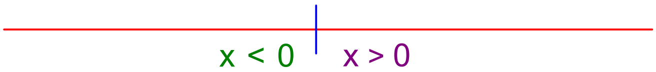
## PROBLEMAS PARA ENTRENARSE

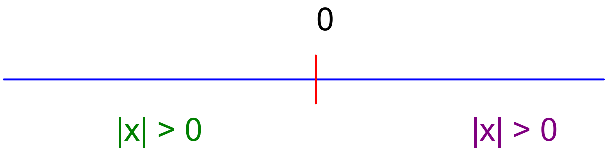
② *Indica gráficamente en la recta real el signo del valor numérico de las expresiones siguientes para los distintos valores de x.*

Siempre que hemos de estudiar signos, hay que empezar estudiando dónde se anula, ya que el cero separa los negativos de los positivos.

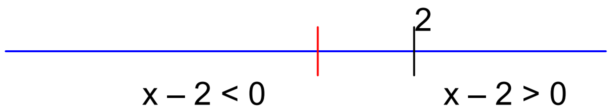
**a)** P(x) = x, x = 0




**b)** P(x) = |x|, x = 0, pero |-a| = a, luego



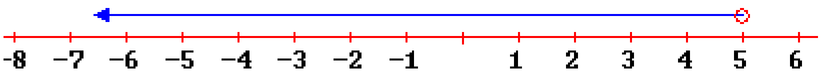

**c)** P(x) = x – 2, x – 2 = 0, x = 2, para x < 2 es negativo y para x > 2, x – 2 > 0



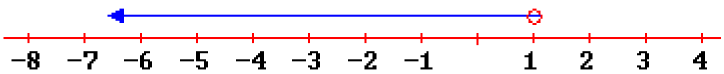

**d)** P(x) = $x^2$ + 1, que no se anula para ningún número real y es siempre positivo.

③ *Resuelve las siguientes inecuaciones:*

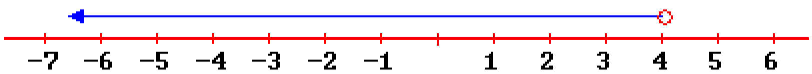
**a)** 6x – 3 < 4x + 7; 6x – 4x < 7 + 3; 2x < 10; x <10/2; x < 5, en forma de intervalo (- ∞, 5)




**b)** 3x – 1 < - 2x + 4; 3x + 2x < 4 + 1; 5x < 5; x < 1, (- ∞, 1), y en forma gráfica:

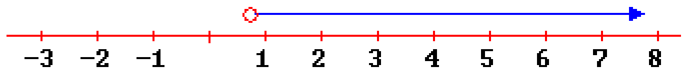



**c)** 2x + 9 > 3x + 5; 9 – 5 > 3x – 2x; 4 > x; (- ∞, 4), y en forma gráfica:

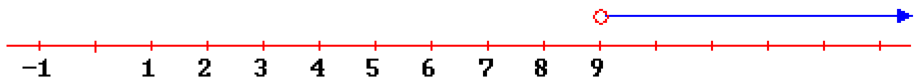


*④ Resuelve las siguientes inecuaciones quitando previamente los denominadores por el mínimo común múltiplo de los mismos:*

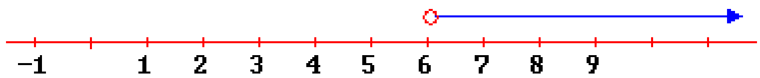
**a)** $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$; m.c.m.(3,8,45) = $2^2\cdot3^2\cdot5$ = 360, 120x – 45(2x+1) – 8(8- 10x) > 0 ⇨ 120x – 90x – 45 – 64 + 80x > 0, ⇨ 120x – 90x + 80x > 45 + 64 ⇨ 110x > 109 ⇨ x > 109/110, el intervalo ( 109/110, + ∞ ), y la solución gráfica:




**b)** $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$ ; m.c.m.(2,4) = 4⇨ 2(x – 1) – 4x < 1 – x – 12; ⇨ 2x – 2 – 4x < 1 – x – 12; ⇨ 2x – 4x + x < 1 – 12 + 2; ⇨ - x < - 9; ⇨ x > 9; (9, + ∞ ), y la solución gráfica:



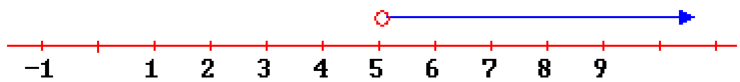

**c)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$; m.c.m.(2,7) = 14, ⇨ 7x + 2(x + 1) – 14x + 28 < 0, ⇨ 7x + 2x + 2 – 14x + 28 < 0, ⇨ 7x + 2x – 14x < -2 – 28; ⇨ - 5x < - 30, ⇨ 5x > 30, ⇨ x > 6, ( 6, + ∞ ), y la solución gráfica:



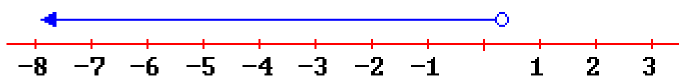

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑥ Resuelve las siguientes inecuaciones quitando previamente los denominadores por cualquier método:*

**a)** $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$; m.c.m.(2, 3 y 6) = 6, ⇨ 2x + 3x > 30 – x; ⇨ 2x + 3x + x > 30; ⇨ 6x > 30, ⇨ x > 5, el intervalo (5, + ∞ ), y la solución gráfica:

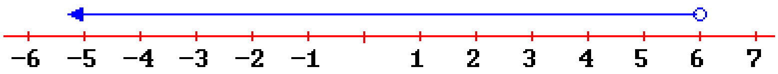



**b)** $\frac{2x-4}{3}+\frac{3x+1}{3}<\frac{2x-5}{12}$; ⇨4(2x – 4) + 4(3x +1)< 2x – 5, ⇨x – 16 + 12x + 4 < 2x – 5,
mcm(3, 12) = 12 ⇨ 8x + 12x – 2x < 16 – 4 – 5, ⇨ 18x < 7, ⇨ x < 7/18, ( - ∞, 7/18) y en forma gráfica :



**c)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7} > x-2$; ➠ 7x + 2(x +1) > 14(x – 2) ➠ 7x + 2x + 2 > 14x – 28 ➠ 2 + 28 > 14x -7x – 2x ➠ 30 > 5x ➠ x < 6 ; (- ∞, 6 ) y la solución gráfica:

mcm(2,7)= 14

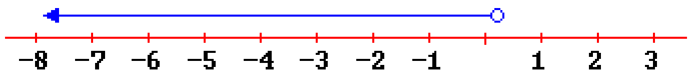


✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑦ *Resuelve las siguientes inecuaciones:*

**a)** $4x-\frac{3-2x}{4} < \frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$ ➲ 48x – 3(3 – 2x) < 4(3x – 1) + 37 ➲ 48x – 9 + 6x < 12x – 4 ➲ 48x + 6x – 12x < - 4 + 9 ➲ 42x < 5 ➲ x < 5/42; o sea el intervalo (- ∞, 5/42 ) y la solución gráfica:

mcm(4,3,12) = 12

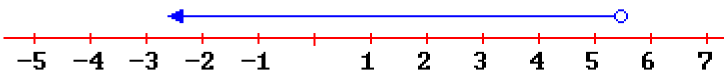


**b)** $\frac{2x+3}{4} > \frac{x+1}{2}+3$ ➲ 2x + 3 > 2(x +1) + 12➲2x + 3 > 2x + 2 + 12➲2x – 2x > 2 + 12 – 3 ➲ 0 > 11, como 0 < 11, no tiene solución.

mcm(2,4) = 4

**c)** $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2} > \frac{5x-36}{4}-1$➲4(x –2) – 6(12 – x) > 3(5x – 36)➲ 4x – 8 – 72 + 6x > 15x - 108➲- 8 – 72 + 108 > 15x – 4x – 6x➲ 28 > 5x  x < 28/5 que expresada en forma de intervalo es (- ∞, 28/5 ) y la solución gráfica:

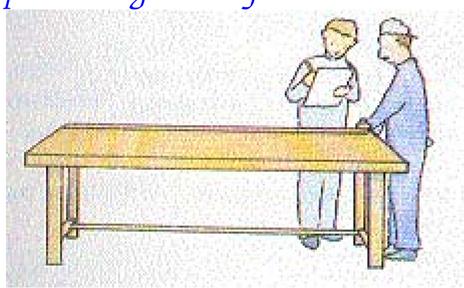
mcm(2,3,4) = $2^2$·3 = 12



✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

## PROBLEMAS PARA APLICAR

⑨ *Las dimensiones, en centímetros, de una mesa rectangular se han medido con un error menor que 1 cm. Los valores para las longitudes a y b son:*



$130 \le a \le 131$ y $65 \le b \le 66$

**a)** *¿Entre qué números está comprendido el perímetro?*

**b)** *¿Entre qué números está comprendida el área?*

**a)** $390 = 2 \cdot (130 + 65) \leqslant$ *Perímetro* $= 2a + 2b \leq 394 = 2(131 + 66)$.

**b)** $130 \cdot 65 = 8\,450 \leq$ Área $= a \cdot b \leq 8\,646 = 131 \cdot 66$ .

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑩ ¿Qué número natural se puede añadir al numerador y denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ si se quiere que la nueva fracción este comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.*

Llamamos a ese número natural = x

$$\frac{1}{2} < \frac{2+x}{5+x} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{2+x}{5+x} \Leftrightarrow 5+x < 4+2x \Leftrightarrow 5-4 < 2x-x \Leftrightarrow x > 1 \\ \frac{2+x}{5+x} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 8+4x < 15+3x \Leftrightarrow 4x-3x < 15-8 \Leftrightarrow x < 7 \end{cases}$$

el número buscado debe cumplir $1 < x < 7$ y $x \in$ N, luego los posibles valores son 2, 3, 4, 5 y 6.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑪ Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 100 km/h y 150km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de tres horas?*

$e = v \cdot t$ , que oscila entre 100 km/h $\cdot$ 3 h $\leq e \leq$ 150 km/h $\cdot$ 3 h es decir el espacio estará comprendido entre 300 km $\leq e \leq$ 450 km.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑫ Un alumno sale de casa con 500 PTA. Paga de transporte 80 PTA a la hora del bocadillo gasta al menos 200 PTA. Halla el máximo y mínimo del dinero que le puede quedar.*

Sale con 500, como paga 80 de transporte le quedan 500 – 80 = 420. Como en el bocadillo se gasta al menos 200, si llamamos x la cantidad gastada en el bocadillo, será $200 < x < 420$, luego le quedarán $420 - 200 < 420 - x < 420 - 420$ ; $220 <$ queda $< 0$, entre 0 y 220 pesetas.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑬ Un padre y su hijo se llevan 22 años. Determina en qué período de sus vidas la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo.*

Edad del hijo = x
Edad del padre = x + 22
Edad del padre > 6 + doble de la edad del hijo; $x + 22 > 6 + 2x$; $2x - x < 22 - 6$; $x < 16$, luego hasta que el hijo tenga 16 años y el padre 38 sus edades cumplen el enunciado.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*⑭ ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su duplo en más de 20?*

Números = x

Triple > duplo + 20 , 3x > 2x + 20; 3x – 2x > 20; x > 20, todos los números mayores que 20.

✻✻✻❁❁❁❁✪❁❁❁❁✻✻✻

*⑮ Cuatro vacas tudancas y tres suizas dan tanta leche en cinco días como tres tudancas y cinco suizas en cuatro días. ¿Qué clase de vaca produce más leche, la tudanca o la suiza?*

Litros de leche de las vacas tudacas por día = x
Litros de leche de las vacas suizas por día = y

(4x + 3y )5 = (3x + 5y)4 ; 20x + 15y = 12x + 20y ; 20x – 12x = 20y – 15y ; 8x = 5y ; y = 8x/5, es decir las vacas suizas, dan más leche que las tudacas, los 8/5 concretamente.

✻✻✻❁❁❁❁✪❁❁❁❁✻✻✻

*⑯ Si Tomás va a doblarle la edad a Gustavo cuando Jaime tenga la misma edad que Tomás tiene ahora, ¿quién es el menor, el mediano y el mayor?*

Es evidente que la edad de Tomás es mayor que la de Jaime y la de Gustavo, pero ¿que relación hay entre las edades de Jaime y Gustavo?, hagamos una tabla:

| Edades | Actuales | Dentro de x – y |
|---|---|---|
| Tomás | x | x + x – y = 2x - y |
| Jaime | y | y + x – y = x |
| Gustavo | z | x – y/2 (Mitad de Tomás) |

Como 2x – y > x > x – y/2, deducimos que edad de Tomás > Edad de Jaime > Edad de Gustavo.

✻✻✻❁❁❁❁✪❁❁❁❁✻✻✻

*⑰ Alberto, Ricardo, Jaime y Tomás han contado las truchas que han pescado durante el día. El resultado es el siguiente:*

*Tomás ha cogido más que Jaime.*
*Alberto y Ricardo han pescado entre los dos lo mismo que Jaime y Tomás.*
*Alberto y Tomás no han cogido tanto como Ricardo y Jaime.*
*Ordena a los pescadores (de menor a mayor) según el número de truchas capturadas.*

Tomás > Alberto > Ricardo > Jaime.

✻✻✻❁❁❁❁✪❁❁❁❁✻✻✻

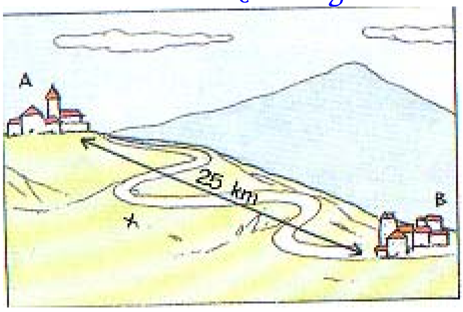
⑱ *En la sociedad hindú existe el siguiente aforismo:*
*«Para que una relación sentimental sea satisfactoria, la edad de ella no debe sobrepasar la mitad más siete años la edad de él», Una pareja desea saber cuál es el período de tiempo más favorable para formalizar definitivamente sus relaciones sentimentales según este aforismo, El caballero hindú tiene ocho años más que la dama. ¿Les puedes ayudar?*

x = edad del hombre.
y = edad de la mujer.

$\left\{\begin{matrix} y \le \frac{x}{2} + 7 \\ x = y + 8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \le \frac{x}{2} + 7 + 8 \Leftrightarrow 2x \le x + 30 \Leftrightarrow x \le 30$, hasta los 30 años y por tanto y ≤ 22, la mujer hasta los 22.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑲ *Entre dos pueblos A y B existe una distancia en línea recta de 25 km. Se quiere construir una carretera que una a ambos. Si llamamos x a la longitud de la carretera, ¿qué inecuación se verifica? ¿Qué valores puede tomar?*




Ha de ser x ≥ 25. Cualesquiera a partir de 25 km.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑳ *Si a los dos miembros de una inecuación se los multiplica por un número negativo no nulo, ¿se puede afirmar que la inecuación resultante es equivalente a la primera? Si la respuesta es negativa, indica lo que hay que hacer.*

No, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.
Por ejemplo, 5 > 3, pero 5 · (-2) < 3· (-2), -10 < - 6.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

㉑ *Razona las respuestas a las siguientes preguntas:*

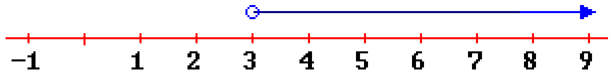
**a)** *¿Qué números verifican la inecuación 0 . x < 0?*
**b)** *¿y la inecuación 0 . x < - 2?*

**a)** Ninguno ya que cualquier número por cero es cero, no menor que cero.

**b)** Tampoco ninguna ya que todo número por cero es cero, que no es menor que –2.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

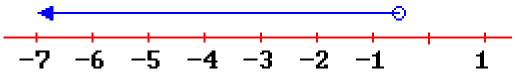
**22** *Representa gráficamente en la recta real las soluciones de la inecuación $x > 3$. Todos los números que no verifican esta inecuación verifican otra. ¿Cuál es?*




Los números que no son mayores que 3 son menores o iguales que 3, $x \leq 3$.

**23** *¿La inecuación $2x + 1 < 0$ tiene más o menos soluciones que $12x + 11 < 0$? Razona tu respuesta dibujando los primeros miembros de las inecuaciones.*

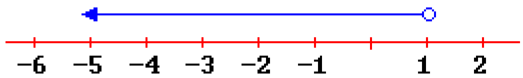
$2x + 1 < 0$, $2x < -1$, $x < -1/2$



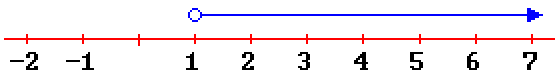

Como el valor absoluto de una expresión es siempre > 0, la segunda inecuación $|2x + 1| < 0$, no tiene solución pues no podrá ser negativa para ningún valor de x.

**24** *Te dan la inecuación $-x + 1 > 0$. ¿Es equivalente a la inecuación $x - 1 > 0$ que se obtiene al multiplicar los dos miembros por $-1$?*

Si $-x + 1 > 0$; $x < 1$.



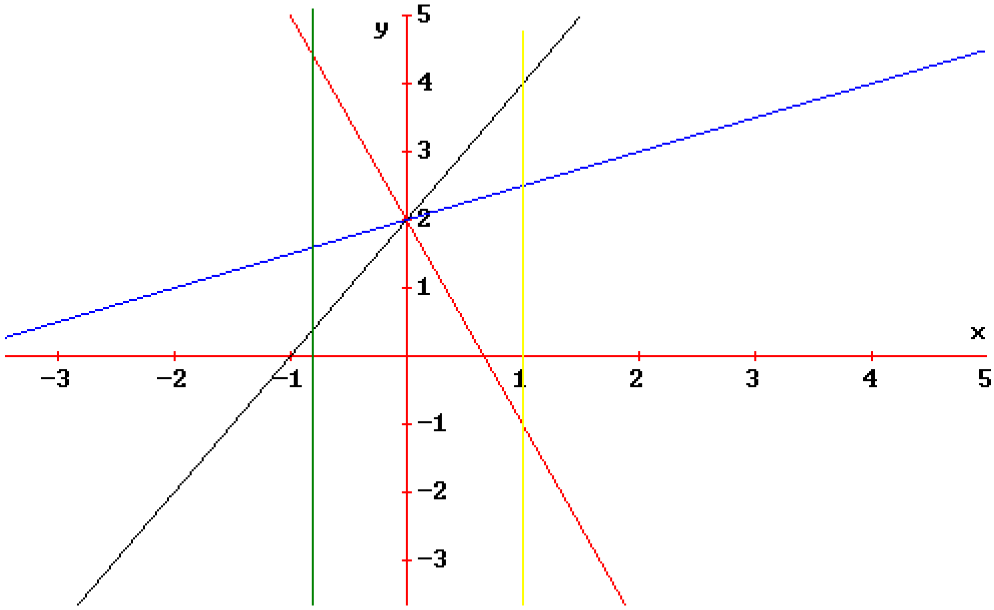

Si $x - 1 > 0$, $x > 1$.




No son equivalentes.

Al multiplicar la segunda por $-1$ tenemos: $-1(x - 1) < 0$; $-x + 1 < 0$, que es menor que cero en lugar de mayor.

*㉕ En la siguiente figura se dan tres rectas. Ordénalas de menor a mayor según los valores de y para los distintos valores de x. ¿Son iguales para algún valor?*

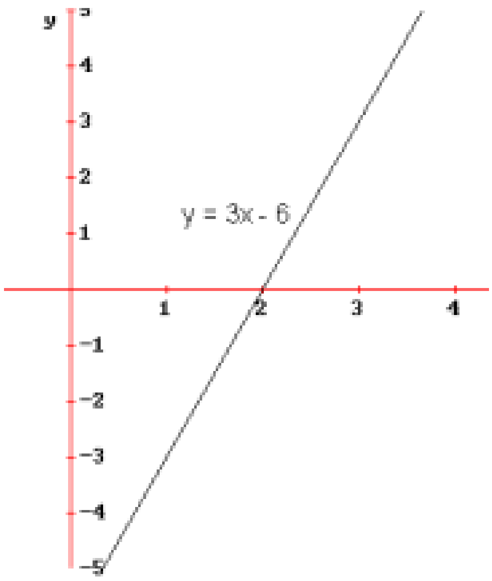



Vemos que valores x > 0, el orden es 2x + 2 > 0,5x + 2 > -3x +2 y para valores x < 0, el orden es el inverso 2x + 2 < 0,5x + 2 < -3x + 2.

Son en iguales en el punto común, para x = 0, que corresponde a un valor y = 2.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*㉖ La solución de una ecuación de primer grado ax + b = 0, a > 0, divide a la recta real en dos partes. ¿Cuál es el signo que toma en cada uno de ellos la ordenada de la recta P(x) = ax + b? Aplica el resultado anterior a la ecuación dada por 3x - 6 = 0*




ax + b = 0, x = -b/a. Para valores x > - b/a la ordenada es positiva y para x < - b/a la ordenada es negativa.

En la representación de la recta y = 3x – 6, puede apreciarse que valores x > 2 la ordenada es positiva ( recta por encima del eje horizontal) y para x < 2, ordenada negativa:

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

*㉗ La existencia de valores de x para los que la expresión P(x) =* $\sqrt{X-1}$ *tiene significado matemático, ¿a qué inecuación da lugar? ¿Para qué valores es cierta?*

$P(x) = \sqrt{x-1}$, da lugar a la inecuación x –1 ≥ 0 ya que una raíz cuadrada sólo tiene valor real cuando el radicando es mayor o igual a cero. Es cierta para $x \geq 1$.

✽✽✽❁❁❁✪❁❁❁✽✽✽

*㉘ Para resolver la inecuación* $\frac{3}{x} < 2$ *un alumno procede asi:*

*Multiplica por x:* $3 < 2x$

*Divide por 2:* $x > \frac{3}{2}$

*Este razonamiento es falso. ¿Por qué?*

Porque el primer paso no es correcto, ya que al multiplicar por x podemos estar multiplicando por cero, y ambos miembros de una inecuación pueden multiplicarse por un mismo número siempre que no sea cero.

✽✽✽❁❁❁✪❁❁❁✽✽✽