EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

① *Escribe con una incógnita los siguientes datos:*

a) Un número y su cuadrado.
b) Un número y su raíz cuadrada.
c) Los cuadrados de dos números consecutivos.
d) Los cuadrados de dos números cuya suma es 10.

a) Número = n, su cuadrado = n^2.

b) Número = n, su raíz cuadrada = $\sqrt{n}$.

c) Cuadrado de un número = n^2, cuadrado de su consecutivo : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

d) Primer número n, su cuadrado = n^2. Segundo número = 10 – n, su cuadrado = $(10 - n)^2 = 100 - 20n + n^2$.

② *Escribe con una incógnita los siguientes datos:*

a) Los cuadrados de dos números cuya diferencia es 10.
b) Los cuadrados de dos números cuyo cociente es 4.
c) Los cuadrados de dos números proporcionales a 3 y 4.
d) Los cuadrados de tres números proporcionales a 3, 4 Y 5.

a) Primer número n, su cuadrado = n^2. Segundo número = 10 + n, su cuadrado = $(10 + n)^2 = 100 + 20n + n^2$.

b) $(4n)^2$ y n^2.

c) $(3n)^2$ y $(4n)^2$.

d) $(3n)^2$, $(4n)^2$ y $(5n)^2$.

④ *Traduce a ecuaciones con una incógnita los siguientes enunciados:*
a) El producto de dos, números pares consecutivos es 2024.
b) Un número y su cuadrado suman 30.
c) Un número y su raíz cuadrada suman 42.

a) Un número = x y para que sea par 2x, su consecutivo es 2x +2, luego:

$$2x \cdot (2x + 2) = 2\,024.$$

b) $x + x^2 = 30$.

c) $x + \sqrt{x} = 42$.

❺ *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $(x - 1)(x - 2) = 0$
b) $(x - 5)(x + 11) = 0$
c) $(2x + 6)x = 0$
d) $(2x - 5)(7x - 3) = 0$

a) $(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{Bmatrix}$

b) $(x-5)(x+11) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+11=0 \Rightarrow x=-11 \end{Bmatrix}$

c) $(2x+6)x = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x+6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \\ x=0 \Rightarrow x=0 \end{Bmatrix}$

d) $(2x-5)(7x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ 7x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{7} \end{Bmatrix}$

❻ *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

b) $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

c) $x^2 - x = 0;\ x(x-1) = 0 \begin{Bmatrix} x=0 \\ x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \end{Bmatrix}$

d) $-x^2 + 9x = 0;\ x(-x+9) = 0 \begin{Bmatrix} x=0 \\ -x+9=0 \Leftrightarrow x=9 \end{Bmatrix}$

❼ *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $x^2 - 6x = 0$
b) $x^2 - 25 = 0$

c) $3x^2 - 48 = 0$
d) $1 - 4x^2 = -8$

a) Ecuación de 2º grado incompleta (falta el término independiente) que resolvemos extrayendo factores comunes e igualando cada factor a cero :

$$x^2 - 6x = 0; x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ x - 6 = 0; x = 6 \end{Bmatrix}$$

b) También es incompleta pero falta el término de grado uno, para resolverla :

$$x^2 - 25 = 0; x^2 = 25; x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

c) $3x^2 - 48 = 0; 3x^2 = 48; x^2 = \dfrac{48}{3} = 16; x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

d) $1 - 4x^2 = -8; 1 + 8 = 4x^2; 4x^2 = 9; x^2 = \dfrac{9}{4}; x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$

⑧ *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $x^2 - 7x - 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 1(-18)}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{7 \pm 11}{2} = \begin{Bmatrix} 9 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Se puede también tener en cuenta que la ecuación está en forma canónica ($x^2 - sx + p = 0$) y buscar dos números que sumados den 7 y multiplicados –18 : $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, ya que $s = x_1 + x_2 = 9 - 2 = 7$ y $p = x_1 \cdot x_2 = 9 \cdot (-2) = -18$.

b)

$$3x^2 + 15x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot 3\cdot 18}}{2\cdot 3} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 216}}{6} = \frac{-15 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{-15 \pm 3}{6} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Podríamos haber resuelto la ecuación que se obtiene al dividir por 3 : $x^2 + 5x + 6 = 0$, que es equivalente. Luego s = -5 y p = 6, que lo cumplen las soluciones halladas.

c) $7x^2 + 21x - 28 = 0 \xrightarrow{\text{divi dim os por 7}} x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1(-4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

d)

$$-x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-7)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \Re$$

⑨ *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a)

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

b) $x^2 - 26x + 25 = 0$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1} = \frac{26 \pm \sqrt{676-100}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} 25 \\ 1 \end{cases}$$

c) $4x^2 - 17x + 4 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

d) $4x^2 - 37x + 9 = 0$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4} = \frac{37 \pm \sqrt{1369-144}}{8} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8} = \begin{cases} 9 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

e) $x^2 - 25x + 144 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 1\cdot 144}}{2\cdot 1} = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

⑩ *Halla los vértices de las siguientes parábolas:*

Para hallar el vértice disponemos de dos procedimientos :

1) Hallar los puntos de corte con el eje horizontal (resolviendo la ecuación de 2º grado) y la $x_{\text{vértice}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, media aritmética de ambas soluciones, $y_v = f(x_v)$. Este procedimiento es menos general ya que no es aplicable a parábolas que no corten al eje de abscisas.

2) El procedimiento más general para hallar las coordenadas del vértice $V(x_v, y_v)$ es aplicar la fórmula (estudia y comprende la demostración) :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a}; y_V = f(x_V)$$

a) $P(x) = x^2 - 6x + 9;\ x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3; y_V = P(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 9 = 0 \Rightarrow V(3,0)$

b) $P(x) = x^2 - 4x + 4;\ x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2; y_V = P(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow V(2,0)$.

c) $P(x) = 2x^2 + 8x + 9;\ x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot 2} = -2; y_V = P(-2) = 2(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 9 = 1 \Rightarrow V(-2,1)$

d) $P(x) = 3x^2 + 12x + 5;$

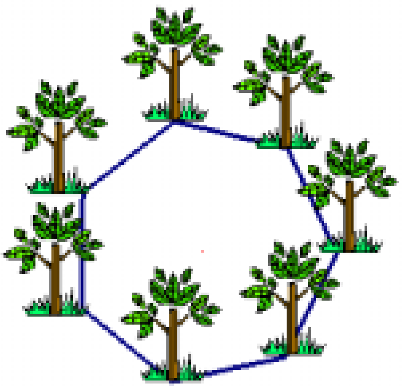
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot 3} = -\frac{12}{6} = -2; y_V = P(-2) = 3(-2)^2 + 12\cdot(-2) + 5 = -7 \Rightarrow V(-2,-7)$$

e) $P(x) = x^2 + 6x + 3;$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot 1} = -3; y_V = P(-3) = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 3 = -6 \Rightarrow V(-3,-6)$$

PROBLEMAS PARA APLICAR

11 *En un monte hay un conjunto de puestos de observación para prevenir los incendios. Cada uno de ellos está unido a los restantes por un sendero. El número de senderos es 21. ¿Podrías decirnos cuántos puestos de observación hay?*



Se trata de hallar el número de lados (n) de un polígono conocido el número de sus diagonales (d = 21) :

$$d = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0; n = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -6 \end{Bmatrix},$$

como el número de lado no puede ser negativo el número de lados, y por tanto de vértices (puestos de observación) es de 7.

12 *Un polígono regular tiene 170 diagonales (tienen que ser 171 diagonales). Halla el número de lados de dicho polígono.*

Como el ejercicio anterior se reduce a resolver una ecuación de 2º grado:

$$d = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 171 \Leftrightarrow n^2 - n - 342 = 0; n = \frac{1 \pm \sqrt{1+1360}}{2} = \frac{1 \pm 37}{2} = \begin{Bmatrix} 19 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

⓮ *Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.*

Edad actual de Pedro = x.
Edad de Pedro dentro de 11 años = x + 11.
Edad de Pedro hace 13 años = x – 13.

Primero lo expresamos con palabras y después las sustituimos por símbolos.

Edad de Pedro dentro de 11 = mitad del cuadrado de la que tenía hace 13 años.

Edad de Pedro dentro de 11 = (cuadrado de la que tenía hace 13 años)/2.

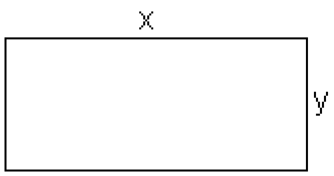
$$x + 11 = \frac{(x-13)^2}{2} \Leftrightarrow 2x + 22 = x^2 - 26x + 169 \Leftrightarrow x^2 - 28x + 147 = 0$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4\cdot 147}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{28 \pm 14}{2} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

No puede tener 7 años pues hace 13 no habría nacido, luego la edad actual de Pedro son 21 años, comprobémoslo :

Dentro de 11 años tendrá = 21 + 11 = 32 años.
Hace 13 tenía = 21 – 13 = 8 años.
El cuadrado de 8 = 64 es el doble de 32.

⓯ *Una habitación rectangular tiene una superficie de 28 m² y su perímetro tiene una longitud de 22 m. Halla las dimensiones de la habitación.*



Area = 28 m^2 = largo x ancho = x · y
Perímetro = 22 m = 2x + 2y, o sea, simplificando, x + y = 11.
Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de 2º grado, que despejando de la segunda la y sustituyendo en la primera se tiene una ecuación de 2º grado :

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y = 28 \\ x + y = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\cdot y = 28 \\ y = 11 - x \end{array}\right\} \Leftrightarrow x(11-x) = 28 \Leftrightarrow 11x - x^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Estas son las dimensiones pues cuando x = 7, y = 11 – 7 = 4 y viceversa.

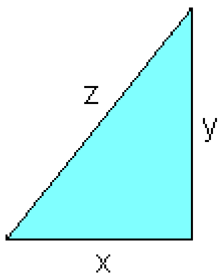
16 *Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.*

Ejercicio similar al anterior :

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y=110\\ x\cdot y=750\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=55\\ x\cdot y=750\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}y=55-x\\ x\cdot y=750\end{array}\right\}\Leftrightarrow x(55-x)=750;55x-x^2=750\Leftrightarrow x^2-55x+750=0$$

$$x=\frac{55\pm\sqrt{55^2-4\cdot 750}}{2}=\frac{55\pm 5}{2}=\begin{Bmatrix}30\\25\end{Bmatrix}$$, que son las dimensiones de la finca.

17 *Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m².*



Disponemos de $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}\\ \frac{x\cdot y}{2}=24\end{array}\right\}$ además de la ecuación (que no necesitamos) que obtenemos al aplicar el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$

Vamos a utilizar la primera igualdad y el área :

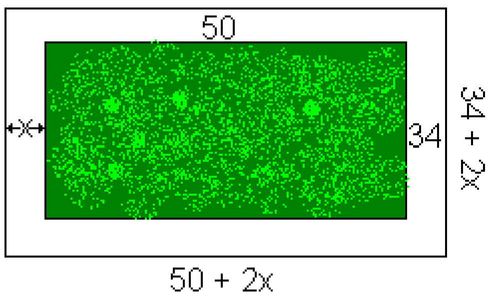
$$\left.\begin{array}{r}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\\ x\cdot y=48\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}4x=3y\\ x\cdot y=48\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}y=\frac{4}{3}x\\ x\cdot y=48\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{3}x\right)=48\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}\cdot 48\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x=\pm 6$$

Si x = 6 (-6 no tiene sentido), $y=\frac{4}{3}x=\frac{4}{3}6=8;\frac{x}{3}=\frac{z}{5}\Rightarrow z=\frac{5}{3}x=\frac{5}{3}6=10$.

Los lados miden x = 6 m, y = 8 m y z = 10 m, que cumplen las condiciones del enunciado y el teorema de Pitágoras $6^2 + 8^2 = 10^2$.

18 *Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de anchura uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².*

El área del camino que rodea al jardín ha de ser = 540 m², y lo obtenemos por diferencia entre el área del rectángulo grande y la del jardín :



Área del camino = área total – área del jardín.

540 = (50 + 2x)(34 + 2x) – 50 · 34;
540 = 50 · 34 + 100x + 68x + $4x^2$ – 50 · 34 ;
$4x^2$ + 168x – 540 = 0; x^2 + 42x – 135 = 0, ecuación de 2º grado que resolvemos :

$$x=\frac{-42\pm\sqrt{42^2+4\cdot 135}}{2}=\frac{-42\pm 48}{2}=\begin{Bmatrix}3\\-45\end{Bmatrix}$$, como una longitud negativa no tiene sentido físico, el camino tiene una anchura de 3 m.

Comprobación

El área total es = (50 + 6)(34 + 6) = 56 · 40 = 2 240 m^2.
El área del jardín es = 50 · 34 = 1 700 m^2.
El área del camino es la diferencia = 2 240 m^2 – 1 700 m^2 = 540 m^2

✲✲✲❁❁⊙❁❁✲✲✲

20 *Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.*

Aplicamos el teorema de Pitágoras : $a^2 = b^2 + c^2$

$(2x + 4)^2 = (2x + 2)^2 + (2x)^2$; $4x^2 + 16x + 16 = 4x^2 + 8x + 4 + 4x^2$; $4x^2 – 8x – 12 = 0$;

$x^2 – 2x – 3 = 0$, ecuación de 2º grado que resolvemos :

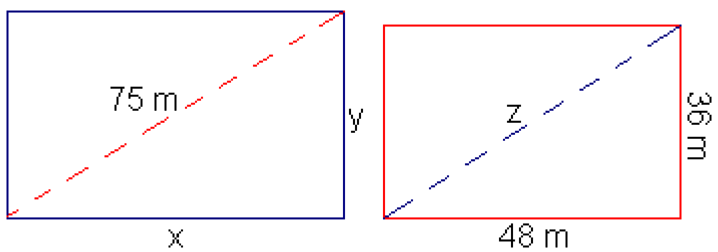
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4{\cdot}3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Los lados miden: 2 · 3 + 4 = **10**, 2 · 3 + 2 = **8** y 2 ·3 = **6**.

✲✲✲❁❁⊙❁❁✲✲✲

21 *Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m, respectivamente.*

Teniendo en cuenta que el tema trata de las ecuaciones de 2º grado este problema está pensado para resolver un sistema de dos ecuaciones de 2 º grado :



$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 75^2 \\ \dfrac{x}{48} = \dfrac{y}{36} \end{array}\right\}$$

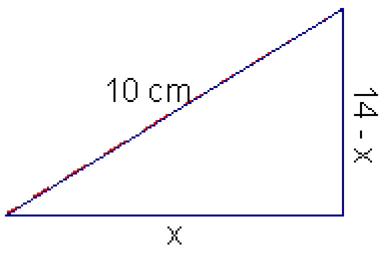
la primera como aplicación del teorema de Pitágoras al primer triángulo rectángulo y la segunda teniendo en cuenta que al ser los rectángulos semejantes, tendrán lados proporcionales, pero no es necesario si hallamos el valor de z, mediante el teorema de Pitágoras y luego aplicamos la proporcionalidad de lados semejantes :

$$z = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60 \Rightarrow \frac{x}{48} = \frac{y}{36} = \frac{75}{z} \Leftrightarrow \frac{x}{48} = \frac{75}{60} \Leftrightarrow x = \frac{75{\cdot}48}{60} = 60;\ \frac{y}{36} = \frac{75}{60} \Leftrightarrow y = \frac{75{\cdot}36}{60} = 45$$

Las dimensiones son x = 60 m e y = 45 m.

✲✲✲❁❁⊙❁❁✲✲✲

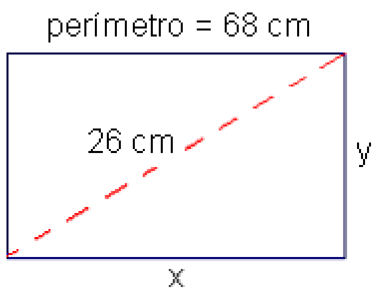
22 *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y la suma de los catetos 14 cm. Halla el valor de los catetos.*



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + (14 - x)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100,$$
$$2x^2 - 28x + 96 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0,$$
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 48}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \end{Bmatrix},$$
que son las longitudes de los catetos, ya que si su uno mide x = 8 cm, el otro es 14 – 8 = 6 cm y viceversa, si x = 6 cm, el otro es 14 – 6 = 8 cm.

23 *La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y el perímetro 68 cm. Halla los lados del rectángulo.*



Utilizando la fórmula del perímetro y el teorema de Pitágoras a la mitad del cuadrado, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de 2º grado :

$$\begin{Bmatrix} 2x + 2y = 68 \\ x^2 + y^2 = 26^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x + y = 34 \\ x^2 + y^2 = 676 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 34 - x \\ x^2 + y^2 = 676 \end{Bmatrix}.$$

Queda una ecuación de 2º grado :

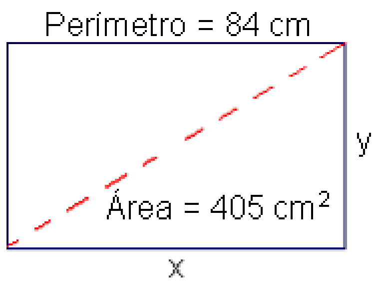
$$x^2 + (34 - x)^2 = 676 \Leftrightarrow x^2 + 1156 - 68x + x^2 = 676 \Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 480 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 240 = 0$$

que resolvemos:

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4\cdot 240}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 10 \end{Bmatrix},$$
que nos da las longitudes de los lados del rectángulo, ya que si x = 24 cm, y = 34 – 24 = 10 cm, y si x = 10 cm, y = 34 – 10 = 24 cm.

24 *Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 ,cm2 y su perímetro 84 cm.*

De nuevo disponemos de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de 2º grado, al aplicar las fórmulas del área y el perímetro:



$$\begin{Bmatrix} \text{Perímetro} = 2x + 2y = 84 \\ \text{Área} = x\cdot y = 405 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x + y = 42 \\ xy = 405 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 42 - x \\ xy = 405 \end{Bmatrix}$$

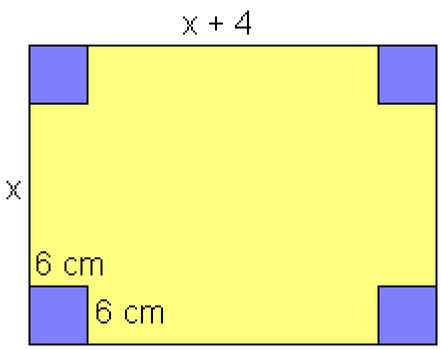
y sustituyendo la primera en la segunda :

$x(42 - x) = 405$; $42x - x^2 = 405$, $x^2 - 42x + 405 = 0$, que resolvemos :

$x = \frac{42 \pm \sqrt{(-42)^2 - 4 \cdot 405}}{2} = \frac{42 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{42 \pm 12}{2} = \begin{cases} 27 \\ 15 \end{cases}$, que nos da las longitudes de los lados del rectángulo, ya que si x = 27 cm, y = 42 – 27 = 15 cm, y si x = 15 cm, y = 42 – 15 = 27 cm.

❋❋❋❁❁✺❁❁❋❋❋

25 *Una pieza rectangular de cinc es 4 cm más larga que ancha, Con ella se construye una caja de 840 cm3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes, Halla las dimensiones de la caja.*

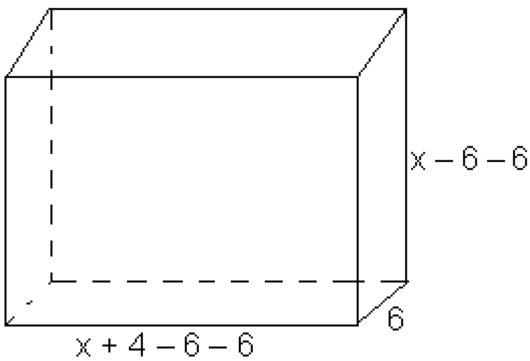


El volumen del paralelepípedo que se forma es:

V = área de la base · altura = largo · ancho · alto.

Los lados son (ver dibujo de más abajo):

Largo = x + 4 – 6 – 6 = x – 8.
Ancho = x – 6 – 6 = x – 12.
Alto = 6.
Luego la ecuación queda : (x – 8)(x – 12) ·6 = 840, que resolvemos :



$x^2 - 20x + 96 = 140$; $x^2 - 20x - 44 = 0$, que resolvemos :

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 4 \cdot 44}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{20 \pm 24}{2} = \begin{cases} 22 \\ -2 \end{cases}$$

Las dimensiones de la caja son:

Largo = 22 – 8 = 14 cm
Ancho = 22 – 12 = 10 cm
Alto = 6 cm.
Ya que la solución negativa no es válida.

❋❋❋❁❁✺❁❁❋❋❋

26 *En cada una de las esquinas de una plancha de cartón de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 cm de lado y entonces, doblando y pegando, se forma una caja de 1 280 cm3, Halla el lado de la hoja inicial.*

Es similar al anterior, sólo cambian los datos:
Volumen = a · b · c = 1280 cm^3; (x – 10)(x –10)·5 = 1 280; $(x – 10)^2$ = 256; $x - 10 = \sqrt{256} = 16$; Luego x = 26 cm.

❋❋❋❁❁✺❁❁❋❋❋

㉗ *Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10m y su capacidad 4000 m3, Halla el lado de la base sabiendo que es cuadrada.*

$V = 10x^2 = 4\,000\ m^3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4000}{10} = 400 \Rightarrow x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$. El lado de la base mide 20 cm.

✱✱✱❀❀✺❀❀✱✱✱

㉘ *Dos caños A y B llenan juntos u(la piscina en dos horas; A lo hace por sí solo en tres horas menos que B, ¿Cuántas horas tarda cada uno separadamente?*

El A sólo tarda en llenar la piscina x horas, luego su caudal es 1/x litros/hora.
El B sólo tarda en llenar la piscina x + 3 horas, su caudal es 1/(x +3) l/h.

Entre los dos juntos tardan dos horas, luego: $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$; 2(x + 3) + 2x = x(x + 3); 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x; $x^2 - x - 6 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$, luego el grifo A tarda 3 h y el B 6 h en llenar la piscina por separado.

✱✱✱❀❀✺❀❀✱✱✱

㉙ *Un caño tarda 2 horas más que otro en llenar un depósito y abriendo los dos juntos se llena en I hora y 20 minutos, ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?*

1h 20 min = 4/3 h.

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{4}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(x+2) + 4x = 3x(x+2)$; 4x + 8 + 4x = $3x^2$ + 6x;

$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$, luego un caño tarda 2 h y el otro 4 h en llenar el depósito.

✱✱✱❀❀✺❀❀✱✱✱

㉚ *Preguntada una persona por su edad, contestó: «Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy», Halla la edad de la persona en el momento actual.*

Edad actual = x
Edad dentro de 5 años = x + 5.
Edad hace 5 años = x – 5.

25 + (Edad dentro de 5)·(Edad hace 5) = (cuadrado de la edad actual).

25 + (x + 5)(x – 5) = x^2; (x + 5)(x – 5) = x^2 – 25, que no es una ecuación sino una identidad, luego la edad puede ser cualquier valor $x \geq 5$ años, (la edad no puede ser negativa).

✱✱✱❀❀✺❀❀✱✱✱

31 *El número 365, que indica los días del año, es un número muy curioso, Es el único número que es suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos y que además es suma de los cuadrados de los dos siguientes, ¿Sabrías hallarlos?*

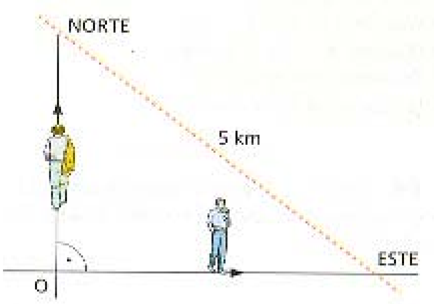
Primer número = n
Siguiente = n + 1.
Tercero = n + 2.

$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 365$; $n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 365$; $3n^2 + 6n – 360 = 0$; $n^2 + 2n – 120 = 0$; ecuación que resolvemos:

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} = \frac{-2 \pm 22}{2} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -12 \end{Bmatrix}$$, los números son, pues,: 10, 11 y 12, $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$, y además la suma de los cuadrados de los dos siguientes también es 365: $13^2 + 14^2 = 168 + 196 = 365$.

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

32 *De un punto salen dos personas, una en dirección norte y la otra en dirección este, La primera marcha a 6 km/h y la segunda a 8 km/h, ¿Qué tiempo tardarán en estar una de otra a 5 km de distancia?*



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por las distancia recorridas por las dos personas en t horas y la distancia de separación (hipotenusa) :

$(6t)^2 + (8t)^2 = 5^2$; $36t^2 + 64t^2 = 25$; $100t^2 = 25$; $t^2 = 25/100= 1/4$; t = ½ hora = 30 min.

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

CUESTIONES PARA ACLARARSE

33 *¿Cómo tiene que ser el coeficiente de polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ para que la parábola que determina tenga en el vértice un mínimo? ¿y para que tenga un máximo?*

Para que tenga un mínimo ha de ser a >0 y para que tenga un máximo a < 0.

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

34 *Un alumno ha calculado las raíces de una ecuación, y son: x = 2, x = 8, ¿Cuál es la abscisa al vértice de la parábola correspondiente a esa ecuación?*

Es el valor medio $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$.

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

㉟ *Un alumno dice que toda ecuación general de segundo grado cuyo término independiente es negativo tiene siempre dos raíces reales, ¿Es cierto?*

No para que tenga raíces reales, el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, es decir $b^2 \geq 4ac$, si $c < 0$ pero $a < 0$, puede que $4ac \geq b^2$, por ejemplo $-3x^2 + x - 1 = 0$, no tiene raíces reales porque $1^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-1) = 1 - 12 = -11$, cuya raíz es un número imaginario.

✻✻✻❁❁☀❁❁✻✻✻

㊱ *Si dos números son iguales, sus cuadrados también lo son; pero si los cuadrados de dos números son iguales, ¿puede asegurarse que los números lo sean?*

No, el problema radica en que el cuadrado de todo número es siempre positivo luego :

$(-a)^2 = (a)^2 = a^2$, pero $-a \neq a$. Sí podemos asegurar que tendrán el mismo valor absoluto.

✻✻✻❁❁☀❁❁✻✻✻

㊲ *¿Se puede aplicar la fórmula general de la ecuación de segundo grado a la ecuación $-x^2 + x - 1 = 0$?*

Si pero no tiene soluciones reales porque su discriminante es negativo $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3$.

✻✻✻❁❁☀❁❁✻✻✻

㊳ *Te dan el polinomio $P(x) = 3x^2 + 3x + 3$, ¿Se puede afirmar que su valor numérico es siempre positivo?*

Sí, pues como no tiene puntos de cortes con el eje horizontal, ha de estar por encima o por debajo, en este caso está siempre por encima del eje horizontal y es siempre positivo.

✻✻✻❁❁☀❁❁✻✻✻

㊴ *Te dan el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, ¿Qué condición debe cumplirse para que se anule en $x = 0$?*

Si $P(0) = 0$, $a(0)^2 + b\cdot 0 + c = 0$, es decir ha de ser $c = 0$, no ha de tener término independiente.

✻✻✻❁❁☀❁❁✻✻✻