① Factoriza los siguientes números:

a) 720 **b)** 145 **c)** 4 000 **d)** 999

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$ luego **$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$**

$$\begin{array}{r|l} 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$ luego **$145 = 5 \cdot 29$**

$$\begin{array}{r|l} 4\,000 & 2 \\ 2\,000 & 2 \\ 1\,000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$ luego **$4\,000 = 2^5 \cdot 5^3$**

$$\begin{array}{r|r} 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$ luego **$999 = 33 \cdot 37$** .

② Halla los divisores comunes de: **a)** 12 y 18 **b)** 36 y 45

a) Primero descomponemos en factores ambos números:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \text{ y } 18 = 2 \cdot 3^2$$

ahora hallamos el número de divisores: Divisores de 12 = (2+1)·(1+1) = 3 ·2 = 6 y los divisores de 18 = (1+1) · (2+1) = 2 · 3 = 6.
Después hallamos los divisores de cada número:

$$\text{De } 12 : 1\begin{cases} 1\begin{cases} 1 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{cases} \\ 2\begin{cases} 1 \to 2 \\ 3 \to 6 \end{cases} \\ 2^2\begin{cases} 1 \to 4 \\ 3 \to 12 \end{cases} \end{cases}, \text{ de } 18 : 1\begin{cases} 1\begin{cases} 1 \to 1 \\ 3 \to 3 \\ 3^2 \to 9 \end{cases} \\ 2\begin{cases} 1 \to 2 \\ 3 \to 6 \\ 3^2 \to 18 \end{cases} \end{cases}$$

Por, ultimo ponemos el conjunto de divisores de cada número y señalamos los comunes:

Div (12) = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 } y Div(18) = { 1, 2, 3, 6, 9, 18 } .

b) Primero descomponemos en factores ambos números:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \text{ y } 45 = 3^2 \cdot 5$$

ahora hallamos el número de divisores: Divisores de 36 = (2+1)·(2+1) = 3 · 3 = 9 y los divisores de 45 = (2+1) · (1+1) = 3 · 2 = 6.

Después hallamos los divisores de cada número:

$$\text{De } 36: 1\begin{cases} 1\begin{cases} 1 \to 1 \\ 3 \to 3 \\ 3^2 \to 9 \end{cases} \\ 2\begin{cases} 1 \to 2 \\ 3 \to 6 \\ 3^2 \to 18 \end{cases} \\ 2^2\begin{cases} 1 \to 4 \\ 3 \to 12 \\ 3^2 \to 36 \end{cases} \end{cases} \text{, de } 45: 1\begin{cases} 1\begin{cases} 1 \to 1 \\ 5 \to 5 \end{cases} \\ 3\begin{cases} 1 \to 3 \\ 5 \to 15 \end{cases} \\ 3^2\begin{cases} 1 \to 9 \\ 5 \to 45 \end{cases} \end{cases}$$

Por, ultimo ponemos el conjunto de divisores de cada número y señalamos los comunes:

Div (36) = { 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 } y Div(45) = { 1, 3, 5, 9, 15, 45 } .

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

③ Halla algún múltiplo común de: a) 12, 18 y 34 b) 3, 15 y 60

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a)

Hallamos el m.c.m. de los tres números:

$$\left.\begin{aligned} 12 &= 2^2{\cdot}3 \\ 18 &= 2{\cdot}3^2 \\ 34 &= 2{\cdot}17 \end{aligned}\right\}\text{, luego m.c.m.(12, 18 y 34) = } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17 = 4 \cdot 9 \cdot 17 = 612.$$

Como el múltiplo más pequeño de 12, 18 y 34 es 612, los infinitos múltiplos comunes de esos números son múltiplos de 612 : { 612, 1224, 1836, 2448, 3060, ... }

b)

Hallamos el m.c.m. de los tres números:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 15 &= 3{\cdot}5 \\ 60 &= 2^2{\cdot}3{\cdot}5 \end{aligned}\right\}\text{, luego m.c.m.(3, 15 y 60) = } 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Como el múltiplo más pequeño de 12, 18 y 34 es 60, los infinitos múltiplos comunes de esos números son múltiplos de 60 : { 60, 120, 180, 240, 300, ... }

④ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $$\frac{12x^3y^5z^4}{3x^2y^2z^3} = \left\{\begin{array}{l} \frac{12}{3} = 4 \\ \frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x \\ \frac{y^5}{y^2} = y^{5-2} = y^3 \\ \frac{z^4}{z^3} = z^{4-3} = z \end{array}\right\} = 4xy^3z,$$

b) $$\frac{36a^3b^7z^5}{12a^2b^2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{36}{12} = 3 \\ \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a \\ \frac{b^7}{b^2} = b^{7-2} = b^5 \end{array}\right\} = 3ab^5z^5$$

⑤ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $$\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^2} = \frac{12x^3y^5}{3x^2y^2} + \frac{18x^5y^7}{3x^2y^2} - \frac{48x^{12}y^6}{3x^2y^2} = 4xy^3 + 6x^3y^5 - 16x^{10}y^4$$

b) $$\frac{24x^5z^4 + 18x^5z^{23} - 48x^{12}z^3}{6x^2z^3} = \frac{24x^5z^4}{6x^2z^3} + \frac{18x^5z^{23}}{6x^2z^3} - \frac{48x^{12}z^3}{6x^2z^3} = 4x^3z + 3x^3z^{20} - 16x^{10}$$

⑥ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $$(x^4 - x^2) : x = \frac{x^4 - x^2}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{x^2}{x} = x^3 - x$$

b) $$(x^3 - 2x^2 + x) : x = \frac{x^3}{x} - \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} = x^2 - 2x + 1$$

c) $$(x^3 + 2x^2 + x) : x = \frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} = x^2 + 2x + 1$$

⑦ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4)$

b) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

c) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7) : (x-3)$

d) $(x^3 + 1) : (x + 1)$

Utilizamos la regla de Ruffini.

a)

	1	4	0	6
4		4	32	128
	1	8	32	134 = Resto

Cociente = $x^2 + 8x + 32$

b)

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0 = Resto

Cociente = $x^2 + x + 1$

c)

	4	-8	-9	7
3		12	12	9
	4	4	3	16 = Resto

Cociente = $4x^2 + 4x + 3$

d)

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0 = Resto

Cociente = $x^2 - x + 1$

⑧ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4) : (x^2 + x + 2)$
b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$
c) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$
d) $(x^2 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 7) : (x^2 - 2x + I)$

a) $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \quad | \quad x^2 + x + 2$

$-x^4 - x^3 - 2x^2$

Cociente: $x^2 - 7x + 7$

$-7x^3 + 0x^2 + 3x$

$+7x^3 + 7x^2 + 14x$

$7x^2 + 17x - 4$

$-7x^2 - 7x - 14$

$10x - 18$

b) $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6 \quad | \quad x^2 - x + 2$

$-x^4 + x^3 - 2x^2$

Cociente: $x^2 - 4x + 5$

$-4x^3 + 9x^2 - 12x$

$$+ 4x^3 - 4x^2 + 8x$$

$$5x^2 - 4x + 6$$
$$- 5x^2 + 5x – 10$$

$$x – 4$$

c) $6x^4 – x^3 + 5x^2 + 3x –14 \mid 2x^2 -3x + 7$

$$-6x^4 +9x^3 – 21x^2 \qquad 3x^2+ 4x – 5/2$$

$$8x^3 - 17x^2 + 3x$$
$$- 8x^3 + 12x^2 -28x$$

$$- 5x^2 - 25x – 14$$
$$+5x^2 - (15/2)x + 35/2$$

$$- (65/2)x + 1/2$$

d)

$x^4 – 5x^3 - 6x^2 + 3x + 7 \mid x^2 - 2x + 1$

$$- x^4 + 2x^3 – x^2 \qquad x^2 – 3x - 13$$

$$- 3x^3 - 7x^2 + 3x$$
$$+3x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$-13x^2 + 6x + 7$$
$$+13x^2 - 26x + 13$$

$$- 20x + 20$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

➀⓪ Comprueba si son exactas o no las siguientes divisiones:

a) $(x^{10} - 1024) : (x + 2)$ b) $(x^6 + 64) : (x - 2)$ c) $(x^{99} + 1): (x - 1)$
d) $(x^{75} + 1):(x+ 1)$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Para hallar el resto de las divisiones (si es cero, es exacta) usamos el teorema del resto.

a) Resto = $P(-2) = (-2)^{10} – 1024 = 1024 – 1\,024 = 0$ (Sí es exacta)
b) Resto = $P(2) = 2^6 + 64 = 64 + 64 = 128$ (No es exacta).
c) Resto = $P(1) = 1^{99} + 1 = 1 + 1 = 2$ (No es exacta).
d) Resto = $(-1)^{75} + 1 = -1 + 1 = 0$ (Sí es exacta).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

11 Comprueba si los siguientes polinomios tienen por factores los que se indican:

a) $x^{35} - 1$ tiene por factor $x - 1$.
b) $x^{53} + 1$ tiene por factor $x + 1$.
c) $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16$ tiene por factor $x - 4$.
d) $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16$ tiene por factor $x + 2$.

Para que un polinomio P(x), tenga como factor (x – a) ha de cumplirse que P(a) = 0.

a) $P(1) = 1^{35} – 1 = 1 – 1 = 0 \Rightarrow$ (x- 1) es un factor de $P(x) = x^{35} – 1$.
b) $P(-1) = (-1)^{53} + 1 = - 1 + 1 = 0 \Rightarrow$ (x + 1) es un factor de $P(x) = x^{53} + 1$.
c) $P(4) = 4^4 – 2 \cdot 4^3 – 10\cdot4^2 + 4\cdot4 + 16 = 256 – 128 – 160 + 16 + 16 = 0 \Rightarrow$ (x – 4) es un factor de $P(x) = x^4 – 2x^3 – 10x^2 + 4x + 16$.
d) $P(-2) = (-2)^4 – 2 \cdot (-2)^3 – 10\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) + 16 = 16 + 16 – 40 - 8 + 16 = 0 \Rightarrow$ (x – 4) es un factor de $P(x) = x^4 – 2x^3 – 10x^2 + 4x + 16$.

12 Comprueba si los siguientes polinomios tienen por factores los que se indican y, en caso afirmativo, halla otro factor del polinomio.

a) $x^4 – x^2$ tiene por factor $x + 1$.
b) $x^3 - 2x^2 + x$ tiene por factor $x - 1$.
c) $x^3 + 2x^2 + x$ tiene por factor $x + 1$.

Ahora vamos a factorizar los polinomios y así contestamos a las dos preguntas.

a) $x^4 – x^2 = x^2 (x^2 – 1) = x^2 (x + 1) (x – 1)$. Ya que $x^2 – 1^2 = (x +1) (x –1)$
b) $x^3 – 2x^2 + x = x (x^2 – 2x + 1) = x (x – 1)^2$.
c) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x (x + 1)^2$.

13 Comprueba si los siguientes polinomios tienen por factores los que se indican y, en caso afirmativo, halla otro factor del polinomio:

a) $x^2 - 1$ tiene por factor $x + 1$.
b) $x^3 - 1$ tiene por factor $x - 1$.
c) $x^4 - 2x^3 – 10x^2 + 4x + 16$ tiene por factor $x + 2$
d) $x^3 + 1$ tiene por factor $x + 1$.

Factorizamos :

a) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

b) No hay factores comunes ni se corresponde con la expresión de un producto notable luego probamos por Ruffini entre los divisores del término independiente, Div(-1) = {± 1} :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \Downarrow & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

$x^2 + x + 1$, no se puede descomponer en producto de factores de primer grado pues su ecuación asociada no tiene raíces reales, si intentamos resolver $x^2 + x + 1 = 0$, comprobamos que no tiene soluciones reales.

c) No tiene factores comunes ni se corresponde con las expresiones de los productos notables luego hemos de descomponer probando por Ruffini entre los divisores de los términos independientes Div(16) = { ± 1, ±2, ±4, ±8, ±16 }.

Vimos en el apartado d) del ejercicio nº 11 que un factor era (x + 2), luego empezamos con él :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & -10 & 4 & 16 \\ -2 & & -2 & 8 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & 8 & \boxed{0} \\ 4 & & 4 & 0 & -8 & \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Como $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, la descomposición es :

$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = (x+2)(x-4)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

d) No tiene factores comunes ni se corresponde con ningún producto notable, probamos por Ruffini entre Div(1) = { ± 1} :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

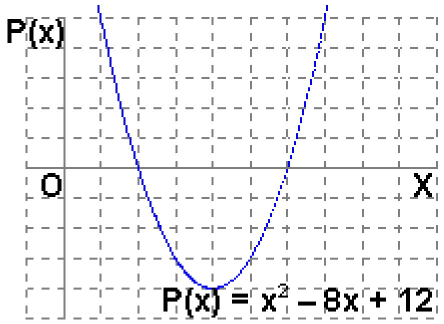
Como $x^2 - x + 1$ no tiene raíces reales, la descomposición del polinomio queda : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

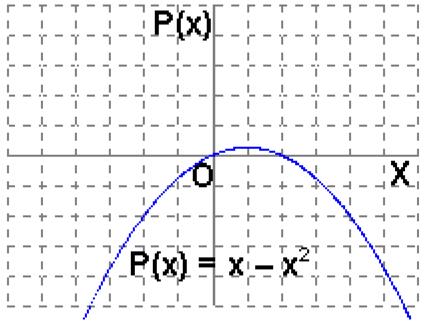
14 En las siguientes figuras se han representado los valores numéricos P(x) de los polinomios que aparecen en las mismas. Apoyándote en las gráficas, ¿puedes decir sus raíces?:

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

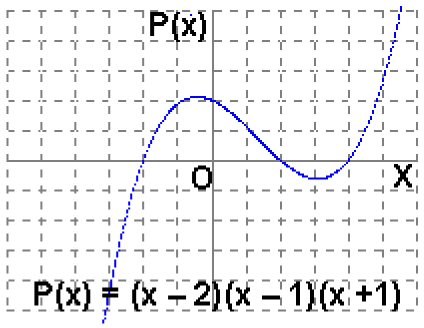
Las raíces de un polinomio P(x) son los valores x_0 que anulan el polinomio, es decir $P(x_0) = 0$. En su representación gráfica se corresponde con los valores en que la gráfica corta al eje horizontal o de abscisas.



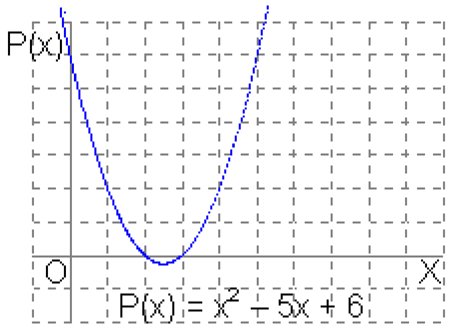
Las raíces son x = 2 y x = 6.



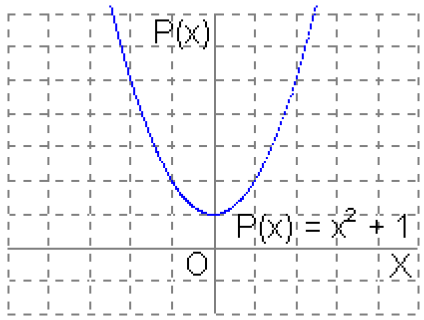
Raíces x = 0 y x = 2.



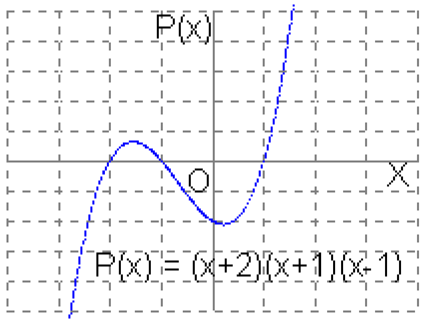
Raíces : x = -1, x = 1 y x = 2.



Raíces : x = 2 y x = 3.



Raíces : No reales, pues no corta al eje horizontal (OX).



Raíces : x = -2, x = -1 y x = 1.

⬦⬦⬦◘◘◉◘◘⬦⬦⬦

➀➄ Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - x - 2$ **b)** $x^2 - 11x + 30$ **c)** $3x^2 + 10x + 3$ **d)** $2x^2 - x - 1$.

⬦⬦⬦◘◘◉◘◘⬦⬦⬦

Para factorizar trinomios, en vez de probar por Ruffini entre los divisores del término independiente, vamos a resolver la ecuación de 2º grado asociada y luego $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ en donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada.

a) Resolvemos la ecuación :

$$x^2 - x - 2 = 0\ ,\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

luego $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) $$x^2 - 11x + 30 = 0\ ;\ x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{11+1}{2} = 6 \\ \dfrac{11-1}{2} = 5 \end{cases}$$

luego $x^2 - 11x + 30 = (x - 6)(x - 5)$.

c) $$3x^2 + 10x + 3 = 0\ ;\ x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \dfrac{-10+8}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-10-8}{6} = -3 \end{cases}$$

luego $3x^2 + 10x + 3 = 3(x + 1/3)(x + 3) = (3x + 1)(x + 3)$ al multiplicar los dos primeros factores.

d) $2x^2 - x - 1 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

entonces $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+½) = (x-1)(2x+1)$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

16 Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - 5x + 6$ **c)** $2x^2 + x - 28$
b) $x^2 + 3x + 2$ **d)** $3x^2 + 41x + 26$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

entonces $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$.

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+1}{2} = -1 \\ \dfrac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$

entonces $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.

c) $2x^2 + x - 28 = 0$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+224}}{4} = \dfrac{-1 \pm 15}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+15}{4} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{-1-15}{4} = -4 \end{cases}$

entonces $2x^2 + x - 28 = 2(x - 7/2)(x+4) = (2x-7)(x+4)$.

d) $3x^2 + 41x + 26 = 0$; $x = \dfrac{-41 \pm \sqrt{1681-312}}{6} = \dfrac{-41 \pm 37}{6} = \begin{cases} \dfrac{-41+37}{6} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-41-37}{6} = -13 \end{cases}$

luego $3x^2 + 41x + 26 = 3(x + 2/3)(x+13) = (3x+2)(x+13)$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

17 Factoriza los siguientes polinomios de tercer grado calculando alguna de las raíces enteras:

a) $x^3 - x^2 - 4$ **c)** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ **d)** $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

a) Probando por Ruffini entre D(-4) = { ±1, ±2, ± 4}.

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	0

Como $x^2 + x + 2$ no tiene raíces reales **$x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$.**

b) Div (1) = { ±1}.

	1	2	2	1
-1		-1	-1	-1
	1	1	1	0

Como $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, **$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$.**

c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

i) No hay factores comunes que extraer.
ii) No se corresponde con ningún producto notable.
iii) Buscamos las raíces probando por Ruffini entre Div(-12) = {±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12} :

	1	3	-4	- 12	
2		2	10	12	
	1	5	6	0	⇒ Si no queremos seguir podemos resolver la ecuación $x^2+5x+6=0$
- 2		-2	-6		
	1	3	0		⇒ Aquí podemos parar también y poner el factor x +3.
-3		-3			
	1	0			

Luego **$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x + 2)(x + 3)$.**

d) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

i) No hay factores comunes que extraer.
ii) No se corresponde con ningún producto notable.
iii) Buscamos las raíces probando por Ruffini entre Div(2) = {±1, ±2} :

	6	7	-9	2
-2		-12	10	-2
	6	-5	1	0

No hay más raíces enteras, en vez de seguir probando entre las fracciones formadas al dividir los divisores del termino independiente entre los del coeficiente de mayor grado, es más fácil y rápido resolver la ecuación asociada al trinomio de 2º grado que es el cociente :

$6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array} \right\}$, luego $6x^2 - 5x + 1 = 6(x - \frac{1}{2})(x - 1/3) = (2x - 1)(3x - 1)$ y el polinomio original :

$$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 6(x + 2)(x - \tfrac{1}{2})(x - 1/3) = (x + 2)(2x - 1)(3x - 1)$$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

18 Te dan los polinomios:

a) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 6)$
b) $P(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 5)$
¿Cuáles son sus raíces?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Como las raíces de un polinomio son los números que lo anulan, si está descompuesto en producto de factores, las raíces son los valores que anulan cada factor (pues para que se anule un producto es necesario y suficiente que se anule alguno de los factores).

a) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 6) \left\{ \begin{array}{c} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{array} \right\}$ son las raíces.

b) $P(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 5) \left\{ \begin{array}{c} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{array} \right\}$ son las raíces.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

19 Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que sus raíces son divisores del término independiente:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
b) $x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $x^2 + 5x + 6 = 0$
d) $x^2 - 2x - 3 = 0$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Disponemos de varias posibilidades : resolver las ecuaciones de 2º grado, probar entre los divisores del término independiente o, teniendo en cuenta que están en forma canónica ($x^2 - sx + p$) buscar dos números cuyo producto sea p y su suma s.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0,\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{bmatrix}$ Suma = s = $x_1 + x_2$ = 1 + 3 = 4 y el producto p = $x_1 \cdot x_2$ = 1 · 3 = 3.

b) $x^2 - 6x + 8 = 0,\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{bmatrix}$ Suma = s = $x_1 + x_2$ = 2 + 4 = 6 y el producto p = $x_1 \cdot x_2$ = 2 · 4 = 8.

c) $x^2 + 5x + 6 = 0,\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{bmatrix} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{-5-1}{2} = -3 \end{bmatrix}$ Suma = s = $x_1 + x_2$ = - 2 - 3 = -5 y el producto p = $x_1 \cdot x_2$ = (-2) ·(-3) = 6.

d) $x^2 - 2x - 3 = 0,\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{bmatrix} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{bmatrix}$ Suma = s = $x_1 + x_2$ = - 1+ 3 = 2 y el producto p = $x_1 \cdot x_2$ = (-1) ·(3) = -3.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

21 ¿Qué valor ha de tomar k para que x + 3 sea un factor de x3 - 4x - 12k?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Si x + 3 ha de ser un factor de P(x) = x^3 - 4x - 12k, el resto de dividir P(x) entre x + 3 ha de ser cero y por tanto P(-3) = 0, luego sustituimos y hallamos k :

$(-3)^3 - 4(-3) - 12k = 0$; $-27 + 12 - 12k = 0$; $12k = -15$; $k = -15/12$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

22 Halla, sin hacer la división, el valor de m para que el polinomio 2x4 + 9x3 + 2x2 - 6x + 3m tenga por resto 12 al dividirlo por x + 2.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Según el teorema del resto P(-2) = 12 :

$2(-2)^4 + 9(-2)^3 + 2(-2)^2 - 6(-2) + 3m = 12$; $32 - 72 + 8 + 12 + 3m = 12$; $3m = -42$; $m = -42/3 = -14$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

23 Halla el valor de m en los polinomios siguientes sabiendo que:

a) $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ es divisible por $x + 1$.
b) $3x^2 - mx + 10$ es divisible por $x - 5$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

a) $P(-1) = 0$; $5(-1)^4 + m(-1)^3 + 2(-1) – 3 = 0$; $5 – m – 2 – 3 = 0$; $m = 0$.

b) $P(5) = 0$; $3 \cdot 5^2 – m \cdot 5 + 10 = 0$; $75 – 5m + 10 = 0$; $5m = 85$; $m = 85/5 = 17$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

24 Halla un polinomio de primer grado que al dividirlo por x + 1 dé de resto 1 , y al dividirlo por x - 2 dé de resto 7.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Si es un polinomio de primer grado será de la forma $P(x) = ax + b$. Como al dividirlo entre $x + 1$ da testo 1 se ha cumplir que $P(-1) = 1$ según el teorema del resto, y si al dividirlo por $x – 2$ da de resto 7, $P(2) = 7$, con lo que disponemos de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que despejamos *a* y *b* :

$\left.\begin{matrix} P(-1) = 1 \\ P(2) = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a(-1) + b = 1 \\ a\cdot 2 + b = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a - b = -1 \\ 2a + b = 7 \end{matrix}\right\} 3a = 6; a = 2; b = 3$, luego el polinomio es $P(x) = 2x + 3$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

25 Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible por (x + 1) y (x - l).

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Si ha de ser divisible por $(x + 1)$, $P(-1) = 0$ y al ser divisible por $(x – 1)$, $P(1) = 0$, resolviendo el sistema :

$\left.\begin{matrix} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix} (-1)^5 + a(-1)^3 + b = 0 \\ 1^5 + a\cdot 1^3 + b = 0 \end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix} -a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{matrix}\right\}; 2b = 0; b = 0; a = -1$, luego el polinomio buscado es $P(x) = x^5 – x^3$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

26 Determina el valor de m para que el polinomio $5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + m$ tenga por resto 130 al dividirlo por x + 2.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

En aplicación del teorema del resto $P(-2) = 130$:

$5·(-2)^4 – 7(-2)^3 + 2(-2)^2 + 4(-2) + m = 130$; $80 + 56 + 8 – 8 + m = 130$; $m = -6$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

㉗ Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Como $x^2 – 4 = (x + 2)(x – 2)$, el polinomio ha de ser divisible por $(x + 2)$, $P(-2) = 0$ y por $(x – 2)$, $P(2) = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} P(-2)=0 \\ P(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (-2)^3+6(-2)^2+a(-2)+b=0 \\ 2^3+6·2^2+a·2+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2a+b=-16 \\ 2a+b=-32 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=-48; b=-24$$

a = -4.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

㉘ Un polinomio de segundo grado tiene por primer coeficiente 1 , se anula para x = 3 y toma el valor 4 para x = 5. Hállalo.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

$P(x) = ax^2 + bx + c$, ya que es de 2º grado. Como el primer coeficiente es 1, a = 1 y al anularse para x = 3, P(3) = 0 y P(5) = 4, luego :

$$\left.\begin{array}{r} P(3)=0 \\ P(5)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3^2+b·3+c=0 \\ 5^2+b·5+c=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3b+c=-9 \\ 5b+c=-21 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2b=-12 \Leftrightarrow b=-6; c=-9-3b=9$$

El polinomio es $P(x) = x^2 – 6x + 9$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

㉙ Un polinomio es irreducible cuando no tiene ninguna raíz real. Demuestra que los siguientes polinomios son irreducibles en R:

a) $x^2 + 6$ **b)** $x^4 + 1$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

a) $x^2 + 6 = 0$; $x = \pm\sqrt{-6} \notin \Re$ **b)** $x^4 +1 = 0$; $x = \pm\sqrt[4]{-1} \notin \Re$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

㉚ Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^3+ ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Como $x^2 + x + 1$ es irreducible, para hallar a y b tenemos que hacer la división :

$$\begin{array}{l|l} x^3 + ax^2 + bx + 5 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 - x & x + (a-1) \\ \cline{1-1} (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 & \\ -(a-1)x^2 - (a-1)x - (a-1) & \\ \cline{1-1} (b-a)x - a + 4 & \end{array}$$

Como se nos dice que ha de ser divisible el resto ha de ser cero lo que supone $-a + 4 = 0$ y $b - a = 0$, de la primera ecuación se deduce que $a = 4$, y de la segunda que $b = a = 4$.

31 Un polinomio de segundo grado tiene por primer coeficiente 1, se anula para x = 3 y toma el valor 9 para x = 0. Hállalo.

$P(x) = x^2 + bx + c$, ya que a = 1, además $P(3) = 0$ y $P(0) = 9$, resolvemos el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} P(3) = 0 \\ P(0) = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \\ c = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 3b + 9 = -9 \Leftrightarrow 3b = -18 \Leftrightarrow b = -18/3 = -6$$

$P(x) = x^2 - 6x + 9$.

32 Si se multiplican el dividendo y el divisor por un número real no nulo, ¿qué sucede con el cociente? ¿Y con el resto?

Sea la división $\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} R & C \end{array}$ como $D = d \cdot C + R$, $D \cdot k = k(d \cdot C + R) = kd \cdot C + R \cdot k$, al multiplicar el dividendo(D) y el divisor (d) por un número $k \neq 0$, el cociente C no varia pero el resto queda multiplicado por ese número k.

33 Si un polinomio entero es de grado 5 y se divide por otro de grado 3, ¿de qué grado es el cociente?

El cociente tendrá un grado que será la diferencia entre los grados del dividendo y divisor = 5 – 3 .

34 Si un polinomio lo divides por un polinomio de primer grado, ¿qué puedes afirmar del resto?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Que tendrá grado cero, será un número, ya que el resto ha de tener grado menor que el grado del polinomio divisor.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

35 Un alumno afirma que el polinomio $x^2 + 1$ no se anula para ningún valor real de x. ¿Puedes afirmar lo mismo para el polinomio $x^4 + 1$?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Sí, ya que x^2 y x^4 son siempre positivos que sumados a la unidad no pueden anularse, lo que equivale a decir que sus ecuaciones no tienen solución en el conjunto de los números reales :

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \Re \text{ ; } x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1} \notin \Re$$

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

36 Un polinomio tiene por raíces 1 , 2 y 3. ¿Podrías escribirlo sabiendo que el coeficiente del término de grado máximo es 1 ?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

37 ¿Es necesario hacer la división del polinomio P(x) por x - a para saber el resto? ¿Por qué?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

No, porque se según el teorema del resto, resto = P(a).

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

38 El término independiente de un polinomio es 6 y tiene tres raíces enteras. ¿Podrías escribir el menor conjunto de números entre los que se encuentran?

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

Si las raíces son enteras, se encontrarán entre Div(6) = { ± 1, ±2, ±3, ±6 }.

◇◇◇▣▣◉▣▣◇◇◇

39 Un alumno afirma que el polinomio dado por $x^3 + 2x^2 - 25x + 1$ tiene tres raíces enteras. ¿Podrías confirmarlo?

Las raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente, Div(1) = { ±1} y este conjunto tiene sólo dos elementos, luego no puede haber tres raíces enteras distintas, sí alguna de ellas es doble o triple, que no es el caso pues no es divisible por (x ±1).

40 Los valores numéricos de un polinomio P(x) son siempre positivos. ¿Qué puede decirse de sus raíces?

Que no tiene pues las raíces son los valores que anulan el polinomio, pero se nos dice que este toma siempre valores positivos luego no se anula para ningún valor y, por tanto, no tiene raíces.

41 Un alumno ha encontrado tres raíces de un polinomio de tercer grado. Sigue buscando más. ¿Debe seguir buscando?

Puede, pero no debe ya que el número máximo de raíces de un polinomio viene dado por su grado y se nos dice que este es de tercer grado.