

Dado un triángulo, se denomina triángulo órtico del original al que se forma uniendo los pies de las alturas y cumple que es el triángulo inscrito de perímetro mínimo.



◇ Dibuja un triángulo **ABC**, traza sus alturas y une los tres pies de las alturas **D**, **E** y **F** y tienes el triángulo órtico.

🖫 Órtico1.

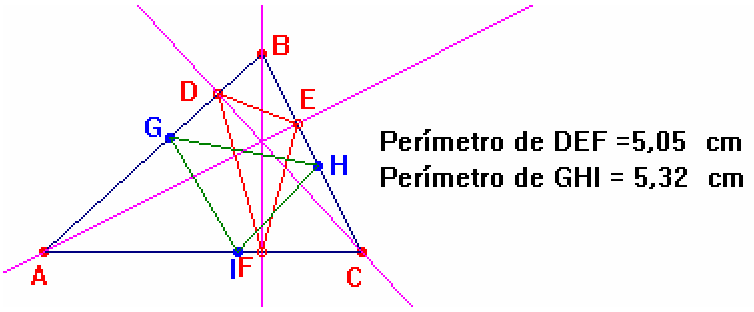
Veamos ahora alguna de sus propiedades, comenzando por la que enunciamos en la definición.

① ¿ Como podemos comprobar que *es el triángulo inscrito de menor perímetro*, pues dibujando otro triángulo inscrito, midiendo los perímetros de ambos y modificando este último para ver si encontramos uno de menor perímetro.

◇ Dibuja tres puntos **G**, **H** e I, uno en cada lado del triángulo original y dibuja el triángulo que forman.

◇ Mide el perímetro del órtico y el perímetro del triángulo **GHI** .

◇ Mueve los vértices **GHI** e investiga si puedes hallar uno de menor perímetro que el del órtico.



Órtico2.

② *Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro de* ***ABC*** *es el incentro del órtico*

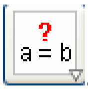
◇ Comprueba que las alturas trazadas son las bisectrices del órtico. Órtico3.

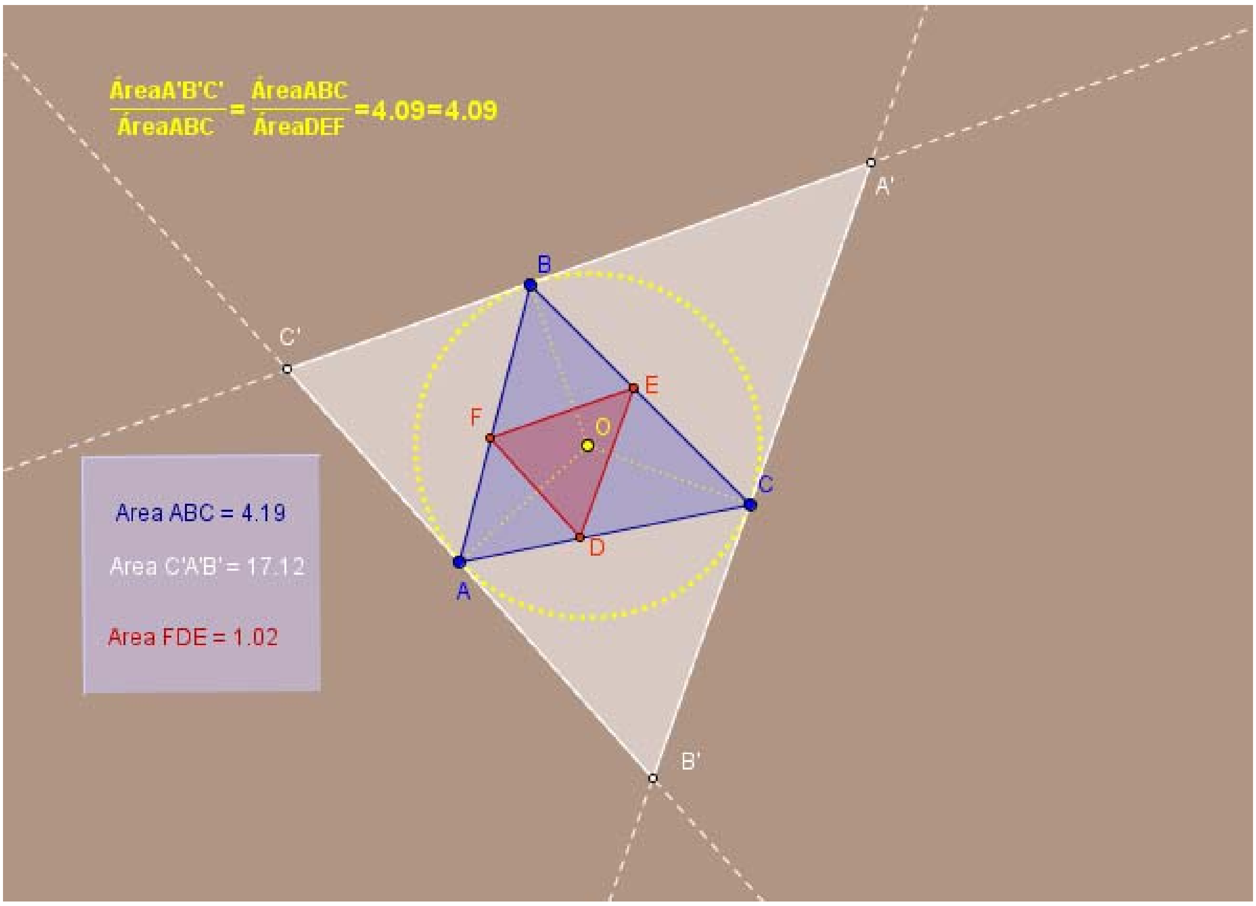
③ *Los lados del triángulo órtico son paralelos a los del triángulo* ***A'B'C'*** *que se obtiene trazando rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo original* **ABC**.

✦ Dibuja las mediatrices para tener el circuncentro **O** y traza la circunferencia circunscrita.

✦ Como la tangente en un punto de la circunferencia es siempre perpendicular ala radio, trazamos los radios **OA**, **OB** y **OC** y luego sus perpendiculares por los vértices.

✦ En los punto de corte tenemos los vértice **A' B'** y **C'** (por los que pasan también las mediatrices de original **ABC**).

✦ Comprueba que los lados del órtico son paralelos a los de **A'B'C'** mediante la herramienta **►Relación entre 2 objetos◄** .



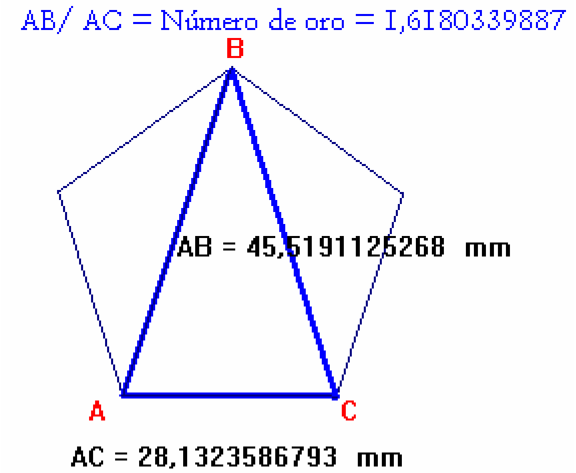
✦ Comprueba que el área del triángulo **ABC** (original) es media proporcional entre las del triángulo órtico (**DEF**) y su paralelo (**A'B'C'**). 🖫 *Órtico4*.

④ *La circunferencia de Feuerbach del triángulo órtico es de radio la mitad que el radio de la correspondiente al triángulo original .*

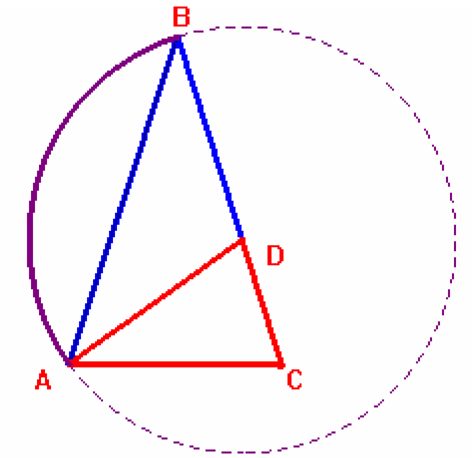
▣ Construye las dos circunferencias de Feuerbach (de los nueve puntos) como se ha descrito anteriormente, mide sus radios y comprueba esta propiedad. 🖫 *Órtico5*.

❹ Triángulo áureo

Es un triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º y 72º, porque el cociente entre la longitud de uno de sus lados iguales y la longitud del lado desigual es el número de oro ϕ (de Phidias). Se puede dibujar directamente paro es más rápido obtenerlo a partir de un pentágono regular :

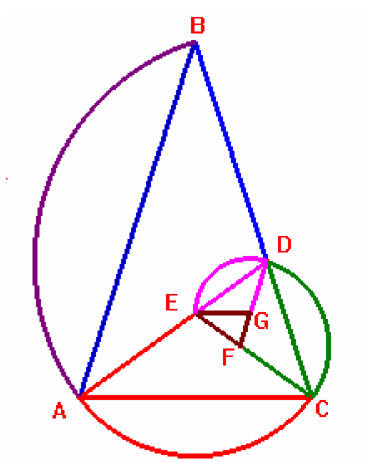


❂ Si bisecamos uno de los ángulos iguales (**CAB**), se obtiene dos triángulo **ADC** y **ADB**. El primero también es semejante al original y por tanto áureo y el segundo también ya que **AB**/**AD** = ϕ, pues **AC** = **BD** = **AD**.



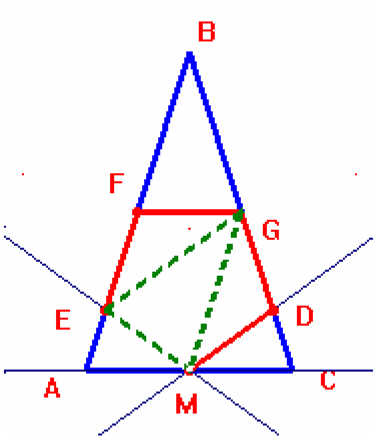
❂ Podemos dibujar un arco de circunferencia con centro en **D** y que pase por **AB**.

❂ Si bisecamos el ángulo **C** obtenemos **E** se forman otros dos triángulo áureos (**AE** = **EC** = **DC**) y podemos trazar otro arco de circunferencia por **AC** y si continuamos repitiendo el proceso se obtiene una sucesión espiral logarítmica de triángulos y arcos que converge a un punto situado en la intersección de dos medianas de los dos primeros triángulos :



🖫 Taureo1.

Es muy corriente fabricar puzzles basados en el triángulo áureo :



❂ A partir del punto medio de la base (**M**) se trazan rectas que formen ángulos de 36º con ella obteniéndose **D** y **E** y mediante paralelas, por **E** a **MD** se obtiene el punto **G** , y por **G** paralela **AC** el punto **F**.

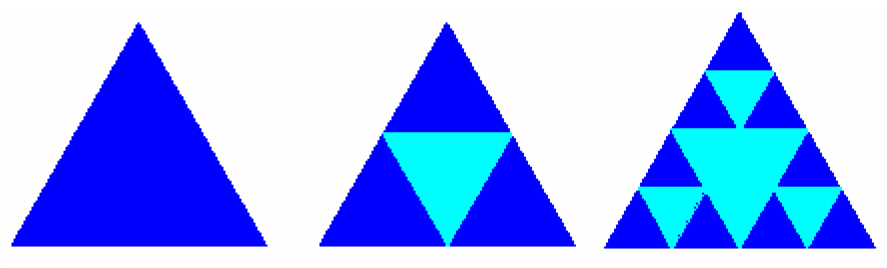
❂ Los puntos **EMDGF** forman un pentágono regular que es la base de todos los puzzles triangulares áureos.

❂ Los tres triángulos del interior del pentágono son áureos y en el **EMG** se puede repetir el proceso y obtener nuevas piezas y así sucesivamente hasta que nos convenga para obtener nuestra figura a base de un puzzle con triángulos, todos áureos. Además **EM** = **AM** = **MD** = **MC** y áureos en los cuales se puede hacer los mismo. El triángulo **FGB** = triángulo **EMG**, etc…

❺ Fractales con triángulos

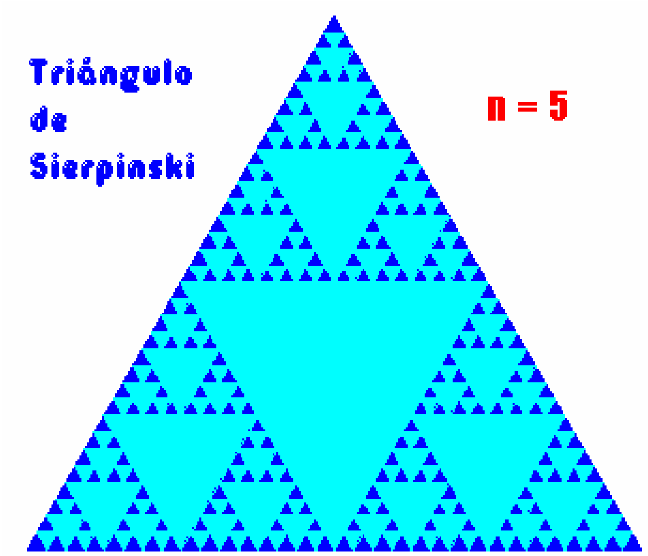
① Triángulo de Sierpinski

A partir de un triángulo equilátero y uniendo los puntos medios de sus lados se forma otro triángulo equilátero y en los tres que quedan se repite el proceso :



Para construirlo podemos definir una herramienta que a partir de los tres vértices del triángulo equilátero original construya el triángulo equilátero sombreado de la primera etapa. Después dibujamos los otros tres del segundo paso (que podemos rellenar del mismo o de otro color) y definimos otra macro que, teniendo como objetos iniciales los tres vértices dibuje como objetos finales los cuatro triángulos sombreados hasta el segundo paso, y así sucesivamente.

A partir del triángulo mayor que te quepa en la pantalla de Geogebra, dibuja un triángulo de Sierpinski, hasta el paso 5 semejante al de la figura :



Sierpins

Vamos a aprovechar para trabajar un poco las sucesiones de números.

Si el área del triángulo inicial es A, es evidente que el triángulo sombreado del primer paso es la cuarta parte y el área de cada uno de los tres sombreados en el segundo paso es de 1/16 de A y en la tercera etapa cada triángulo sombreado tiene 1/64 de A y así sucesivamente, luego es una **progresión geométrica** ilimitada de razón ¼, con lo que podemos formar una tabla :

Paso o etapa	1º	2º	3º
Fracción del área inicial (A)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
Suma de las áreas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)$

La fracción de área del triángulo sombreado en el paso n-ésimo viene dado por: $\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4^n}=\frac{1}{2^{2n}}$

La fracción de la suma de las áreas de los triángulos sombreados hasta el paso n-ésimo podría expresarse (entre otras) de la forma :

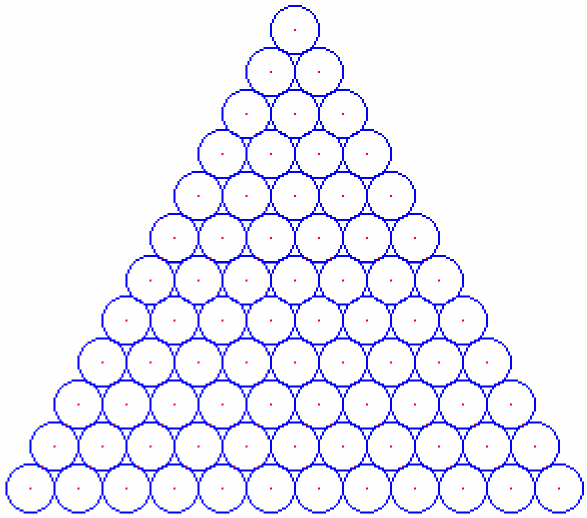
$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^i$$

El sentido común nos dice que, si pudiésemos continuar el proceso hasta el infinito, la fracción de área de cada triángulo sombreado tendería anularse y el área sombreado tendería al área del triángulo inicial (A), lo que podría demostrarse a partir de la fórmula de la suma de las progresiones geométricas ilimitadas, siendo la razón r = 3/4 :

$$\text{Fracción de la suma de áreas}=\frac{1}{4}\cdot S=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a_1}{1-r}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{4-3}{4}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/4}\right)=1$$

¿ Serías capaz de analizar de forma semejante lo que sucedería con los perímetros ?. Inténtalo :

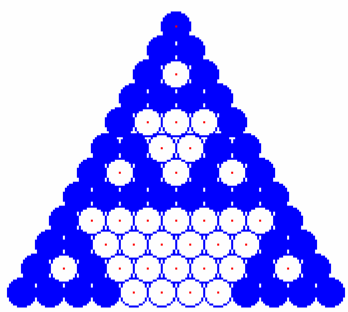
Construye un triángulo de circunferencias como en la figura adjunta hasta que la base sea tenga 20 (a medida que las vayas añadiendo puedes ir diminuyendo el radio). Piensa en una macro que te permita obtener un triángulo de circunferencias semejante al siguiente:



Si recordamos el triángulo de Pascal :

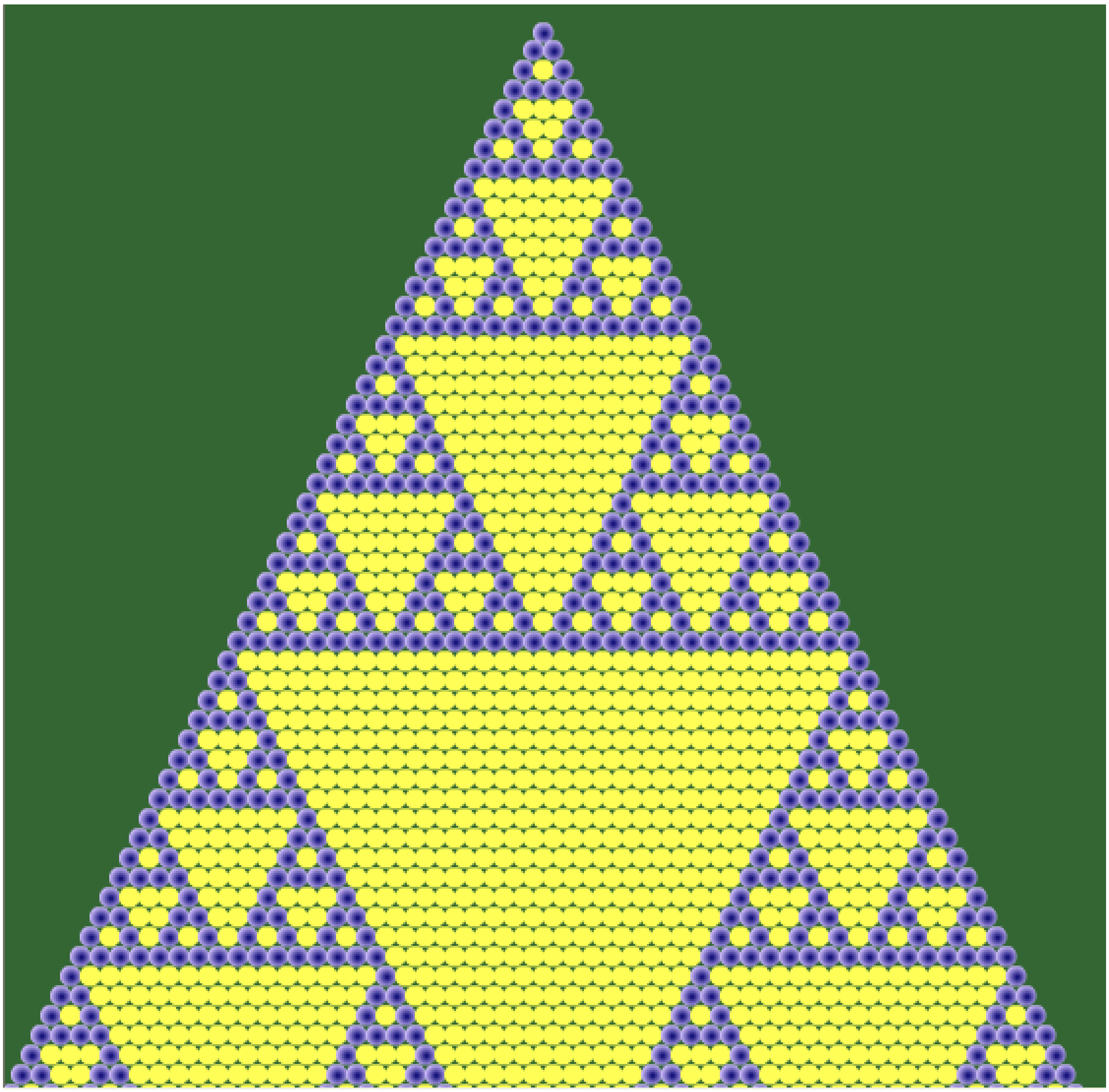
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 330 165 55 11 1

y hacemos corresponder a cada círculo su número de manera que le dejamos en blanco si el número es impar y le rellenamos si es par se obtiene :



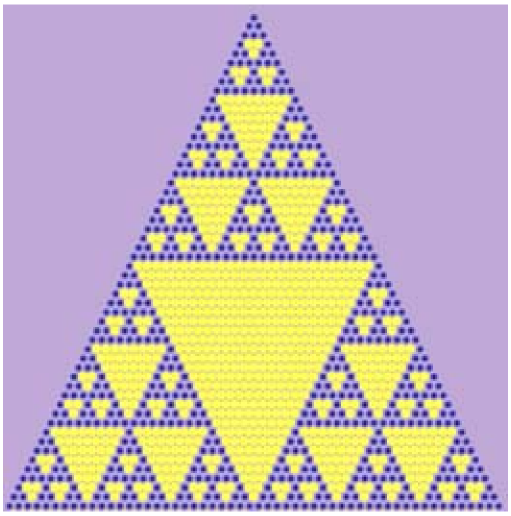
¡Qué es el fractal de Sierpinski ¡

La imagen siguiente, que puede verse en mi página web está dibujada con ActionScrip de Flash:

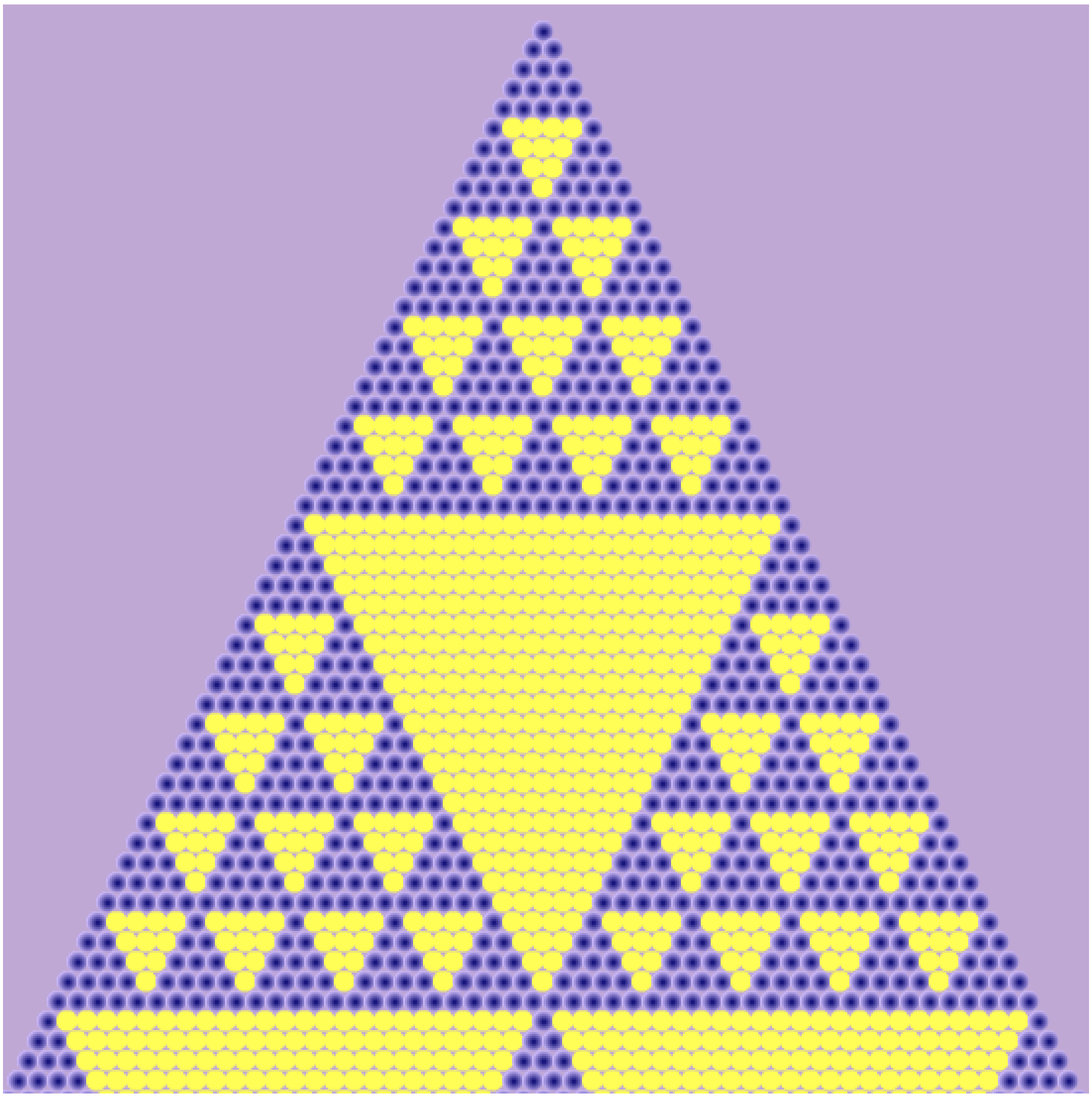


Nos preguntamos ¿qué sucede si en el triángulo de Pascal tenemos en cuenta múltiplos de otros números? Experimentemos.

En la figura siguiente, a la izquierda, hemos coloreado de amarillo los números múltiplos de 3, es decir, si el número del triángulo de Pascal es múltiplo de 3, 0(módulo3), lo coloreamos de amarillo y si no en azul, podemos observar que obtenemos otro motivo pero sigue siendo un fractal sierpinskiniano.

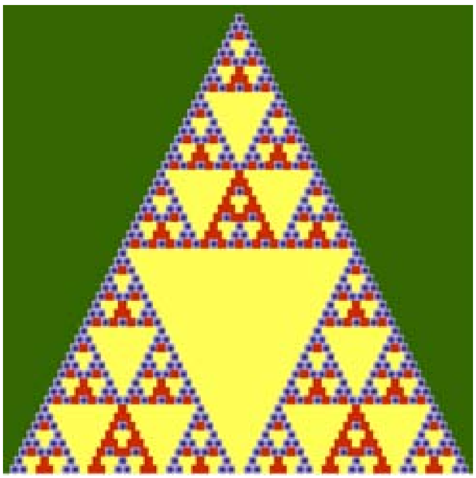


Y probando con otros números:



0 (módulo 5)

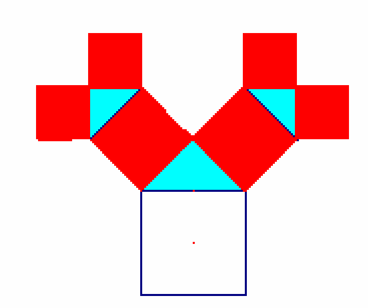
Pero, podemos ir más lejos y usar varios colores para los números que dan restos distintos al dividir por 3, es decir, si obtenemos resto cero, divisible por 3, 0(módulo 3) en color amarillo, si obtenemos resto uno, 1(módulo 3) en color azul y si obtenemos resto dos, 2(módulo 3) en color rojo, con lo que obtenemos el fractal sierpinskiniano:



Para ver más, visita mi página Web sobre triángulos con Geogebra.

② **Árbol de Pitágoras**

Este fractal se forma a partir de del teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo isósceles :



Continua la iteración construyendo una herramienta nueva y lo guardas como ArbolPita.

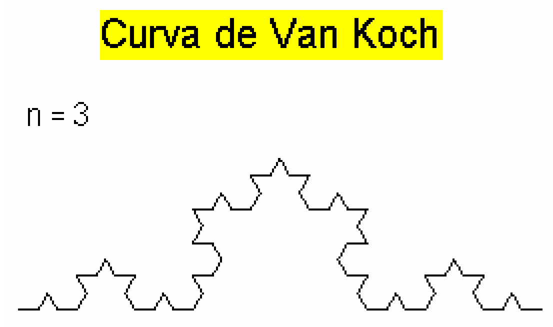
En el primer triángulo rectángulo isósceles el área de los cuadrados construidos sobre los catetos es la mitad del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa ya que la suma de los dos menores ha de ser igual al mayor y aquellos son iguales :

Área de cuadrado construido sobre la hipotenusa = 2 (área de un cuadrado construido sobre uno de los catetos, ya que son iguales por ser isósceles).

En el siguiente paso los cuadrados obtenidos tendrá la cuarta parte del original y entre los dos la mitad del área del original y así sucesivamente.

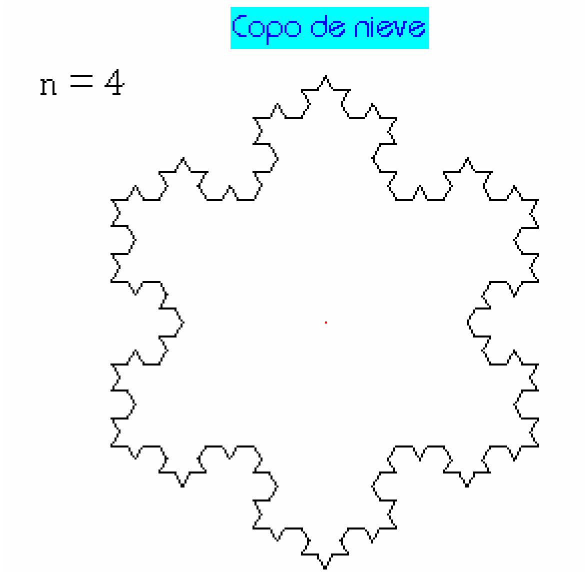
③ **Copo de nieve**

Vas a construir primero la curva de Von Koch o forma de la costa.



⌧ Dibuja un segmento **AB**.
⌧ Construye sobre AB un triángulo equilátero **ABC** y halla su baricentro **G**.
⌧ Traza una paralela al lado **AC** por **G** que corta al segmento AB en el punto **F**.
⌧ Traza una paralela a **BC** por **G** que corta a **AB** en el punto **H**.
⌧ Oculta los elementos auxiliares excepto los puntos **A, F, G, H** y **B** y el segmento **AB**.
⌧ Traza los segmentos **AF**, **FG**, **GH**, **HB** en este orden y respetando el orden de los extremos inicial y final.
⌧ Oculta los puntos **A**, **F**, **G**, **H**, y **B**.
⌧ Crea una herramienta nueva cuyo objeto inicial sea el segmento **AB**, y ocúltalo.
⌧ Los objetos finales de la macro son consecutivamente los segmentos **AF**, **FG**, **GH** y **HB**.
⌧ Activa la herramienta creada y pulsa sobre los segmentos que forman la figura y tendrás la segunda etapa y así sucesivamente hasta la etapa que puedas.

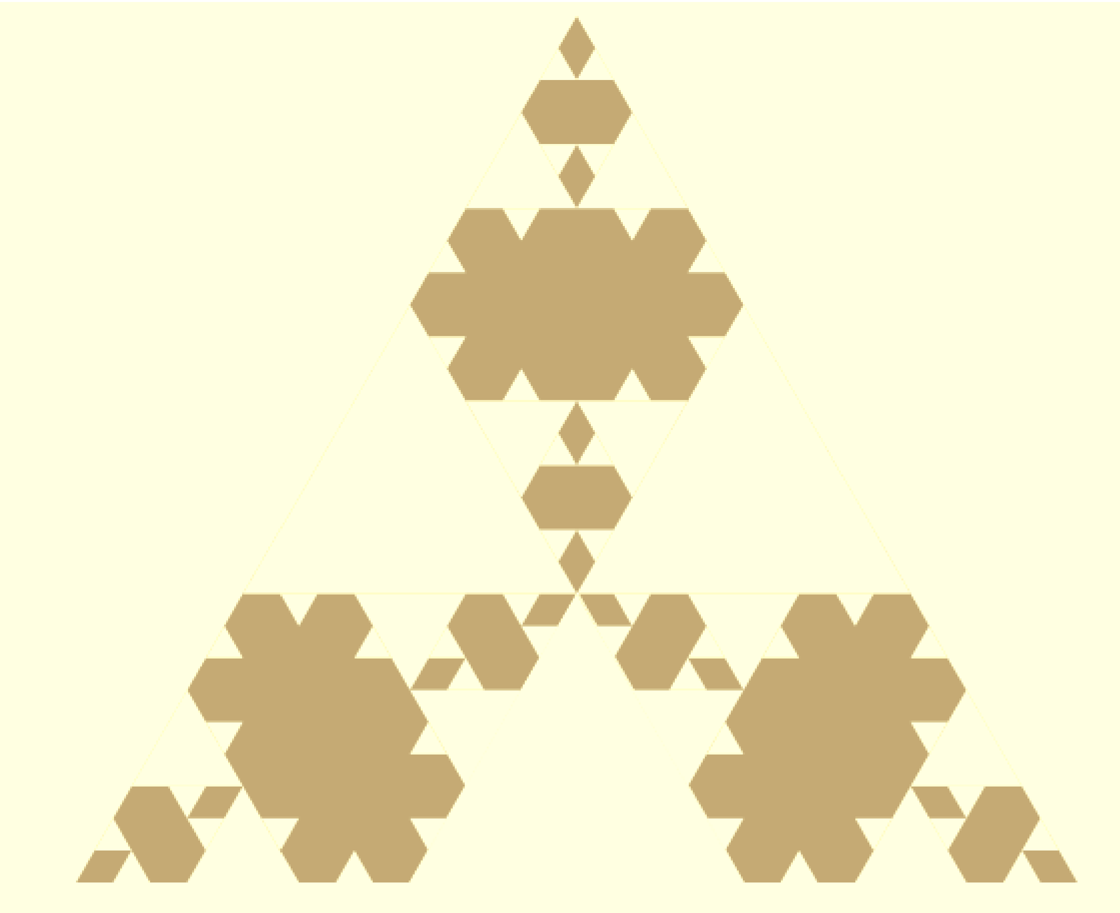
Para dibujar el fractal copo de nieve, utiliza la macro creada en los tres lados de un triángulo equilátero:



🖫 CurvaSier.
🖫 Coponieve.

④ **Anticopo de nieve**

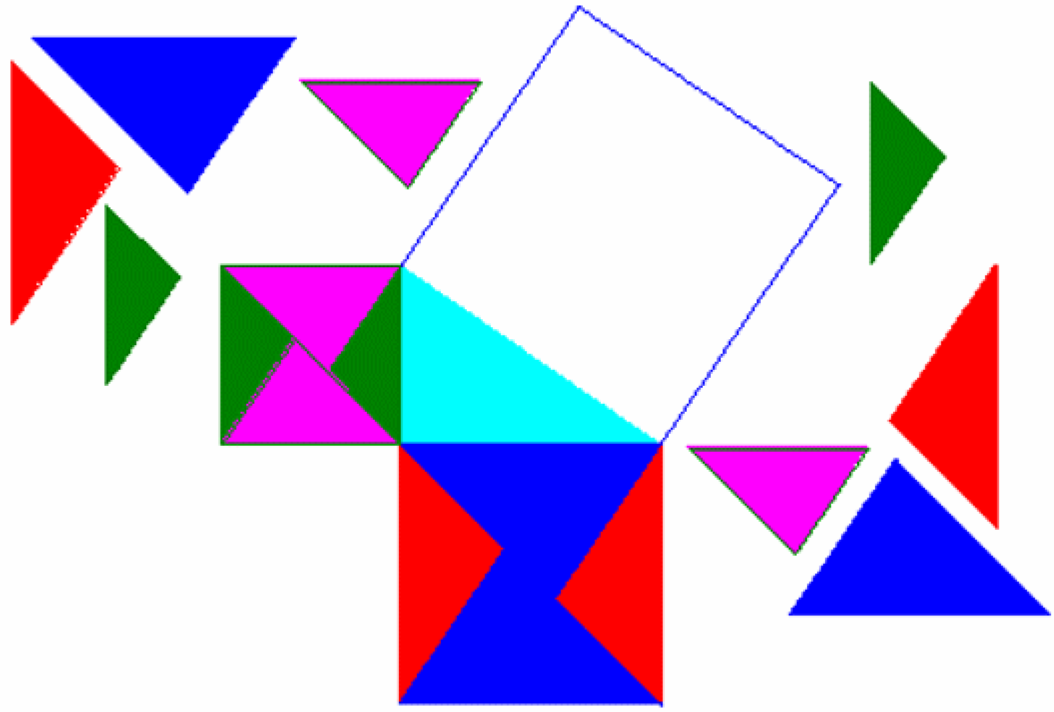
Para dibujar el fractal anticopo de nieve, construye una herramienta como en el caso anterior pero en el orden inverso en los puntos, para que el pico sea hacia adentro :



🖫 Anticopo.

❽ Puzzles Pitagóricos

Con las piezas en que se han descompuesto los cuadrados construidos sobre los catetos tienes que cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa, lo puedes hacer con Flash moviendo las piezas con el puntero y girándolas, cuando lo necesites, con la segunda opción. La otra opción es imprimirlos sobre papel y componerlos a mano. En la página se enlaza con los archivos de los puzzles para recortar, para practicar arrastrando piezas y las soluciones animadas. Te muestro un ejemplo para recortar

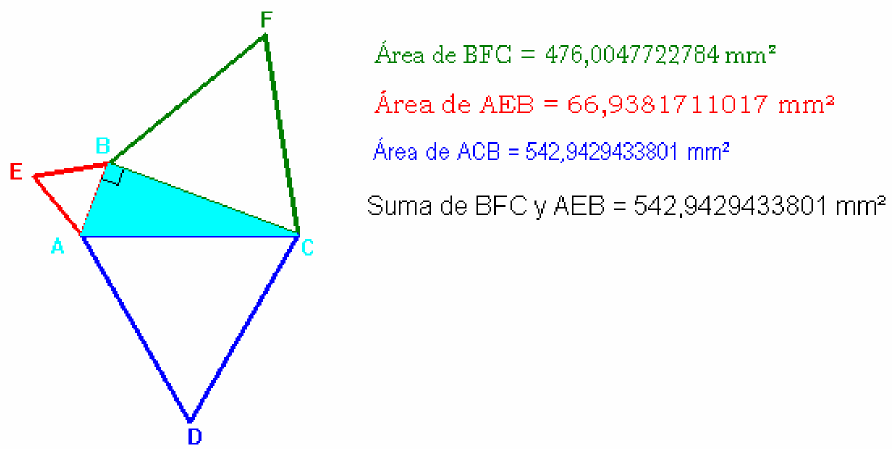


❾ Generalización del teorema de Pitágoras

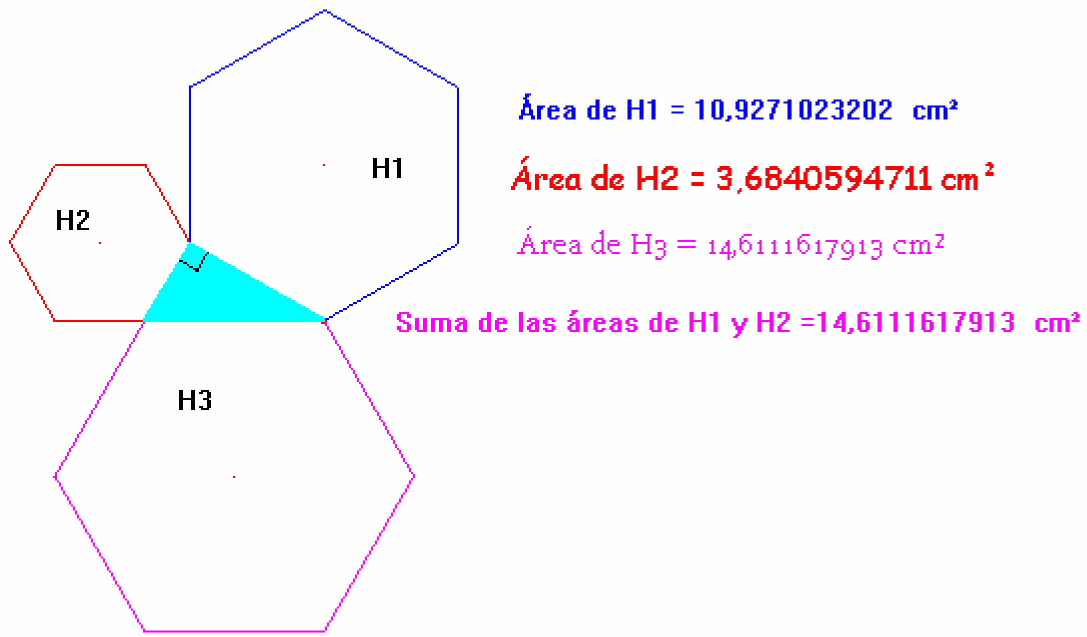
Ya sabes que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del construido sobre la hipotenusa. Nos preguntamos ahora, ¿qué sucederá si construimos sobre los lados del triángulo rectángulo otros polígonos regulares?. Vamos a experimentar con triángulos equiláteros:

Dibuja un triángulo rectángulo y sobre sus lados dibuja triángulos equiláteros.

Halla el área de cada uno de los tres triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo rectángulo y comprueba que la suma de los construidos sobre los catetos es igual al área del construido sobre la hipotenusa :



🖫 Pitatri y prueba ahora con hexágonos :



También se cumple que el área del hexágono regular construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos, parece que con polígonos regulares se cumple. Pitahexa.

¿Se cumplirá también para polígonos regulares?. Es evidente que alguna relación hemos de establecer entre ellos y parece lógico pensar que han de ser semejantes los tres polígonos irregulares, comprobemos nuestra conjetura :

Nuestra finalidad es construir sobre los tres lados de un triángulo rectángulo triángulos semejantes, es decir si sobre uno de los lados construimos un triángulo que tenga como base ese lado sobre los otros dos lados hay que levantar triángulos que sean semejantes, ¿la razón de semejanza?, la razón entre las longitudes de los lados.

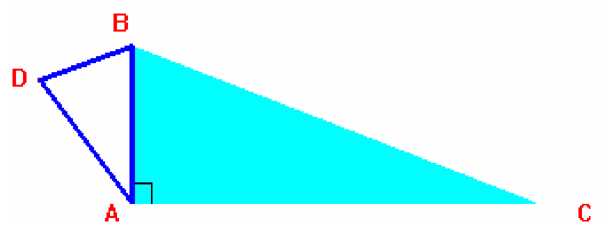
- Traza una semirrecta de origen **A** y una perpendicular a ella por **A**.
- Trazamos una recta que pase por la perpendicular (vértice **B**) y por un punto de la semirrecta distinto de **A** (vértice **C**) y tenemos nuestro triángulo rectángulo cuyos vértices son móviles.

Traza los segmentos correspondientes a los lados (**AB**, **AC** y la hipotenusa **BC**) que nos permitan medir sus longitudes y después el triángulo **ABC** (rectángulo en **A**) ocultando las rectas y la semirrecta.

- Al lado del segmento **AB** dibujamos un punto **D** y el triángulo **ABD**, que nos servirá para levantar los otros dos.
- Hallamos las medidas de los lados y las razones de semejanza respecto del lado **AB** :

AB = 2,3283333333 cm
BC = 6,4415582442 cm
AC = 6,0060416667 cm

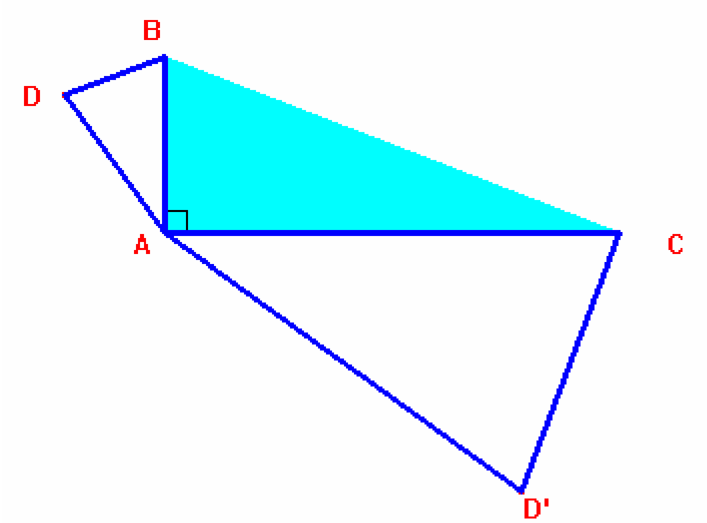
AC/AB = 2,5795454545
BC/AB = 2,7665962394



❁ Ahora hemos de trazar sobre el lado AC un triángulo semejante a **ABD** para lo cual vamos a usa una herramienta que no hemos utilizado hasta ahora ▶**Homotecia**◀ del grupo {Transformar} que dibuja polígonos semejantes respecto de un punto (centro de homotecia) y según un factor (razón de homotecia) con lados paralelos.

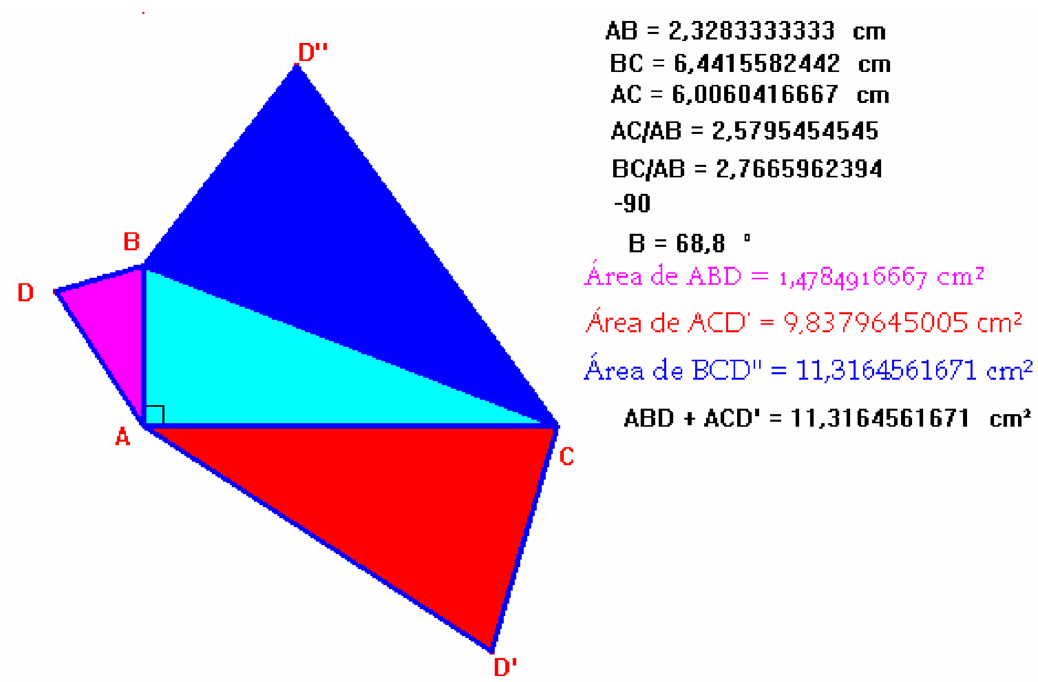
❁ Activamos la herramienta y realizamos la homotecia del triángulo **ABD** respecto del punto **A** según el factor **AC**/**AB** y tenemos el triángulo que ha de descansar sobre el lado **AC**, ahora hay que trasladarlo allí.

❁ Primero un giro de -90º con centro en **A** y luego una simetría axial respecto del lado **A** y ya tenemos el triángulo **ACD'** en posición:



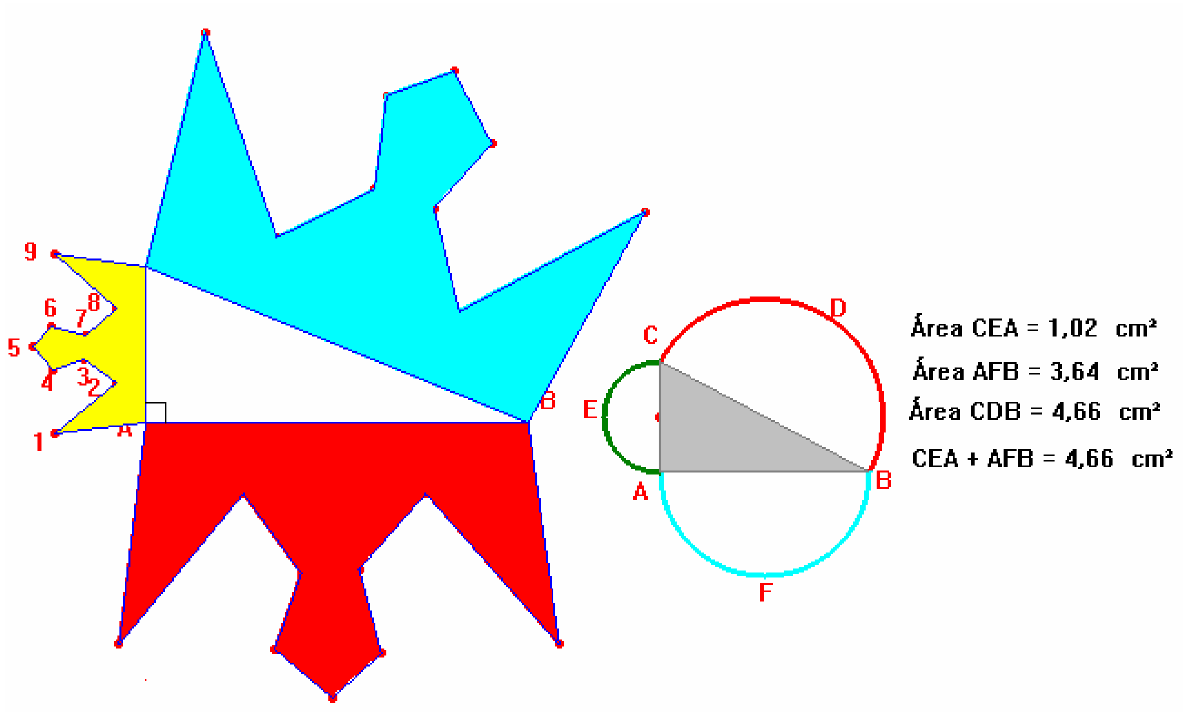
❁ Ahora hay que seguir los mismos pasos para levantar el triángulo sobre la hipotenusa. Dibujar el homotético de factor **BC**/**AB** y centro en **B**, girarlo el ángulo **B** y colocar en su posición al triángulo **BCD**" dibujando su simétrico respecto al lado **BC**.

❁ Sólo te queda comprobar que los tres triángulos cumplen el teorema de Pitágoras y que lo siguen cumpliendo aunque modifiques los vértices (**ABC**) del triángulo rectángulo o el vértice **D** del triángulo original construido sobre uno de los catetos :



🖫 Pitatrinore.

Si has entendido el procedimiento seguro que puedes “coronar” esta generalización del teorema de Pitágoras con dos construcciones semejantes a :



🖫 Pitacorona y Pitasemicir .

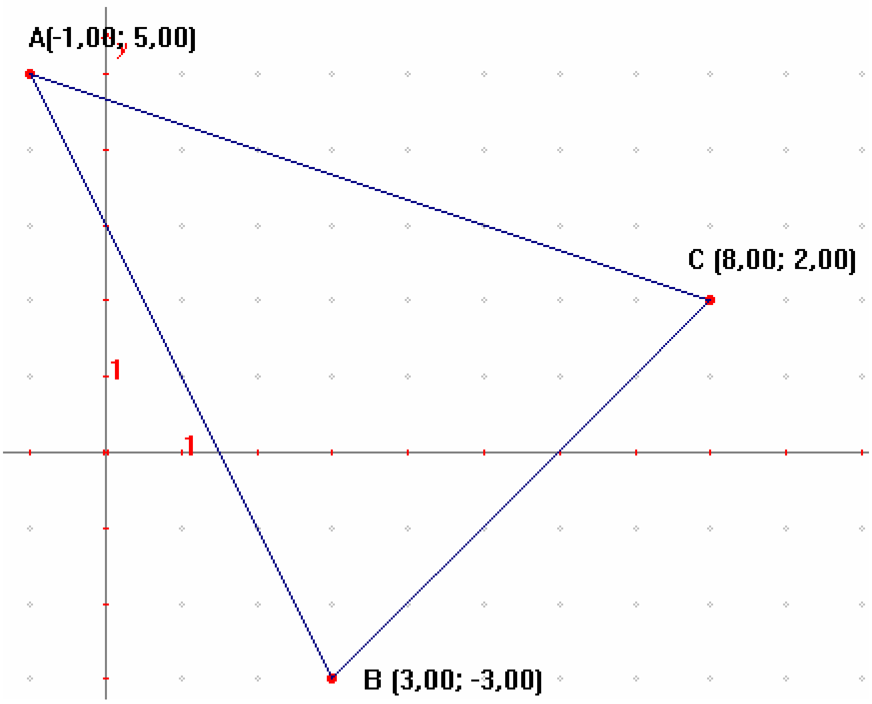
❽ Geometría analítica

Vamos, mediante un ejercicio típico, a introducirnos en la analítica del triángulo.

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos de A (-1,5), B(3,-3) y C(8,2). Halla :

① Las ecuaciones de sus lados.
② Las ecuaciones de sus medianas y el baricentro.
③ Las ecuaciones de sus alturas y el ortocentro.
④ Las ecuaciones de sus mediatrices, el circuncentro y la ecuación de la circunferencia circunscrita.
⑤ Las ecuaciones de sus bisectrices, el incentro y la ecuación de la circunferencia inscrita.
⑥ El área del triángulo y de los círculos inscrito y circunscrito.

◎ Activa los ejes y activa la rejilla.
◎ Dibuja los vértices en sus coordenadas y muestra sus coordenadas y dibuja el triángulo.



① **Ecuaciones de los lados**

Ecuación del lado AB

Vector director : v_{AB} = B – A = (3,-3) - (-1,5) = (4, -8), luego partiendo de la ecuación de la recta en forma continua tenemos :

$\frac{x-x_A}{v_1}=\frac{y-y_A}{v_2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4}=\frac{y-5}{-8} \Leftrightarrow -8x-8=4y-20 \Leftrightarrow 2x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-2x+3$ la ecuación del lado AB.

◎ Dibuja la recta AB y comprueba que coincide con la calculada.

Ecuación del lado BC

Vamos a partir ahora de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos :

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Leftrightarrow \frac{x-3}{8-3}=\frac{y+3}{2+3} \Leftrightarrow x-y-6=0 \Leftrightarrow y=x-6$$

◎ Dibuja la recta BC y comprueba que coincide con la calculada.

Ecuación del lado AC

Vector director : w = C – A = (8,2) - (-1,5) = (9, -3), luego la ecuación de la recta en forma vectorial es :
(x,y) = (-1,5) + t(9,-3)

Y en paramétricas :

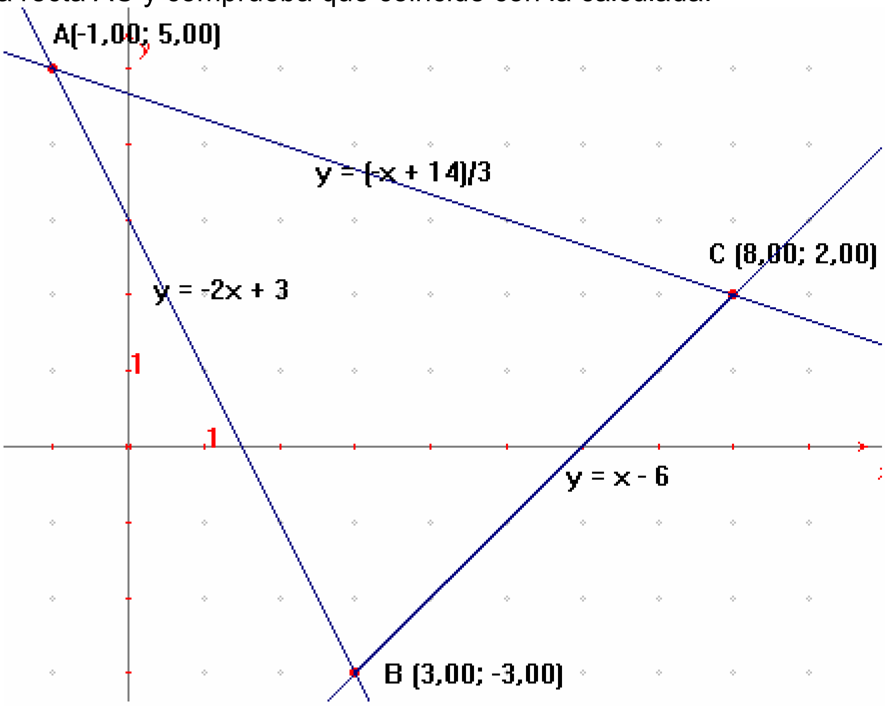
$\begin{cases} x=-1+9t \\ y=5-3t \end{cases}$, que pasamos a continua despejando el parámetro e igualando:

$$t=\frac{x+1}{9}=\frac{y-5}{-3}=t$$

Si quitamos denominados, transponemos términos y simplificamos tenemos la general o implícita : -3x -3 =9y –45 ; 3x +9y –42 = 0, x + 3y – 14 = 0 y despejando la y tenemos la forma explícita :

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{14}{3}$$

◎ Dibuja la recta AC y comprueba que coincide con la calculada.



② **Medianas y Baricentro**

Primero hallamos las coordenadas de los puntos medios de los lados :

Coordenadas del punto medio de AB, M :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1)$$

Coordenadas del punto medio de BC, N :

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_C + x_B}{2} = \dfrac{3+8}{2} = \dfrac{11}{2} \\ y_N = \dfrac{y_C + y_B}{2} = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Coordenadas del punto medio de CA, P :

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+8}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_P = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+2}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

◎ Dibuja los puntos medios de los lados, comprueba que coinciden con los calculados y los etiquetas.

Ahora podemos hallar las medianas :

Mediana, n, que pasa por A(-1,5) y N(11/2,-1/2) :

$$n \equiv \frac{x-x_A}{x_N-x_A} = \frac{y-y_A}{y_N-x_A} \Rightarrow n = \frac{x+1}{\frac{11}{2}+1} = \frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\frac{13}{2}} = \frac{y-5}{-\frac{11}{2}} \Leftrightarrow 11x+13y-54=0 \Leftrightarrow y=-\frac{11}{13}x+\frac{54}{13}$$

◎ Dibuja la recta mediana n que pasa por A y N y halla su ecuación comprobando que es la calculada.

Mediana, m, que pasa por C(8,2) y M(1,1) :

$$m \equiv \frac{x-x_C}{x_M-x_C} = \frac{y-y_C}{y_M-x_C} \Rightarrow m = \frac{x-8}{1-8} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow \frac{x-8}{-7} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x-7y+6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$$

◎ Dibuja la recta mediana m que pasa por C y M y halla su ecuación comprobando que es la calculada.

Mediana, p, que pasa por B(3,-3) y P(7/2,7/2) :

$$p \equiv \frac{x-x_B}{x_P-x_B} = \frac{y-y_B}{y_P-x_B} \Rightarrow p = \frac{x-3}{\frac{7}{2}-3} = \frac{y+3}{\frac{7}{2}+3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{\frac{1}{2}} = \frac{y+3}{\frac{13}{2}} \Leftrightarrow 13x-y-42=0 \Leftrightarrow y=13x-42$$

◎ Dibuja la recta mediana p que pasa por B y P y halla su ecuación comprobando que es la calculada.

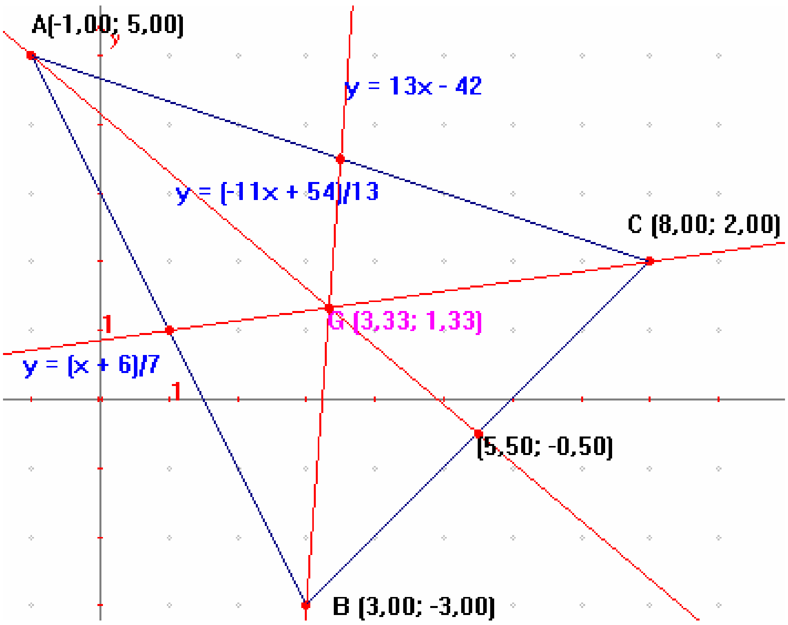
El baricentro lo podemos hallar resolviendo el sistema formado por dos medianas, como punto de corte de las medianas :

$$\begin{cases} m \equiv y = \frac{x+6}{7} \\ p \equiv y = 13x-42 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+6}{7} = 13x-42 \Leftrightarrow 91x-294 = x+6 \Leftrightarrow x = 300/90 = \frac{10}{3} \Rightarrow y = 4/3 \Rightarrow G\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$$

o bien mediante su fórmula (menos didáctico, pero más rápido si sólo he de hallar G) :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{-1+3+8}{3} = \frac{10}{3} \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{5-3+2}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$$

◎ Dibuja el baricentro (punto de corte de las medianas y comprueba sus coordenadas y obtendrás algo similar a :



③ **Alturas y ortocentro**

Como las alturas son perpendiculares al lado, trazadas desde el vértice opuesto, calculamos primero los vectores directores de cada lado que serán los vectores normales a las alturas:

AB = v = B – A = (3,-3) – (-1,5) = (4,-8) .

BC = w = C – B = (8,2) – (3,-3) = (5,5) .

AC = s = C – A = (8,2) – (-1,5) = (9,-3).

Altura ⊥ AB y que pasa por C

$$\left.\begin{cases}\text{Vector } \perp\text{: AB}(4,-8)\\ \text{Punto : C}(8,2)\end{cases}\right\} \Rightarrow 4x-8y+c=0 \xrightarrow{\text{Sust C}(8,2)} 4\cdot 8-8\cdot 2+c=0 \Leftrightarrow c=-16 \Rightarrow h_1 = 4x-8y-16=0 \text{ es decir,}$$

simplificando $h_1 : x - 2y - 4 = 0$

Comprobamos que AB $\perp h_1$:

$$\left.\begin{cases}AB \equiv 2x+y-3=0\\ h_1 \equiv x-2y-4=0\end{cases}\right\}\text{Condición de} \perp A\cdot A'+B\cdot B'=0 \Rightarrow 2\cdot 1+1(-2)=0$$

◎ Ahora lo comprobamos con Geogebra, dibuja la recta perpendicular al lado AB que pasa por C, halla su ecuación comprobando que es la calculada. Para pasar a forma general o implícita : Menú **Opciones/ Preferencias/Sistemas de coordenadas** y en el cuadro **Recta** elige la forma general (AX+By +C = 0).

Altura ⊥ BC y que pasa por A

$$\left.\begin{cases}\text{Vector } \perp\text{: BC}(5,5)\\ \text{Punto : A}(-1,5)\end{cases}\right\} \Rightarrow 5x+5y+c=0 \xrightarrow{\text{Sust A}(-1,5)} 5\cdot(-1)+5\cdot 5+c=0 \Leftrightarrow c=-20 \Rightarrow h_2 = 5x+5y-20=0 \text{ es decir,}$$

simplificando, $h_2 : x + y - 4 = 0$

Comprobamos que BC $\perp h_2$:

$$\left.\begin{cases} BC \equiv x - y - 6 = 0 \\ h_2 \equiv x + y - 4 = 0 \end{cases}\right\} \text{Condición de} \perp A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

◎ Ahora lo comprobamos con Geogebra, dibuja la recta perpendicular al lado BC que pasa por A, halla su ecuación comprobando que es la calculada.

$\boxed{\text{Altura} \perp AC \text{ y que pasa por B}}$

$$\left.\begin{cases} \text{Vector } \perp\text{: } AC(9,-3) \\ \text{Punto : } B(3,-3) \end{cases}\right\} \Rightarrow 9x - 3y + c = 0 \xrightarrow{\text{Sust } B(3,-3)} 9 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) + c = 0 \Leftrightarrow c = -36 \Rightarrow h_3 = 9x - 3y - 36 = 0 \text{ es decir,}$$

simplificando, $h_3 : 3x - y - 12 = 0$

Comprobamos que $AC \perp h_3$:

$$\left.\begin{cases} AC \equiv x + 3y - 14 = 0 \\ h_3 \equiv 3x - y - 12 = 0 \end{cases}\right\} \text{Condición de} \perp\text{: } A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \Rightarrow 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

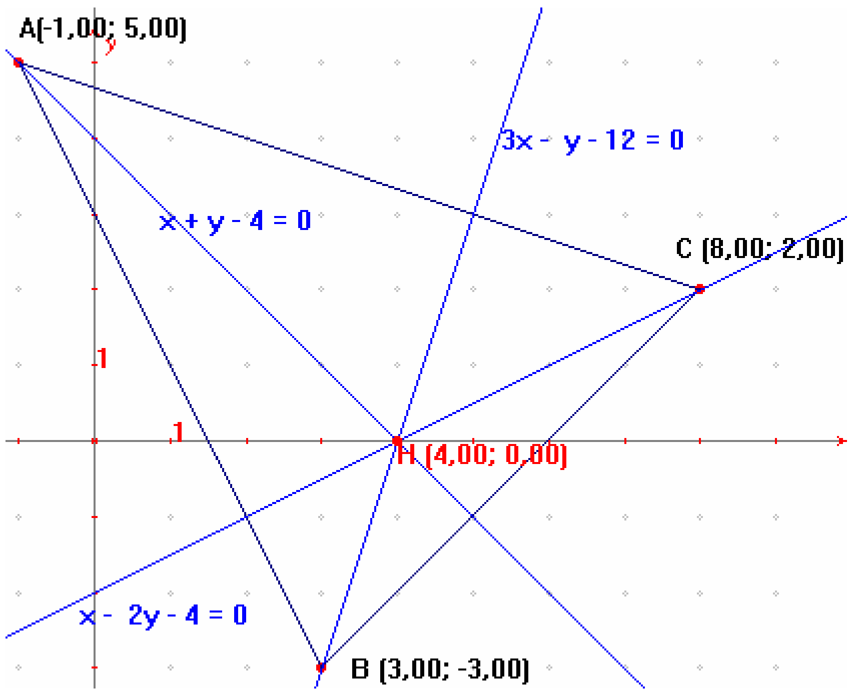
◎ Ahora lo comprobamos con Geogebra, dibuja la recta perpendicular al lado AC que pasa por B, halla su ecuación comprobando que es la calculada.

Para calcular el ortocentro resolvemos el sistema formado por dos de las alturas :

$$\left.\begin{matrix} h_1 \equiv x - 2y - 4 = 0 \\ h_2 \equiv x + y - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1} x - 2y - 4 = 0 \\ \xrightarrow{-1} -x - y + 4 = 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 4$$

Ortocentro H(4, 0).

◎ Ahora lo comprobamos con Geogebra, dibuja la intersección de las alturas, halla sus coordenadas y obtendrás:



④ **Mediatrices, circuncentro y circunferencia circunscrita**

Para hallar la ecuación de las mediatrices podemos usar dos procedimientos :

(a) La ecuación de la recta perpendicular al lado en su punto medio, para lo que necesitamos el vector normal (vector del lado) y el punto medio.

(b) Como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento que forma el lado.

Mediatriz de AB

(a)

$$\left.\begin{cases} AB(4,-8) \\ M(1,1) \end{cases}\right\} \Rightarrow 4x-8y+c=0 \xrightarrow{\text{Sust } M(1,1)} 4-8+c=0 \Rightarrow c=4 \Rightarrow 4x-8y+4=0$$

que simplificando queda $m_1 \equiv x - 2y + 1 = 0$

(b) A(-1,5), B(3, -3)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \xrightarrow{\text{Elevando al cuadrado}} (x+1)^2+(y-5)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-10y+25 = x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow -8x+16y-8=0 \Leftrightarrow x-2y+1=0$$

Mediatriz de BC

(a)

$$\left.\begin{cases} AB(5,5) \\ N(\frac{11}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}\right\} \Rightarrow 5x+5y+c=0 \xrightarrow{\text{Sust N}} \frac{55}{2}-\frac{5}{2}+c=0 \Rightarrow c=-25 \Rightarrow 5x+5y-25=0$$

que simplificando queda $m_2 \equiv x + y - 5 = 0$

Mediatriz de CA

(b) A(-1,5), C(8,2)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2} \xrightarrow{\text{Elevando al cuadrado}} (x+1)^2+(y-5)^2 = (x-8)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-10y+25 = x^2-16x+64+y^2-4y+4 \Leftrightarrow 18x-6y-42=0 \Leftrightarrow m_3 \equiv 3x-y+7=0$$

Para hallar el circuncentro resolvemos el sistema formado por dos de las ecuaciones de las mediatrices:

$$\left\{\begin{matrix} m_1 \equiv x-2y+1=0 \\ m_2 \equiv x+y-5=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{-1} -x+2y-1=0 \\ \xrightarrow{1} \quad x+y-5=0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3y-6=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=3$$

El ortocentro tiene de coordenadas O(3,2).

◎ Ahora lo comprobamos con Geogebra, dibuja las mediatrices, el circuncentro y halla sus ecuaciones y coordenadas.

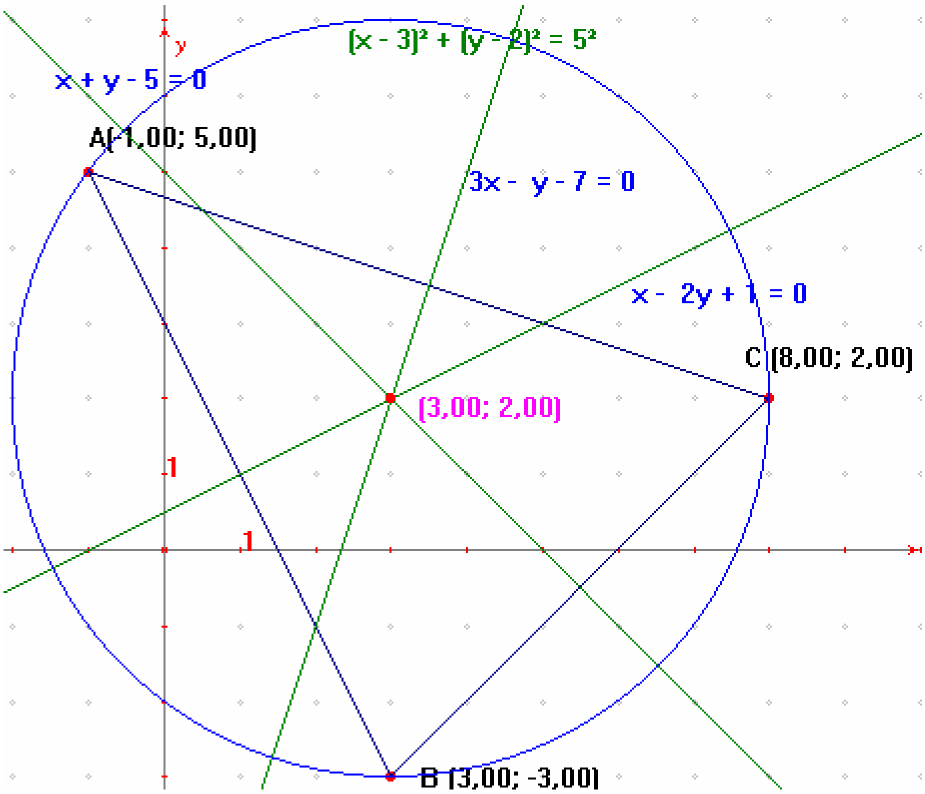
Para hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita necesitamos conocer el circuncentro O(3,2) y el radio que lo calculamos como la distancia del circuncentro a uno de los vértices :

$$r = d(O,A) = \sqrt{(-1-3)^2+(5-2)^2} = 5$$

La ecuación de la circunferencia de centro en O(3,2) y radio r = 5 es :

$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$; $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 25$, es decir : $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

◎ Con Geogebra, dibuja la circunferencia circunscrita y halla su ecuación:



⑤ **Bisectrices, incentro y circunferencia inscrita.**

Para el cálculo de las ecuaciones de las bisectrices nos basamos en su definición como lugar geométrico :

Bisectriz de un ángulo .- Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Si tomamos un punto P (x, y) genérico de la bisectriz y llamamos $r\equiv Ax + By + C = 0$ y $s\equiv A_1x+B_1y + C_1 = 0$, las rectas que forman los lados del ángulo, ha de cumplirse :

$$d\,(P,r) = d(P,s) \Leftrightarrow \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

Bisectriz en A

Es la recta (b_1) que cumple d(P,AB) = d(P,AC), luego como ya tenemos las ecuaciones de las rectas AB y AC, podemos escribir :

$$\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^1}} = \frac{|x+3y-14|}{\sqrt{1^2+3^2}} \Leftrightarrow \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+3y-14|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sqrt{2}(2x+y-3) = \pm(x+3y-14)$$

$(2\sqrt{2}\mp 1)x + (\sqrt{2}\mp 3)y + (-3\sqrt{2}\pm 14) = 0$, que nos proporciona dos ecuaciones pues hay dos bisectrices la interna y la externa.

◎ Con Geogebra, dibuja la bisectriz interna que pasa por el vértice A, halla su ecuación y decide a cuál de las dos anteriores se corresponde b_1.

Bisectriz en B

Es la recta (b_2) que cumple d(P,BA) = d(P,BC), luego como ya tenemos las ecuaciones de las rectas AB y BC, podemos escribir :

$$\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^1}} = \frac{|x-y-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-y-6|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}(2x+y-3) = \pm\sqrt{5}(x-y-6)$$

$(2\sqrt{2}\mp\sqrt{5})x + (\sqrt{2}\pm\sqrt{5})y + (-3\sqrt{2}\pm 6\sqrt{5}) = 0$, que nos proporciona dos ecuaciones pues hay dos bisectrices la interna y la externa.

◎ Con Geogebra, dibuja la bisectriz interna que pasa por el vértice B, halla su ecuación y decide a cuál de las dos anteriores se corresponde b_2.

Bisectriz en C

Es la recta (b_3) que cumple d(P,CB) = d(P,CA), luego como ya tenemos las ecuaciones de las rectas CB y AC, podemos escribir :

$$\frac{|x+3y-14|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x-y-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{|x+3y-14|}{\sqrt{10}} = \frac{|x-y-6|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x+3y-14) = \pm\sqrt{5}(x-y-6)$$

$(1\mp\sqrt{5})x + (3\pm\sqrt{5})y + (-14\pm 6\sqrt{5}) = 0$, que nos proporciona dos ecuaciones pues hay dos bisectrices la interna y la externa.

◎ Con Geogebra, dibuja la bisectriz interna que pasa por el vértice C, halla su ecuación y decide a cuál de las dos anteriores corresponde b_3.

Para calcular el incentro hallamos el punto de corte de dos la bisectrices internas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{l} b_1 \equiv (2\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}+3)y + (-3\sqrt{2}-14) = 0 \\ b_3 \equiv (1-\sqrt{5})x + (3+\sqrt{5})y + (-14+6\sqrt{5}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{14+3\sqrt{2}-(2\sqrt{2}-1)x}{\sqrt{2}+3} = \frac{14-6\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})x}{3+\sqrt{5}}$$

95,519709 – 20,045905x = 2,5760418 + 5,4561446x ; 25,50205x = 92,943667; x = 3,6445567 y sustituyendo :

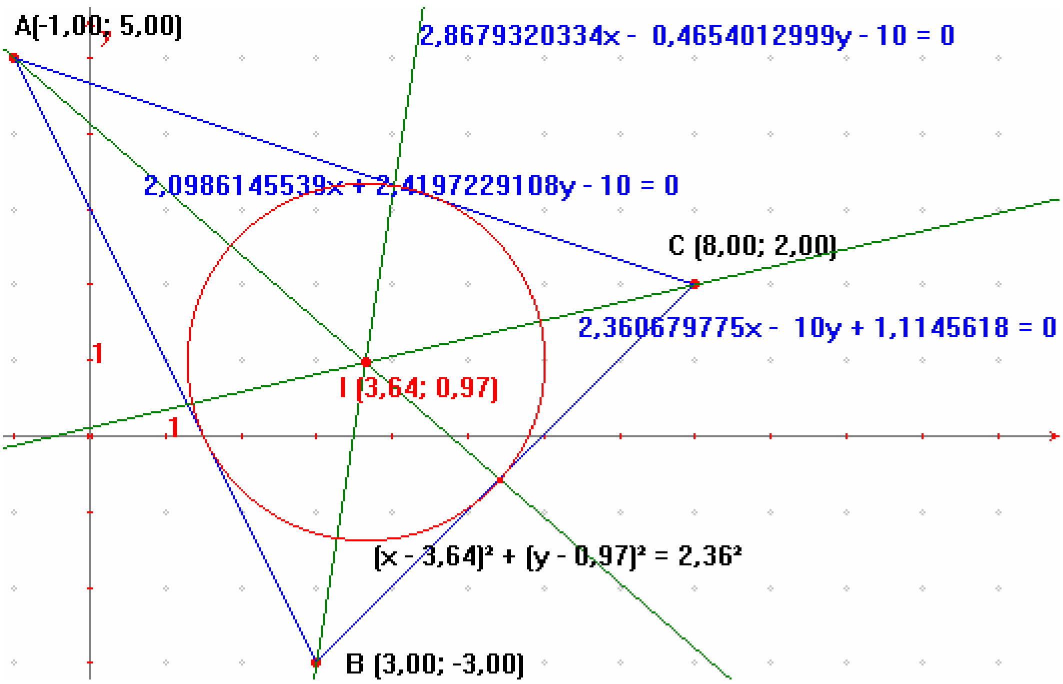
$y = \dfrac{18{,}242641 - 3{,}8284271 \cdot 3{,}6445567}{4{,}4142136} = 0{,}9717974$, luego es incentro tiene de coordenadas

I(3,6445567, 0,9717974)

El radio de la circunferencia inscrita es r =d(I, AB) = $\dfrac{|2x_I + y_I - 3|}{\sqrt{5}} \approx 2{,}35$

Y la ecuación de la circunferencia inscrita es (x – 3,64)^2 +(y – 0,97)^2 = 2,35^2.

◎ Con Geogebra, dibuja el incentro, la circunferencia inscrita y halla sus coordenadas y ecuación.



⑥ **El área del triángulo y el de los círculos inscritos y circunscritos**

Como el área de un triángulo es A = $\dfrac{b \cdot h}{2}$, si tomamos :

Base = b =d(B,C) = $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Altura = h = d(A, BC) = $\dfrac{|-1-5-6|}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.

Área del triángulo = $\dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \dfrac{12}{\sqrt{2}}}{2} = 30\ u^2$ como puede comprobarse con Geogebra fácilmente.

En cuanto a las áreas de los círculos circunscrito e inscrito como ya conocemos los radios, serían :

$A_C = \pi r_C^2 = \pi 5^2 \approx 78{,}54\ u^2$ y $A_I = \pi r_I^2 = \pi 2{,}35^2 \approx 17{,}35\ u^2$, que también son fácilmente comprobables con Geogebra.

✼✼✼❁❁✪❁❁✼✼✼

❁ Ahora practica tú lo aprendido con los triángulos :

(a) A(2,-7), B(4,-1) y C(5, -2).
(b) A(1,7), B(4, 8) y C (8, 0).

✼✼✼❁❁✪❁❁✼✼✼

🖫 Geoanatría y Geoanatrib.