① *Copia en tu cuaderno y rellena con sí o no la siguiente tabla:*

Número	7	$\sqrt{10}$	-2,08	1,1212212221...	$\sqrt{25}$	-2,2424...	$\sqrt{-4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{-8}{2}$
¿Natural?	Sí	No	No	No	Sí	No	No	No	No
¿Entero?	Sí	No	No	No	Sí	No	No	No	No
¿Racional?	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí
¿Irracional?	No	Sí	No	Sí	No	No	No	No	No
¿Real?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí

- - - oo0oo - - -

② *Indica cuál de los siguientes números es racional o irracional:*

a) 3,222 2... $= 3,\widehat{2}$, como las infinitas cifras decimales son periódicas, es racional.

b) 0,437 537 537...= $0,4\overline{375}$, como las infinitas cifras decimales son periódicas, es racional.

c) 0,1 01 001 0001 00001..., como las infinitas cifras decimales no son periódicas es irracional.

- - - oo0oo - - -

③ *De estos números. ¿Cuáles son racionales y cuáles no?*

a) 0,494 949... $= 0,\overline{49}$ como las cifras decimales son periódicas, es racional.

b) $\sqrt{7}$ = 2,6457513...,es irracional pues tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

c) 0,14 1144 111444...,es irracional pues tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

- - - oo0oo - - -

④ *Indica cuál es el más grande de los siguientes números:*

a) 1,41421365 < 1,41422365 ya que 1 < 2.
b) 1,001000100001... > 0,100100001 ya que 1 > 0.
c) 3,14159255535.. < 3,14159265535... ya que 5 < 6.

- - - oo0oo - - -

⑥ *¿Qué número multiplicado por sí mismo da?:*

a) 1,21 = 1,1 · 1,1 b) 10,24 = 3,2 · 3,2 c) 151,29 = 12,3 · 12,3

d) 20,7936 = 4,56 · 4,56.

- - - oo0oo - - -

⑦ *¿Qué número multiplicado por sí mismo da 10? Sólo puedes utilizar la tecla de la multiplicación de tu máquina de calcular.*

3 · 3 = 9 (menor) 4·4 = 16 (Mayor) 3,5 ·3,5 = 12,25 (M) 3,2 ·3,2 = 10,24 (M)
3,1 ·3,1 = 9,61(m) 3,15 · 3,15 = 9,9225 (m) 3,16 · 3,16 = 9,9856 (m)
3,17 · 3,17 = 10,0489 (M) 3,165 · 3,165 = 10,017225 (M) 3,161 · 3,161 = 9,991921(m)
3,162 · 3,162 = 9,998244 (m) 3,163 · 3,163 = 10,004569 (m)
3,1625 · 3,1625 = 10,001406 3,1621 · 1,1621 = 9,9988764 (m)
3,1622 · 3,1622 = 9,9995088 3,1623 · 3,1623 = 10,000141 etc.

- - - oo0oo - - -

⑨ *Escribe los siguientes números en forma decimal y con las mínimas cifras para que el error sea menor que una centésima:*

a) $\frac{1}{16} = 0{,}06$ b) $\pi = 3{,}14$ c) $\sqrt{3} = 1{,}73$ d) $\frac{5}{9} = 0{,}56$

- - - oo0oo - - -

⑩ *Escribe cuatro intervalos encajados cualesquiera en los cuales se encuentre* $\sqrt{8}$ *:*

Como $\sqrt{8} = 2{,}8284271...$

Intervalos		Error menor que
Entero	$2 < \sqrt{8} < 3$	1 unidad
Décimas	$2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$	1 décima
Centésimas	$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83$	1 centésima
Milésimas	$2{,}828 < \sqrt{8} < 2{,}829$	1 milésima

- - - oo0oo - - -

⑪ *Escribe cuatro intervalos encajados en los cuales se encuentre* $\sqrt{8}$*, siendo el error en el primero menor que una unidad,*

Como en el ejercicio anterior:

Intervalos		Error menor que
Entero	$2 < \sqrt{8} < 3$	1 unidad
Décimas	$2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$	1 décima
Centésimas	$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83$	1 centésima
Milésimas	$2{,}828 < \sqrt{8} < 2{,}829$	1 milésima

- - - oo0oo - - -

12 *Escribe cuatro intervalos encajados en los cuales se encuentre $\sqrt{8}$, siendo el error en el primero menor que una centésima.*

Intervalos		Error menor que
Centésimas	$2,82 < \sqrt{8} < 2,83$	1 centésima
Milésimas	$2,828 < \sqrt{8} < 2,829$	1 milésima
Dezmilésimas	$2,8284 < \sqrt{8} < 2,8285$	1 diezmilésima
Cienmilésimas	$2,82842 < \sqrt{8} < 2,82843$	1 cienmilésima

- - - oo0oo - - -

13 *Expresa $\sqrt{5}$ por los primeros términos (3 o 4) de una sucesión de números decimales:*

a) *Por defecto, ¿Qué error máximo se comete en cada término?*
b) *Por exceso, ¿Qué error máximo se comete en cada término?*

Aproximación		$\sqrt{5}$
Defecto	**Exceso**	**Error menor que**
2	3	*1 unidad*
2,2	2,3	*1 décima*
2,23	2,24	*1 centésima*
2,236	2,237	*1 milésima*

- - - oo0oo - - -

14 *Se sabe que un número real viene dado por la siguiente sucesión de intervalos encajados:*

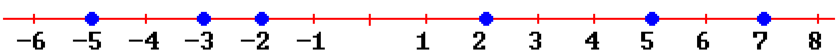
[1, ...], [1,2,...], [..., 1,26], [1,259, ...]

Halla los números que faltan en cada intervalo,

[1, 2], [1,2, 1,3], [1,25, 1,26], [1,259, 1,260]

- - - oo0oo - - -

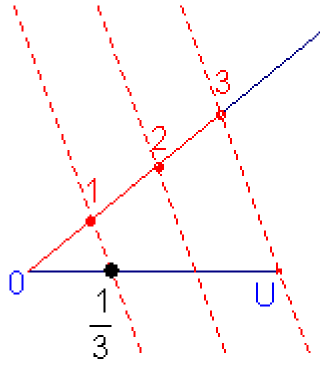
15 *Utilizando el compás, representa en la recta real los siguientes números: 2, 5, 7, -2, -3, -5,*



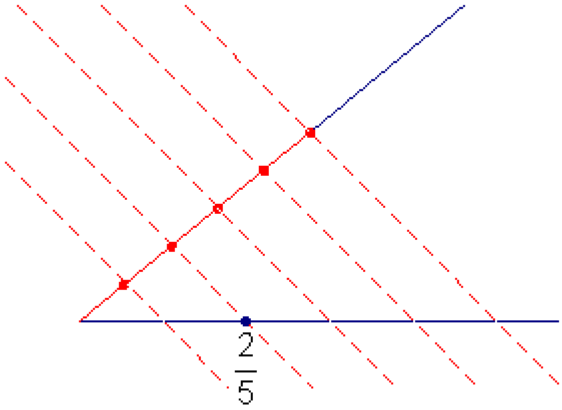
- - - oo0oo - - -

⑯ *Utilizando el teorema de Tales, representa en la recta real los siguientes números:*

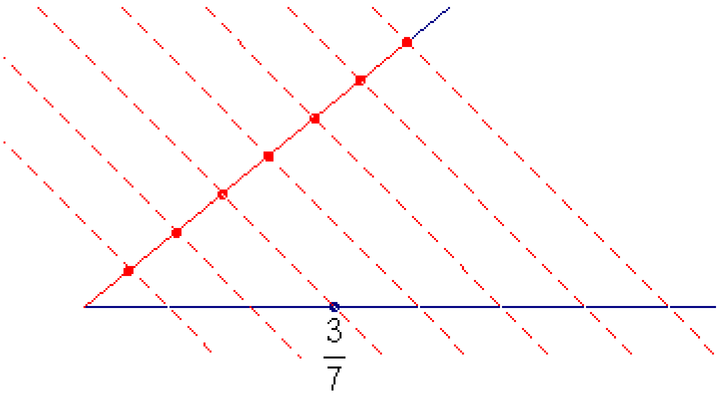
a)



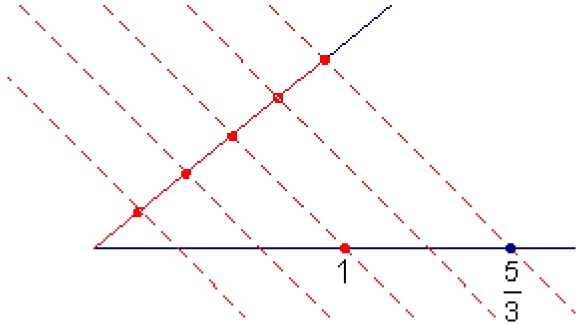
b)



c)



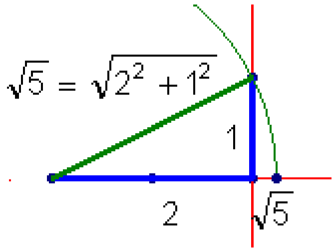
d)



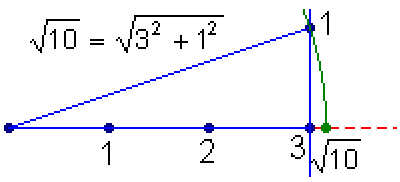
- - - oo0oo - - -

17 *Representa en la recta real los siguientes números utilizando el teorema de Pitágoras:*

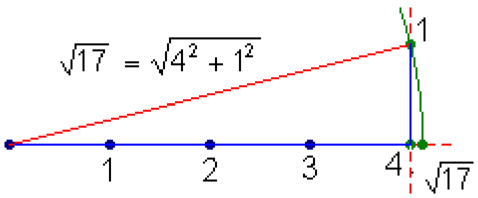
a)



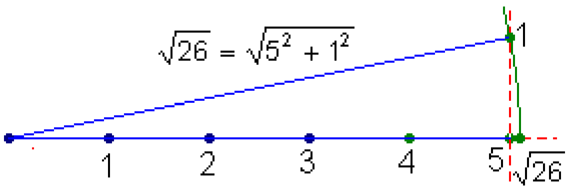
b)



c)

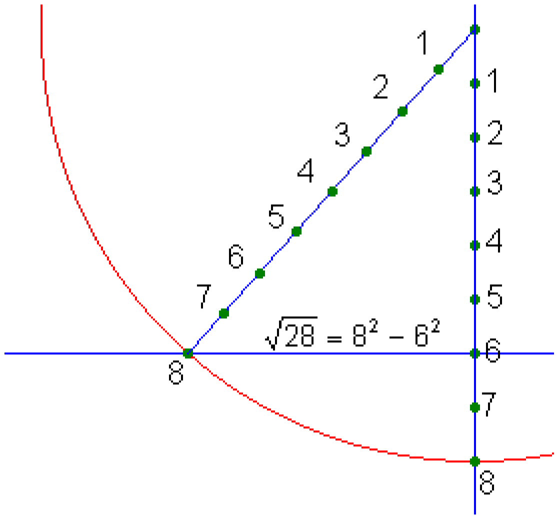


d)



- - - oo0oo - - -

19 *Algunas veces un número puede expresarse como diferencia de dos cuadrados, Por ejemplo,* $28 = 8^2 - 6^2$, *Utilizando el teorema de Pitágoras, representa* $\sqrt{28}$ *en la recta real.*



- - - oo0oo - - -

20 *¿Cuál de los dos números* $\frac{4}{5}$ o $\frac{5}{6}$ *es mayor? Compruébalo de dos formas.*

$$\text{Comparar } \frac{4}{5} \text{ y } \frac{5}{6} \begin{cases} \text{Reduciendo a comun denominador (numerador)} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{24}{30} < \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \\ \text{Multiplicando en cruz} \rightarrow 4 \cdot 6 = 24 < 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow \frac{4}{5} < \frac{5}{6} \end{cases}$$

- - - oo0oo - - -

22 *Escribe cinco números reales comprendidos entre 0,005 712 751 y 0,005 712 752.*

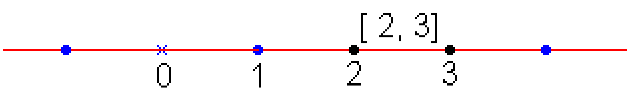
0,005 712 751 < 0,005 712 751 3 < 0,005 712 751 5 < 0,005 712 751 6 < 0,005 712 751 7 < 0,005 712 751 9 < 0,005 712 752

- - - oo0oo - - -

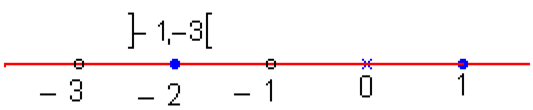
23 *Representa en la recta real los siguientes intervalos:*

a) [2, 3]
b)]-1, -3[

a)



b)



- - - oo0oo - - -

24 *Si se elige 3,33 como aproximación de $\frac{10}{3}$ se ha cometido un error, Calcula:*

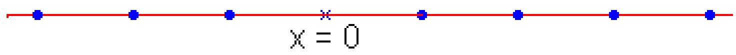
a) Error absoluto : $\varepsilon = \frac{10}{3} - 3{,}33 = \frac{10}{3} - \frac{333}{100} = \frac{1000 - 999}{300} = \frac{1}{300}$

b) Error relativo: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{v} \cdot 100 = \frac{1/300}{10/3} \cdot 100 = 0{,}1\,\%$

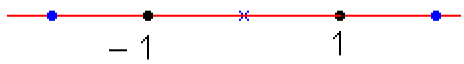
- - - oo0oo - - -

25 *Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:*

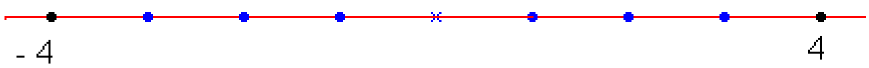
a) |x| = 0 ; x = 0



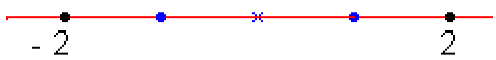
b) |x| = 1 $\begin{cases} x = 1 \\ -x = 1 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$



c) |x| = 4 $\begin{cases} x = 4 \\ -x = 4 \Leftrightarrow x = -4 \end{cases}$



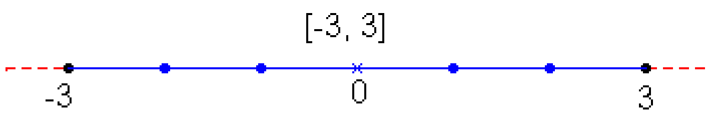
d) |x| = |-2| = 2 $\begin{cases} x = 2 \\ -x = 2 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$



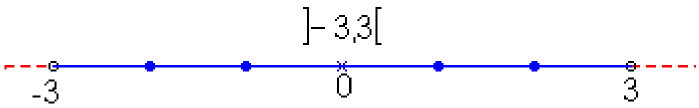
- - - oo0oo - - -

26 *Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:*

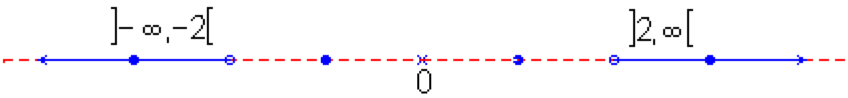
a) $|x| \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ y \\ -x \le 3 \Leftrightarrow x \ge -3 \end{cases} \quad -3 \le x \le 3 \equiv [-3{,}3]$



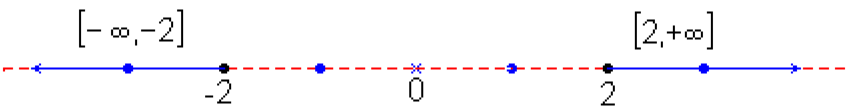
b) $|x| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ y \\ -x < 3 \Leftrightarrow x > -3 \end{cases} \quad -3 < x < 3 \equiv]-3{,}3[$



c) $|x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ o \\ -x > 2 \Leftrightarrow x < -2 \end{cases} \equiv \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,\infty\right[$



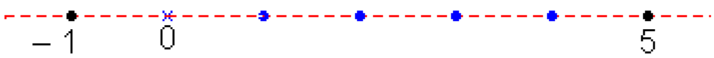
d) $|x| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ o \\ -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{cases} \equiv \left[-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right]$



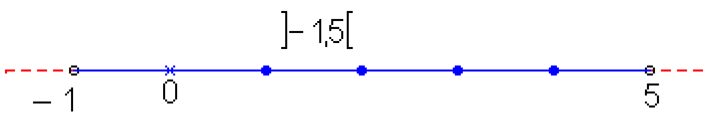
- - - oo0oo - - -

27 *Dibuja en la recta real los puntos x tales que:*

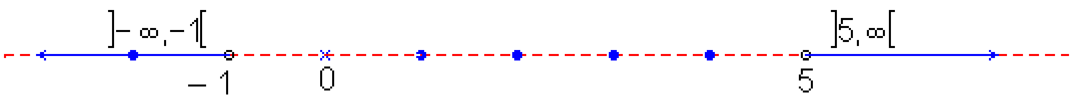
a) $|x-2| = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2=3 \Leftrightarrow x=3+2=5 \\ ó \\ -(x-2)=3 \Leftrightarrow -x+2=3 \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1 \end{array} \right\}$



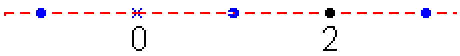
b) $|x-2| < 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2<3 \Leftrightarrow x<3+2=5 \\ y \\ -(x-2)<3 \Leftrightarrow -x+2<3 \Leftrightarrow -x<1 \Leftrightarrow x>-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow \left]-1,5\right[$



c) $|x-2| > 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2>3 \Leftrightarrow x>3+2=5 \\ y \\ -(x-2)>3 \Leftrightarrow -x+2>3 \Leftrightarrow -x>1 \Leftrightarrow x<-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left]-\infty,-1\right[\cup \left]5,\infty\right[$



d) $$|x-2| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2=0 \Leftrightarrow x=0+2=2 \\ \text{ó} \\ -(x-2)=0 \Leftrightarrow -x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2 \end{array} \right\}$$

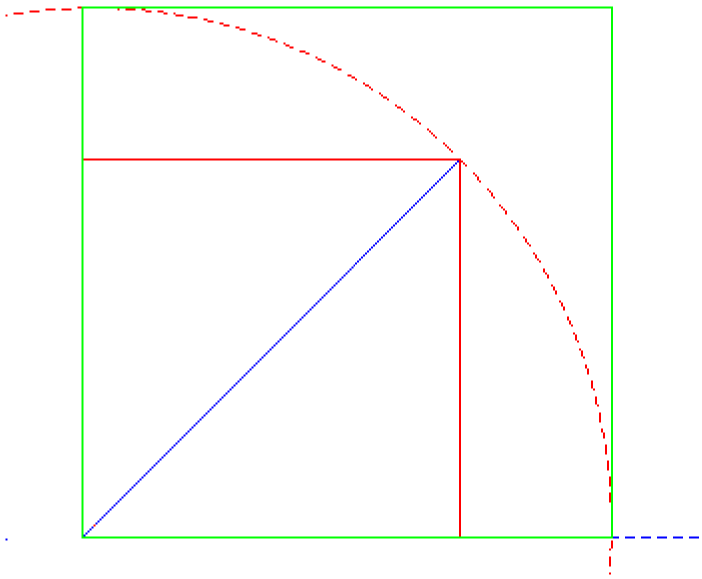


- - - oo0oo - - -

28 *Dibuja un cuadrado de 5 cm de lado. Sin calcular el lado, dibuja otro cuadrado que tenga área doble.*

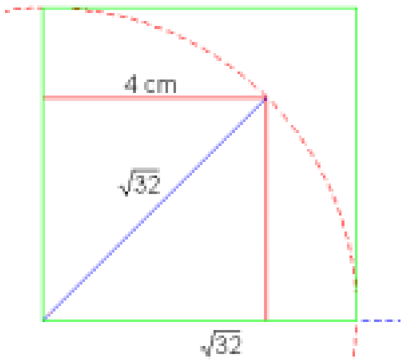
Dibujamos el cuadrado de lado 5 cm, trazamos una diagonal que medirá $5\sqrt{2}$ y ahora construimos otro cuadrado de lado igual a la diagonal cuyo área es:

$A = l^2 = (5\sqrt{2}) = 25 \cdot 2 = 50 \text{ cm}^2$, doble del área del original.



- - - oo0oo - - -

29 *Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado. A partir de éste, dibuja un segmento que sea la raíz cuadrada de 32.*

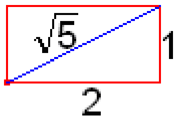


Como $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2 \cdot 4^2}$, el segmento pedido será la diagonal del cuadrado de lado 4 cm.

- - - oo0oo - - -

30 *Dibuja un rectángulo cuya diagonal valga 5.*

Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ los lados del rectángulo han de medir 2 cm y 1 cm.



- - - oo0oo - - -

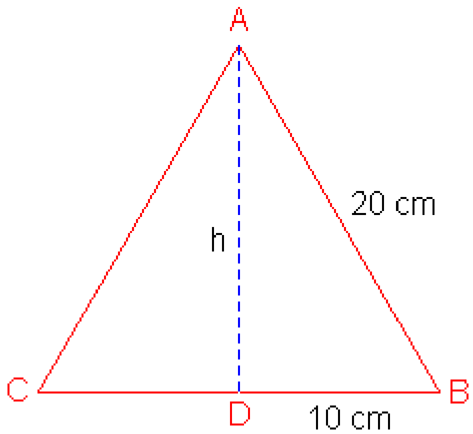
31 *Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 10 cm y 12 cm. Expresa el resultado con dos decimales.*

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244} = 15{,}62 \text{ cm}$$

- - - oo0oo - - -

33 *Calcula la altura de un triángulo equilátero de 20 cm de lado y expresa el resultado con dos decimales exactos.*



Si en la mitad del triángulo equilátero ABC, el triángulo rectángulo ABD, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular h que es uno de los catetos tenemos :

$$h = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

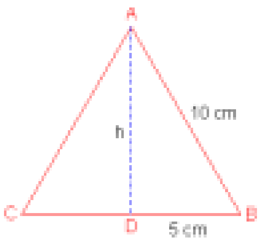
- - - oo0oo - - -

34 *Calcula el área de un círculo de 100 cm de radio y expresa el resultado con tres decimales exactos.*

Área del círculo = A = $\pi r^2 = \pi \cdot 100^2 = 31\,415{,}926 \text{ cm}^2$

- - - oo0oo - - -

35 *Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm. Expresa el resultado con tres decimales.*



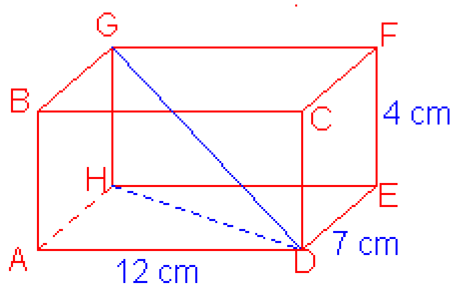
Como el área de un triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2}$, necesitamos hallar la altura como hemos hecho en el ejercicio 33:

$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}660$ cm

Luego $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 8{,}660}{2} = 43{,}301\ \text{cm}^2$

- - - oo0oo - - -

36 Las dimensiones de un aula son 12 m de largo, 7 m de ancho y 4 m de alto. Dos moscas revolotean por el aula. ¿Cuál es la distancia máxima a que pueden encontrarse?



La máxima distancia a que pueden encontrarse es la longitud del segmento GD. Para calcular la longitud GD necesitamos primero hallar la longitud HD, diagonal del rectángulo ADEH, aplicando el teorema de Pitágoras:

$\overline{HD} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$ cm

ahora hallamos GD:

$$\overline{GD} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \left[\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2}\right]} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{209} = 14{,}46\,\text{cm}$$

- - - oo0oo - - -

37 El patio de una cárcel es un cuadrado de 50 m de lado. Un recluso pasea recorriendo el perímetro del cuadrado con una velocidad constante, y otro lo hace sobre la diagonal AB con la misma velocidad. Si parten simultáneamente del punto A, ¿volverán a encontrarse? Razona la respuesta.

No coincidirán de nuevo ya que la diagonal es un número irracional y sus múltiplos también lo serán y el perímetro es racional, luego no pueden coincidir números irracionales y racionales ya que ocupan lugares diferentes de la recta real.

- - - oo0oo - - -

38 ¿Qué diferencia hay entre las expresiones decimales de un número racional y de un número irracional? Pon ejemplos.

La parte decimal de un número irracional es infinita no periódica y de un número racional es periódica. Por ejemplo $\begin{cases} \frac{1}{3} = 1{,}3333.... \\ \sqrt{2} = 1{,}414213562... \end{cases}$

- - - oo0oo - - -

39 *¿Podrás encontrar una fracción que exprese exactamente el número $\sqrt{2}$?*

No, lo demostraremos por reducción al absurdo:

Supongamos que no es cierto que $\sqrt{2}$ es racional, existirán dos números enteros, a y b, tal que se cumpla que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$.En la descomposición factorial de a^2, el dos debe estar un número par de veces (está al cuadrado), mientras que en la de $2b^2$ estará un número impar de veces, luego nunca puede a^2 ser igual a $2b^2$, en contra de los que habíamos supuesto, cono se llega a una contradicción la suposición inicial es falsa y $\sqrt{2}$ es irracional.

- - - oo0oo - - -

40 *Si la raíz cuadrada de un número es irracional, ¿el número ha de ser forzosamente irracional? Pon dos ejemplos que sirvan de comprobación.*

No $\sqrt{2}$ y$\sqrt{3}$ son irracionales y sin embargo ni 2 ni 3 lo son.

- - - oo0oo - - -

41 *Un alumno dice que entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ hay muchísimos números. ¿ Crees que es cierto.*

No, no hay muchísimos hay infinitos.

- - - oo0oo - - -

42 *Otro alumno dice que entre $\sqrt{2}$ y 1,4142 no hay ningún número, ya que son iguales. ¿Es cierta esta afirmación?*

Como hemos visto en ejercicio 39, $\sqrt{2}$ es irracional y un número irracional tiene infinitas cifras decimales, no cuatro.

- - - oo0oo - - -

43 *Si la letra x representa un número positivo, ¿cuál de los números $\frac{x}{3}$ y $\frac{2x}{5}$ es mayor?*

Como 5x < 6x $\frac{x}{3} < \frac{2x}{5}$

- - - oo0oo - - -

44 *Si la letra x representa un número negativo, ¿cuál de los números $\frac{x}{3}$ y $\frac{2x}{5}$ es mayor?*

Ahora es al contrario 5x > 6x y por tanto $\frac{x}{3} > \frac{2x}{5}$

- - - oo0oo - - -

④⑤ ***Los números*** $2,\widehat{4}$ ***y 2,444444 son iguales. ¿Es cierto? Si no es así, escribe algún número que esté entre ellos.***

No, de hecho el error absoluto es:

$$\varepsilon = \left|2,\widehat{4} - 2,444444\right| = \left|\frac{24-2}{9} - \frac{2444444}{1000000}\right| = \left|\frac{22000000 - 21999996}{9000000}\right| = \left|\frac{4}{9000000}\right| = \frac{1}{2250000}$$

$$2,444444 < 2,4444444 < 2,\widehat{4}$$

- - - oo0oo - - -