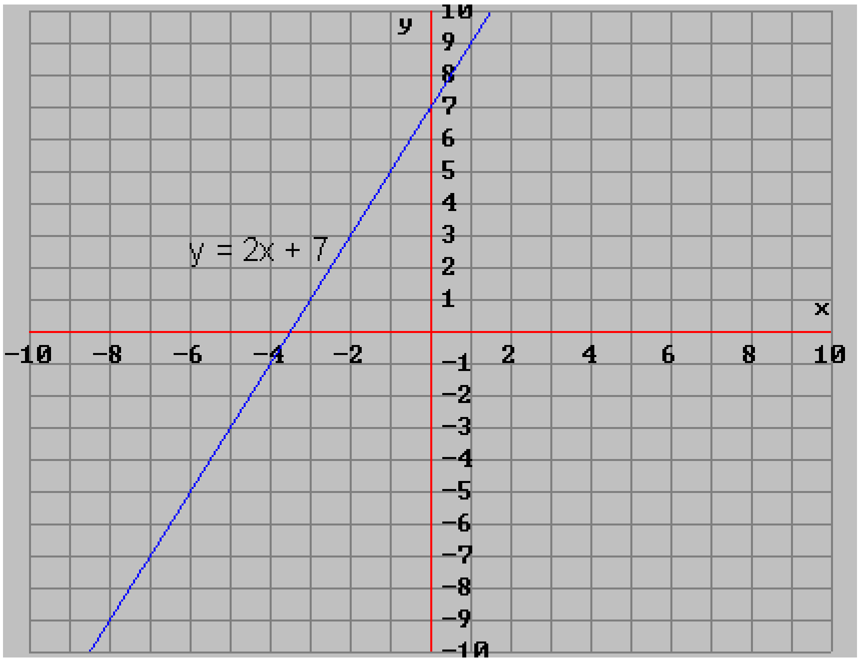
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

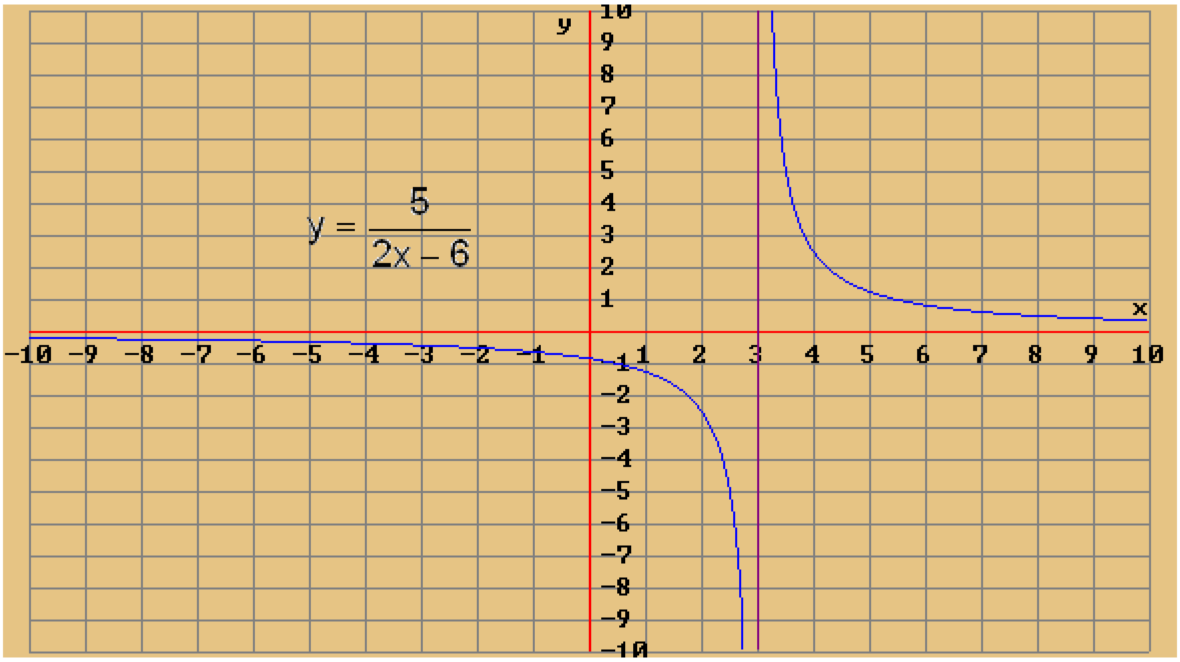
➋ Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

1) y = 2x + 7



Dominio f = Dom(f) = (podemos dar cualquier valor) = $\mathbb{R}$
Recorrido = Im(f) = podemos obtener cualquier valor = $\mathbb{R}$

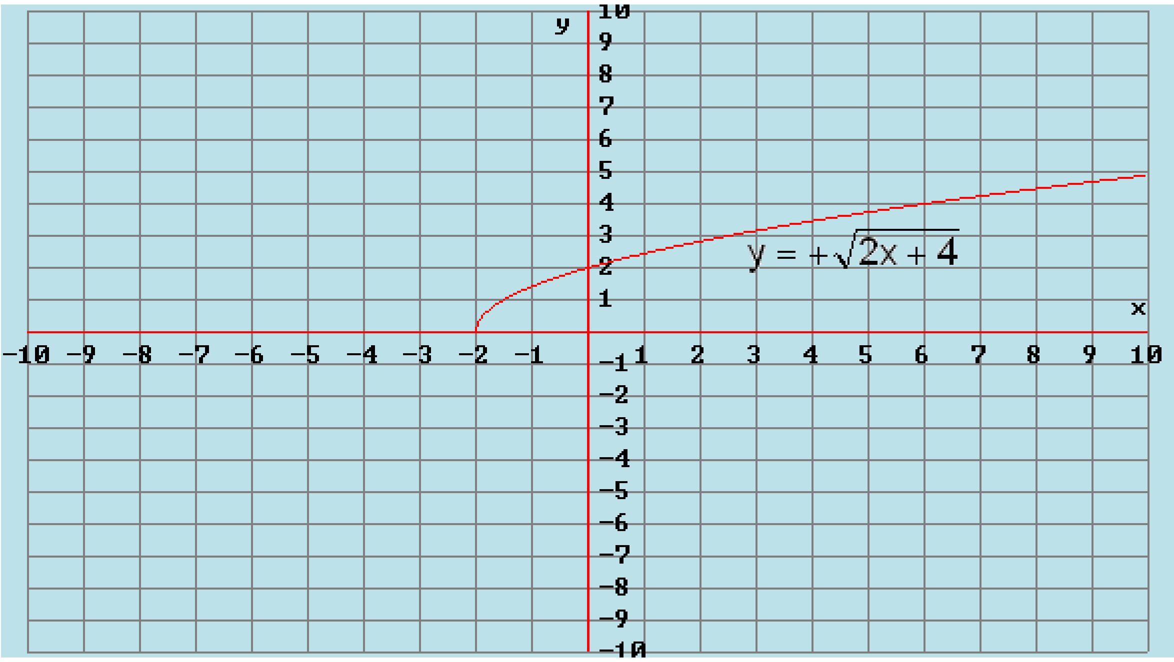
2) $y = \dfrac{5}{2x - 6}$



Como es una función de tipo racional(con x en el denominador) no pertenecen al dominio los valores de x que anulan el denominador (k/0 = indeterminado), en este caso, el denominador, $2x - 6 = 0$, para $x = 3$ (es una asíntota vertical (en color morado en el dibujo), luego Dominio = $\mathbb{R} - \{3\}$.

Como se ve en la gráfica, la y puede tomar cualquier valor menos $y = 0$, ya que para ese valor se cumpliría $0 = \frac{5}{2x-6}$, es decir $0 = 5$, lo que es imposible. Luego el Recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$

3) $y = +\sqrt{2x+4}$



Como es una función irracional, no está definida cuando el radicando sea negativo, $2x + 4 < 0$, es decir para $2x < -4$ o sea $x < -2$, como puede verse en la gráfica.

Dominio = $[-2 , +\infty)$

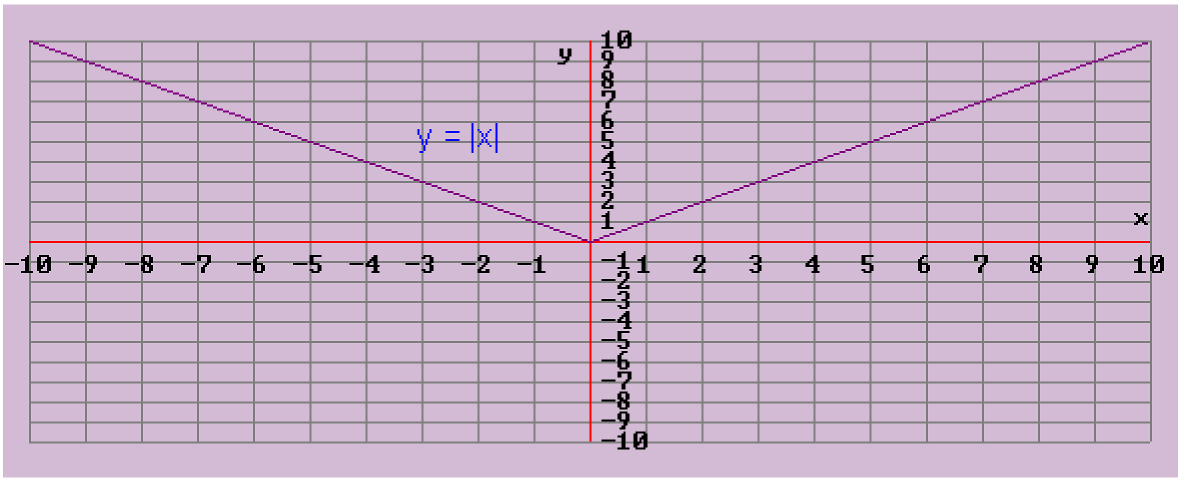
Como hemos definido la función con los valores positivos de la raíz:

Recorrido = $[0, + \infty)$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

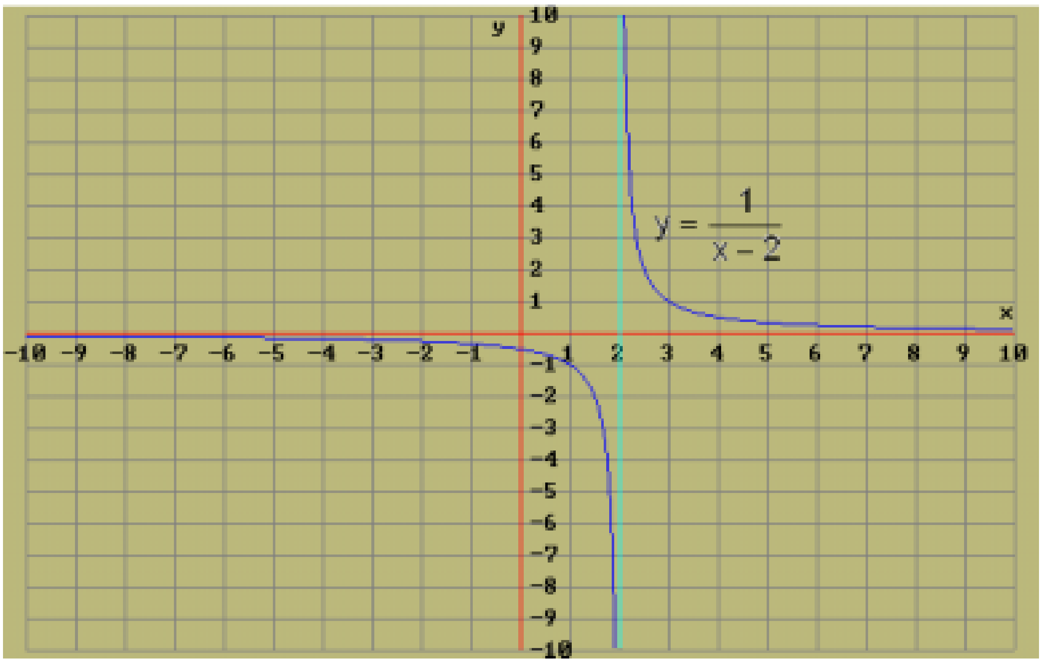
③ Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones, cuyas gráficas son:

$y = |x|$



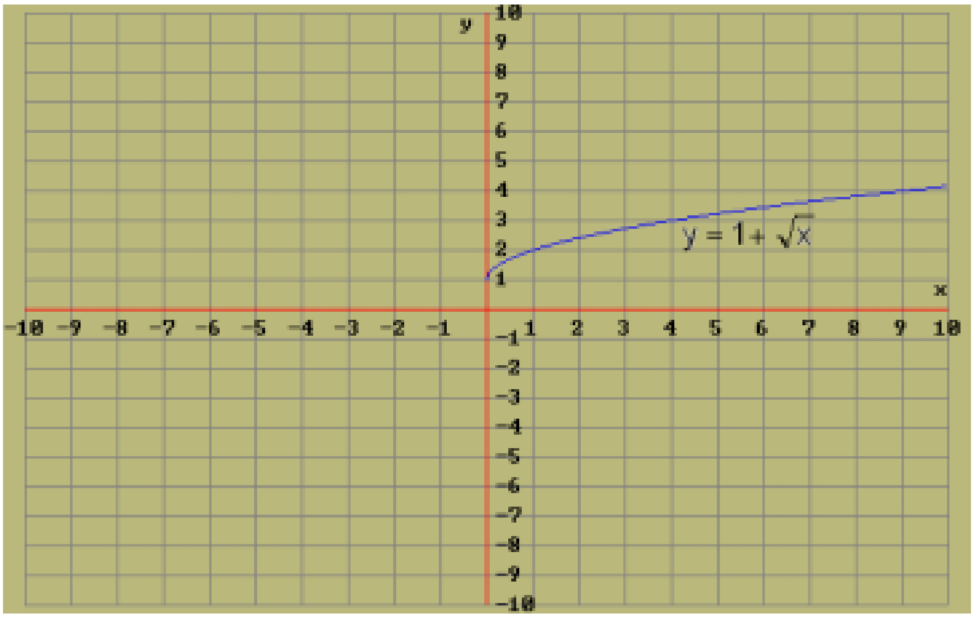
Dominio = R
Recorrido = [0, + ∞)

$$y = \frac{1}{x-2}$$



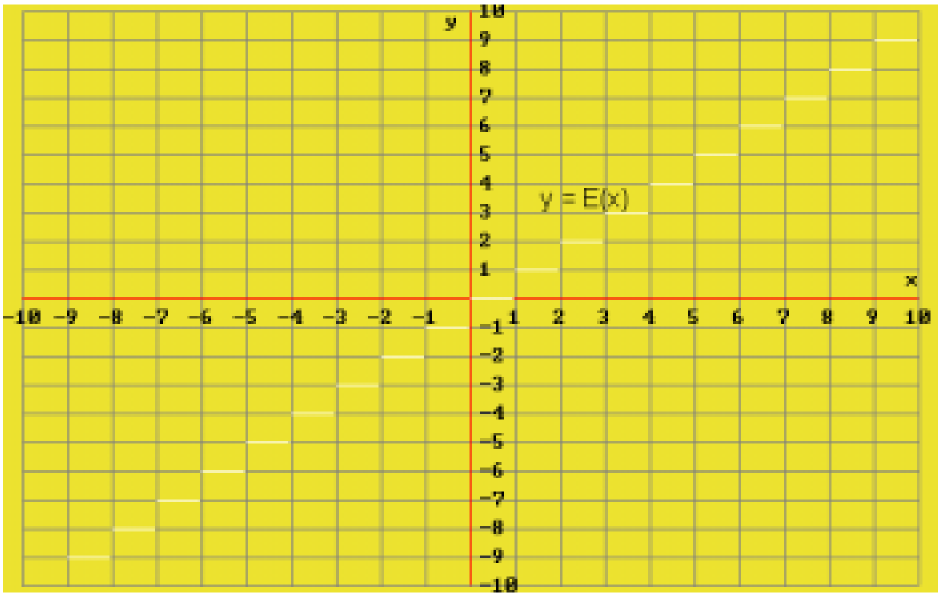
Dominio = $\mathbb{R}$ – {2}
Recorrido = $\mathbb{R}$ – {0}

$$y = 1 + \sqrt{x}$$



Dominio = [0, + ∞)
Recorrido= [1, +∞)

y = E(x)



Dominio = $\mathbb{R}$
Recorrido = $\mathbb{Z}$ (Enteros)

⑤ Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos que se indican y observa cómo son las tasas obtenidas:

a) [-3, -2] **b)** [-9, -8]

a) $TV[-3, -2] = f(-2) – f(-3) = (-2)^2 – (-3)^2 = 4 – 9 = - 5 < 0$.

b) $TV[-9, -8] = f(-8) – f(-9) = (-8)^2 – (-9)^2 = 64 – 81 = - 17 < 0$.

⑥ Indica en qué intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$ **c)** $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x$ **d)** $f(x) = -x^2$

a) $TV [x, x+1] = f(x+h) – f(x) = x + h – x = h >0$. Como la tasa de variación es siempre positiva la función es creciente en su dominio (R).

b) $TV [x, x+1] = f(x+h) – f(x) = -x - h – (-x) = - h < 0$. Como la tasa de variación es siempre negativa la función es decreciente en su dominio (R).

c) $TV [x, x+1] = f(x+h) – f(x) = (x + h)^2 – x^2 = x^2 + 2hx + h^2 – x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$. Como cambia de monotonía en x = 0, para valores x < 0 es negativa la TV, la función es decreciente y para x > 0 es positiva, luego la función es creciente en x > 0.

d) TV [x, x+1] = f(x+h) – f(x) = $-(x+h)^2 - (-x^2) = -x^2 - 2hx - h^2 + x^2 = -2xh - h^2 = -h(2x+h)$. Como cambia de monotonía en x = 0, para valores x < 0 es positiva la TV, la función es creciente y para x > 0 es negativa, luego la función es decreciente en x > 0.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

⑧ Ayúdate de la calculadora para estudiar el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$, en el punto x = 1

b) $f(x) = |x|$, en el punto x = - 2.

c) $f(x) = \dfrac{6}{1-x}$,en el punto x = - 1

d) $f(x) = 1+\sqrt{x+2}$, en el punto x = 0.

a) $f(1+h) - f(1) = 5(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 - (5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1) = 5(1 + 2h + h^2) - 3 - 3h + 1 - 5 + 3 - 1 = 5 + 10h + 5h^2 - 3 - 3h + 1 - 5 + 3 - 1 = 5h^2 + 7h > 0$ para h > 0, luego es creciente en x = 1.

b) f(-2 + h) – f(-2) = |-2 + h| - |-2| < 0, luego es decreciente.

c) $f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{6}{1-(-1+h)} - \dfrac{6}{1-(-1)} = \dfrac{6}{2-h} - \dfrac{6}{2} = \dfrac{12-12+6h}{2(2-h)} = \dfrac{6h}{2(2-h)} > 0 \Rightarrow\nearrow$

d) $f(0+h) - f(0) = 1+\sqrt{h+2} - 1 - \sqrt{2} = \sqrt{h+2} - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \nearrow$ (creciente)

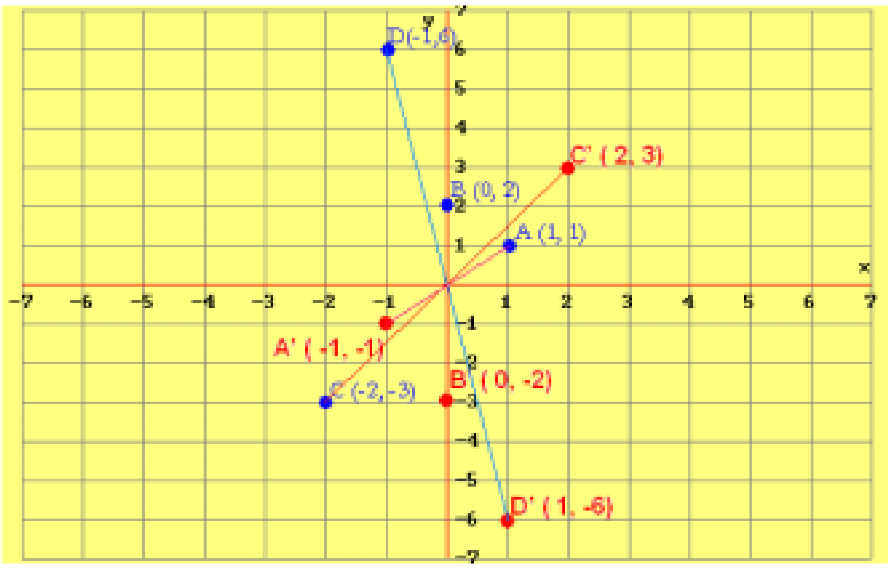
✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

⑨ Halla los puntos simétricos de **A (1, 1)** , **B (0, 2)** , **C (-2, -3)** y **D(-1,6)** respecto de:

a) El origen de coordenadas.

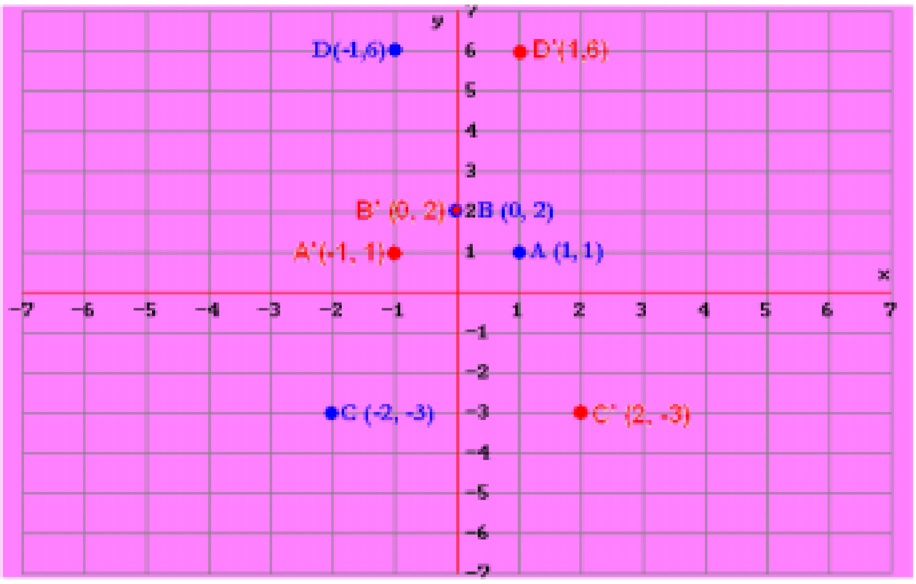
b) El eje de ordenadas.

a) A' (-1, -1) B' (0, -2) C' (2, 3) D' (1, -6)



El simétrico respecto del origen de (x, y) es (-x, -y)

b) A'(-1, 1), B' (0, 2), C' (2, -3), D'(1,6)



El simétrico respecto del eje de ordenadas de (x, y) es (-x, y).

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

11 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = -x^2$.

c) $f(x) = x\,|x|$

d) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2$

f) $f(x) = \dfrac{6}{x}$

a) $f(-x) = - x = - f(x)$, luego tiene simetría respecto del origen de coordenadas.

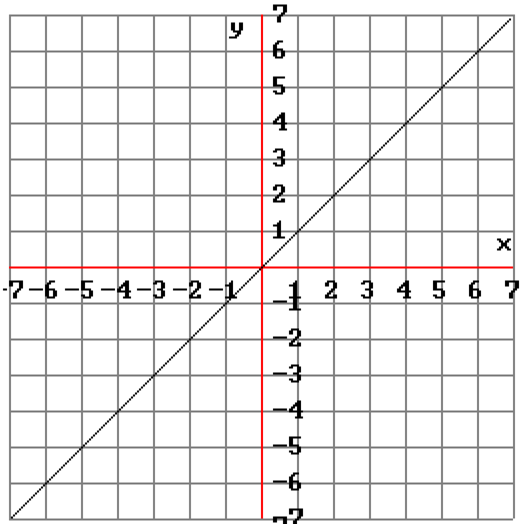
b) $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, simetría respecto del eje de ordenadas.

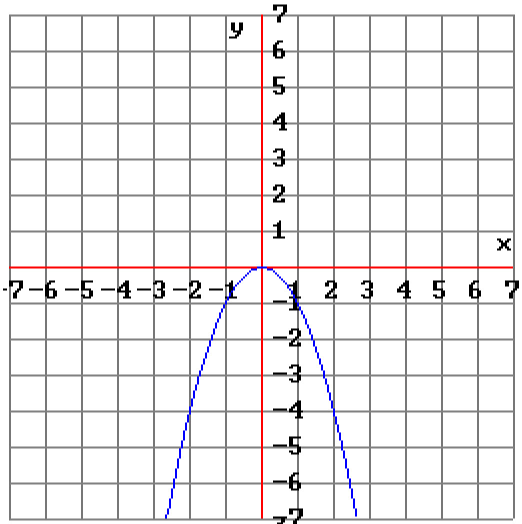
c) $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$, simetría respecto del origen.

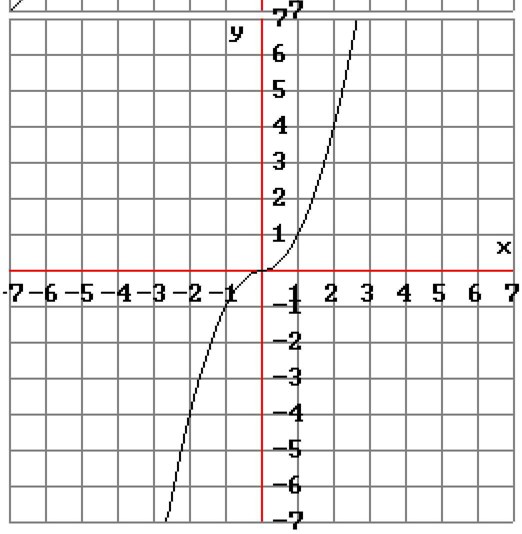
d) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + (-x) = - x^5 - x^3 - x = - (x^5 + x^3 + x) = - f(x)$, simétrica respecto del origen de coordenadas.

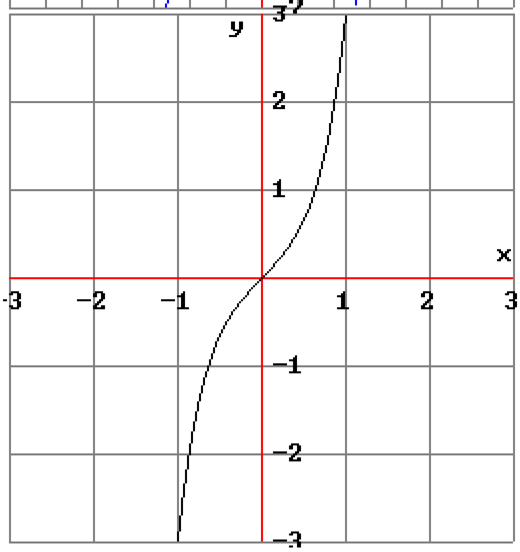
e) $f(-x) = (-x)^6 + (-x)^4 + (-x)^2 = x^6 + x^4 + x^2 = f(x)$, simétrica respecto del eje de ordenadas.

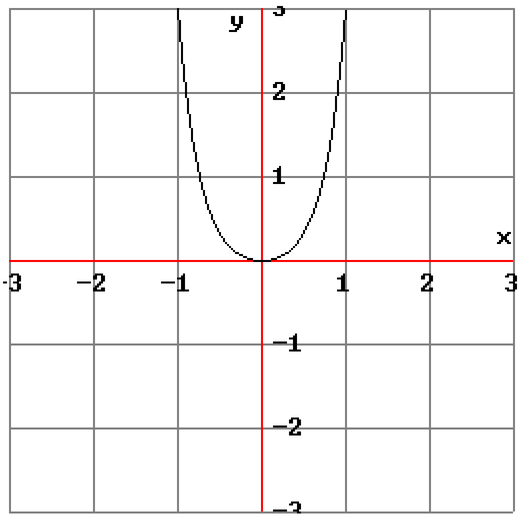
f) $f(-x) = \dfrac{6}{-x} = -\dfrac{6}{x} = -f(x)$, simétrica respecto del origen de coordenadas.

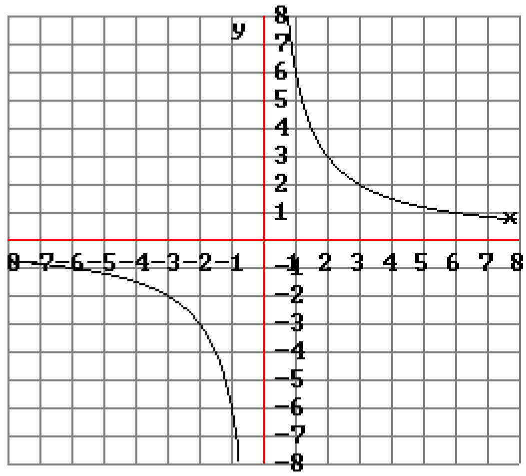

y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7


y
x
-3 -2 -1 1 2 3


y
x
-3 -2 -1 1 2 3

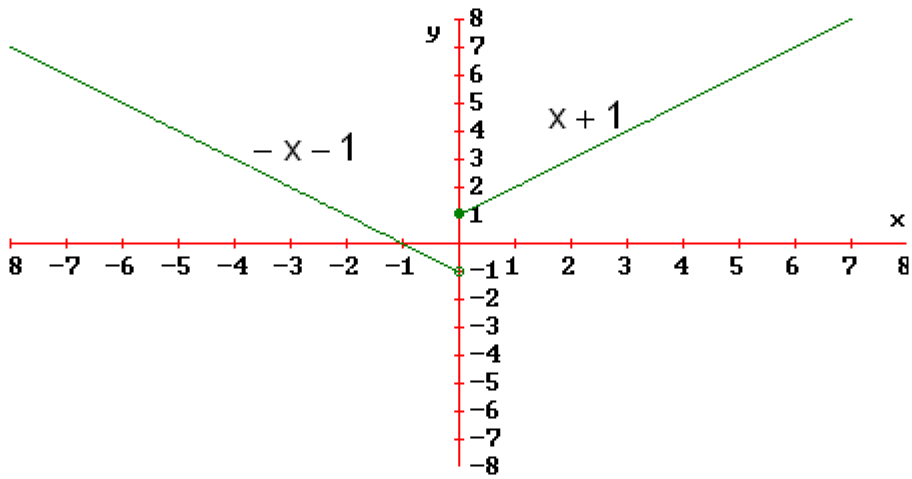

y
x
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

13 Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

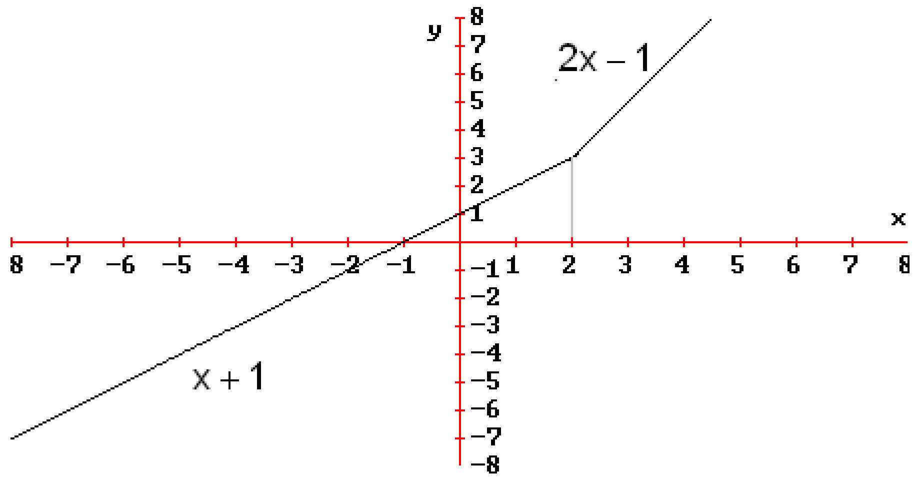
a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Las funciones en cada trozo o intervalo son continuas pues son polinómicas de primer grado, el problema reside en el punto de separación de ambos intervalos x = 0, a la izquierda 0 + 1 = 1 y a la derecha 0 – 1 = - 1, luego es discontinua en x = 0:



b) En cada intervalo, por tratarse de funciones lineales son continuas en su intervalo de definición, vemos que ocurre en el punto frontera x = 2, a la izquierda 2 + 1 = 3, y a la derecha 2· 2 – 1 = 3 = f(2), luego la función es continua en $\mathbb{R}$.



14 Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

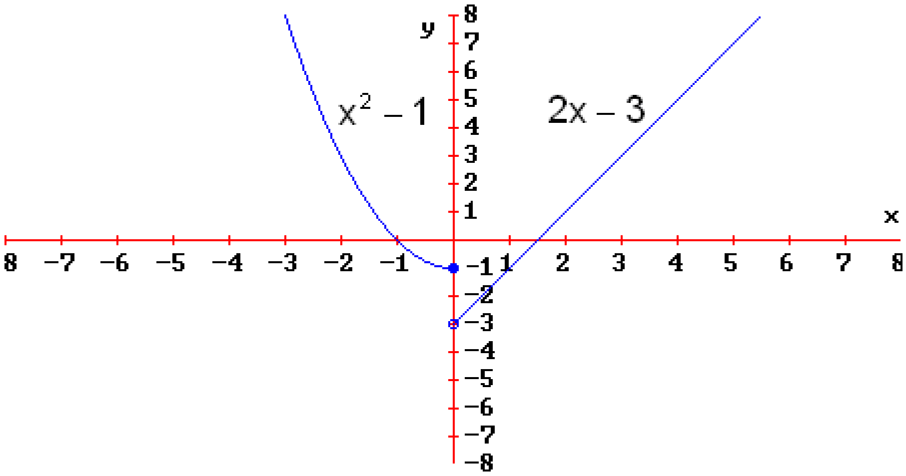
a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x-3 & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) En cada intervalo de definición la función es continua ya que son ambas polinómicas, vemos que ocurre en el punto de separación:

A la izquierda de 0 tiende a: $0^2 - 1 = -1$.
A la derecha de 0, tiende a : $2 \cdot 0 - 3 = -3$.

Como no son iguales es discontinua en x = 0.



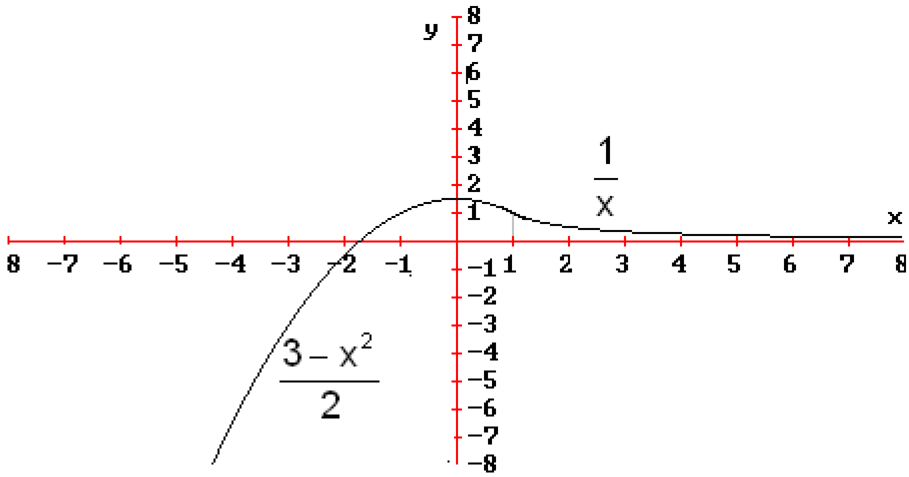
b) En cada intervalo de definición la función es continua ya que la primera es polinómica y la segunda (racional) es discontinua en x = 0, que cae fuera de su intervalo de definición (x > 1), vemos que ocurre en el punto de separación:

A la izquierda de 1 tiende a: $\dfrac{3-1^1}{2}=1.$

A la derecha de 1, tiende a : $\dfrac{1}{1}=1.$

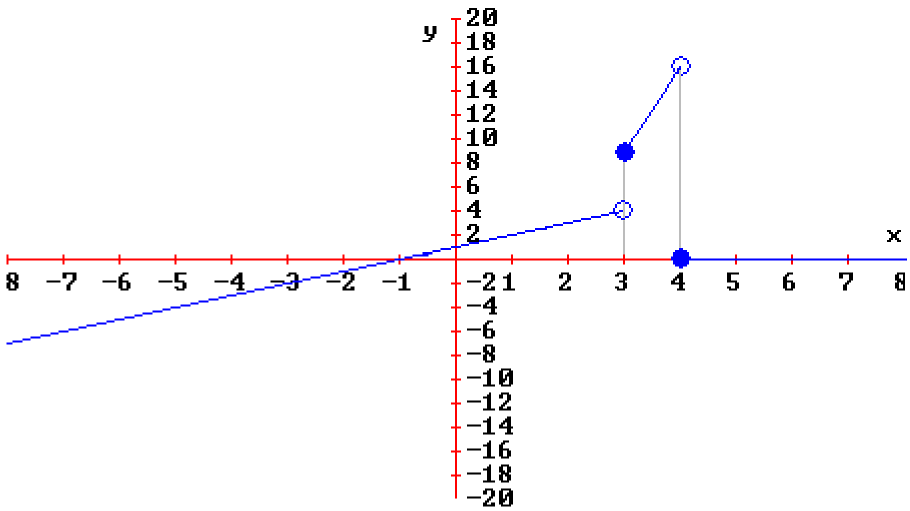
En x = 1, f(1) = $\dfrac{3-1^2}{2}=1$

Como no son iguales es continua en x = 1 y por tanto en $\mathbb{R}$



15 Representa la siguiente función e indica si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<3 \\ x^2 & 3\le x<4 \\ 0 & x\ge 0 \end{cases}$$



Tiene dos discontinuidades:

- En x = 3 $\begin{cases}\text{Por la izquierda tiende a } 3+1=4 \\ \text{Por la derecha tiende a } 3^2=9\end{cases}$

- En x = 4 $\begin{cases}\text{Por la izquierda tiende a } 4^2=16 \\ \text{Por la derecha tiende a } 0\end{cases}$

16 Comprueba que la función $f(x) = x^2$ es:

a) Decreciente en el intervalo $]-\infty, 0]$.
b) Creciente en el intervalo $[0, +\infty[$.

TV $[x, x+1] = f(x+h) – f(x) = (x + h)^2 – x^2 = x^2 + 2hx + h^2 – x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$

a) Para $x < 0$, como h es un valor infenitesimal positivo $h(2x+h) < 0$, luego es decreciente.

b) Para $x > 0$, como h es un valor infenitesimal positivo $h(2x+h) > 0$, luego es creciente.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

17 Comprueba que la función lineal $f(x) = ax$ es:

a) Creciente, si $a > 0$.
b) Decreciente, si $a < 0$.

Hallamos la tasa de variación:

$TV[x, x+h] = f(x+h) – f(x) = a(x +h) – ax = ax + ah – ax = ah$

a) Como $h >0$, si $a > 0$ $ah >0$ y función creciente.

b) Como $h > 0$, si $a < 0$, $ah < 0$ y la función es decreciente.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

18 Comprueba que la función lineal $f(x) = ax + b$ es:

a) Creciente, si $a > 0$.
b) Decreciente, si $a < 0$.

Hallamos la tasa de variación:

$TV[x, x+h] = f(x+h) – f(x) = a(x +h) + b – (ax + b) = ax + ah + b – ax - b = ah$

a) Como $h >0$, si $a > 0$ $ah >0$ y función creciente.

b) Como $h > 0$, si $a < 0$, $ah < 0$ y la función es decreciente.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

19 Calcula el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$, en $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, en x = 2

a) $f(1)=\dfrac{1+1}{1^2-1}=\dfrac{2}{0}$ Ind, descomponemos simplificamos y volvemos a sustituir:

$f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1-1}=\dfrac{1}{0}$, vuelve a dar indeterminado, la función no existe en x = 1 pues es un punto que anula el denominador, x = 1 no pertenece al dominio.

b) $f(2)=\dfrac{2^2-5\cdot 2+6}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ Ind, descomponemos simplificamos y volvemos a sustituir:

$f(x)=\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)}=(x-3)$, luego f(2) = 2 – 3 = - 1.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

PROBLEMAS PARA APLICAR

20 Cuando hay que cambiar la rueda de un coche se utiliza un aparato llamado «gato». Supongamos que la altura inicial de la pestaña que se inserta en la carrocería para levantar el coche es 25 cm y que cada 3 vueltas de manivela se consigue subir la pestaña 1 cm. ¿A qué altura estará la pestaña, respecto del suelo, después de 15 vueltas? ¿y después de 24 vueltas? Halla la ecuación que da la altura respecto del suelo de la pestaña en función del número de vueltas. ¿Cuántas vueltas habrá que dar a la manivela para situar la pestaña a 60 cm del suelo?

Sea :
x = nº de vueltas.
y = f(x) = Altura

La función que relaciona ambas variables es :

Altura : altura inicial + altura por vuelta · nº de vueltas

Que en lenguaje algebraico es: y = 25 + 1 ·x/3

$f(15)=25+\dfrac{15}{3}=25+5=30$ cm

$f(15)=25+\dfrac{24}{3}=25+8=33$ cm

Si y = 60 cm $\Rightarrow 60=25+\dfrac{x}{3}\Leftrightarrow\dfrac{x}{3}=60-25=35\Leftrightarrow x=35\cdot 3=105$ vueltas

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

21 Una empresa de alquiler ofrece dos contratos diferentes:

Contrato A: 5000 PTA/día y kilometraje ilimitado.

Contrato B: 1 000 PTA/día y 10 PTA por kilómetro.

Un turista quiere hacer un viaje de 10 días, pero no sabe exactamente cuántos kilómetros va a recorrer. Se pide:

a) Determinar cuál de los dos contratos es más económico en función de los kilómetros recorridos.

b) Calcular cuántos kilómetros ha de recorrer el viajero para que los dos contratos sean igual de económicos.

c) Hacer una representación gráfica y comprobar geométricamente los resultados anteriores.

Sea x = km recorridos al cabo de 10 días
y = f(x) = importe en pesetas.

Con el primer contrato pagaría: $y = 5\,000 \cdot 10 = 50\,000$ pta.
Con el segundo contrato pagaría $y = 1\,000 \cdot 10 + 10\,x = 10\,000 + 10x$

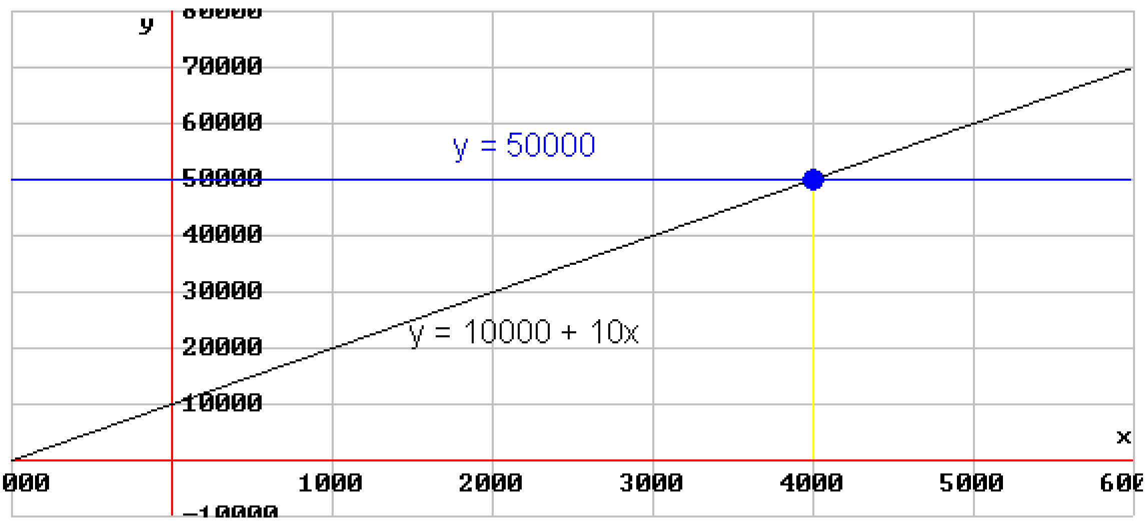
a) Si igualamos importes para ver a partir de que km es igual el coste:

$$50\,000 = 10\,00 + 10x;\ 40\,000 = 10x;\ x = 40\,000/10 = 4\,000 \text{ km}$$

a partir de los 4 000 km es más rentable el primer contrato, menos de 4 000 km es más rentable el segundo, cuando x = 4 000 km los dos contratos cuestan lo mismo.

b) Ya lo hemos visto en el apartado anterior, x = 4 000 km.

c)



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

CUESTIONES PARA ACLARARSE

㉒ Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. ¿Puede tomar x valores negativos? ¿y el valor x = 0?

No puede tomar valores negativos pues la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

Si puede x ser nula ya que $\sqrt{0}=0$.

✧✧✧⌖⌖✧⌖⌖✧✧✧

㉓ Para un valor fijo x = a del dominio de una función, ¿le pueden corresponder distintos valores f(a)?

No pues en una función a cada valor de la variable independiente del dominio (D) le corresponde un único valor de la variable dependiente en el recorrido (R). Es una aplicación de ℝ en ℝ : $\begin{array}{l} D \xrightarrow{f} R \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$

✧✧✧⌖⌖✧⌖⌖✧✧✧

㉔ ¿Qué funciones tienen por recorrido un solo valor? Pon un ejemplo.

Las funciones constantes, las que dependen de la variable independiente (x) :

y = k, por ejemplo y = -3

✧✧✧⌖⌖✧⌖⌖✧✧✧

㉕ ¿Hay alguna función que pueda ser a la vez simétrica respecto al origen y simétrica respecto al eje de ordenadas?

No, no sería una función, pues si f(-x) = - f(x) (simetría respecto del origen), no puede cumplirse f(-x) = f(x) (simetría respecto del eje de ordenadas).

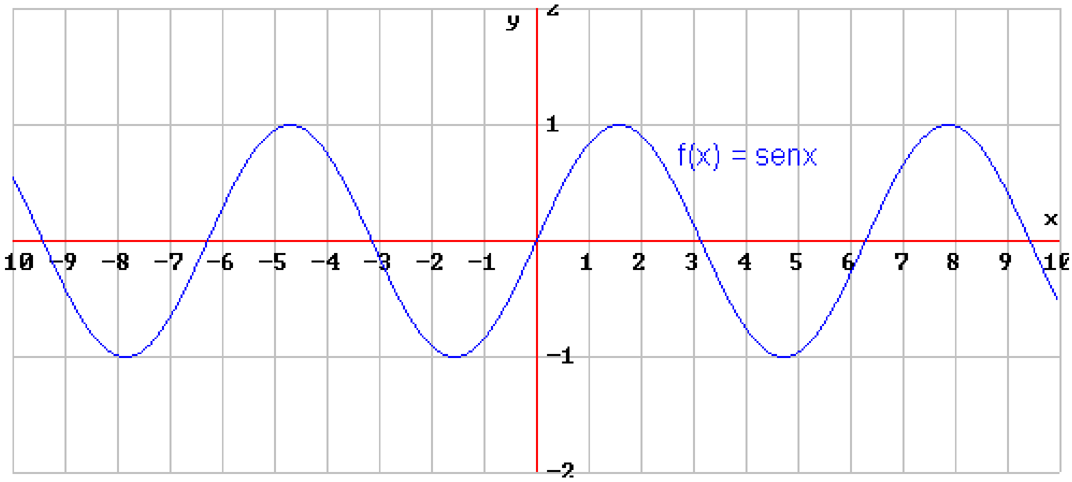
Una circunferencia cumpliría ambas simetrías, pero $x^2 + y^2 = 1$ que es la ecuación de una circunferencia de radio unidad y centro el origen, es una ecuación pero no se puede considerara una función ya que para algunos valores de x hay dos valores de y.

✧✧✧⌖⌖✧⌖⌖✧✧✧

㉖ ¿Puede una función cortar en más de un punto al eje de ordenadas? ¿y al eje de abscisas?

No puede cortar a más de un punto en el eje vertical pues ello supondría que para x = 0, f(0) no es único, no es una función.

Una función puede cortar al eje horizontal, en dos puntos (como algunas parábolas) y en infinitos puntos como ocurre con las funciones trigonométricas.



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

㉗ Si la tasa de variación de una función en el intervalo [2, 2,00001] es positiva, ¿quiere decir que la función es creciente en el punto x = 2?

No, puede suceder que en un intervalo comprendido en el dado la TV cambie de signo.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

㉘ La función identidad i asocia a cada x el mismo valor, es decir, i(x) = x. ¿Es continua? ¿Cuál es su dominio y su recorrido?

Sí es continua, su dominio y recorrido son iguales = $\mathbb{R}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧