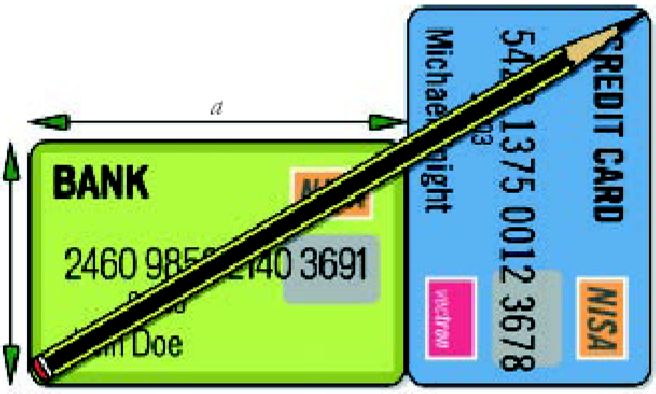
PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

1. Tarjetas con oro

*Las tarjetas de banda magnética utilizadas en los cajeros automáticos o en las cabinas telefónicas son **rectángulos áureos**.*
*Si mides las dimensiones de una de ellas y calculas la razón a/b obtendrás el **número de oro**:*

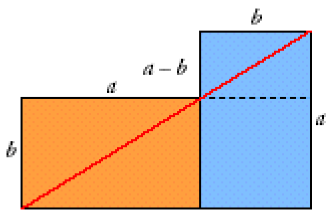


$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots \textit{(Compruébalo)}.$$

… y es que con otras dimensiones nos parecería una tarjeta poco armónica o desproporcionada.
Demuestra que, efectivamente, la relación a/b es el número de oro.

Ayuda: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋



Si partimos de la figura adjunta , al ser los rectángulos proporcionales, se cumple :

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, y llamando $x = \frac{a}{b}$, tenemos :

$$x = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a-b}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b}-\frac{b}{b}} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0,$$ ecuación de 2º grado cuya raíz positiva (*¿por qué?*) es : $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ como queríamos demostrar.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

2. Calcula el valor de...

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

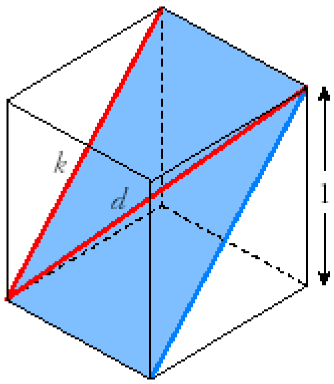
✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}+3-2\sqrt{2}}=\sqrt{6-2\sqrt{9-(2\sqrt{2})^2}}=\sqrt{6-2\sqrt{9-8}}=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$$

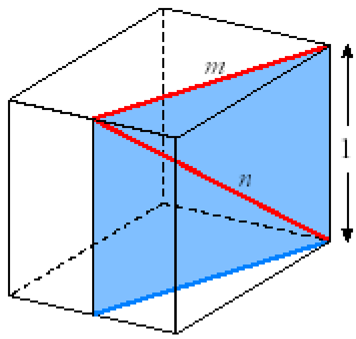
✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

3.Racionales e irracionales en el cubo



En un cubo de arista 1, la diagonal de una cara, k= $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ *y la diagonal del cubo, d=* $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ *son números irracionales.*

Averigua si son racionales o irracionales las distancias m y n señaladas en la figura.



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Aplicando el teorema de Pitágoras :

$$m=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \text{Irracional}\ ,\ n=\sqrt{1+m^2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{Racional}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

4. Ordena de menor a mayor

2^{900} , 7^{300}, 8^{99}, 16^{75}, 25^{150} y 32^{120}

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

① Descomponemos en factores primos aquellas bases que no lo son y aplicamos la propiedad $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$:

2^{900}, 7^{300}, $8^{99} = \left(2^3\right)^{99} = 2^{297}$, $16^{75} = \left(2^4\right)^{75} = 2^{300}$, $25^{150} = \left(5^2\right)^{150} = 5^{300}$, $32^{120} = \left(2^5\right)^{120} = 2^{600}$

② Las potencias obtenidas tienen, salvo 2^{297}, exponentes múltiplos de 100 :

$2^{900} = \left(2^9\right)^{100} = 512^{100}$, $2^{300} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$,$5^{300} = \left(5^3\right)^{100} = 125^{100}$,$2^{600} = \left(2^6\right)^{100} = 64^{100}$
$7^{300} = \left(7^3\right)^{100} = 343^{100}$. Luego podemos comparar las bases de los 5 números que están elevados a 100 que por orden de menor a mayor son :

$8^{100} < 64^{100} < 125^{100} < 343^{100} < 512^{100}$ que se corresponde con: $2^{300} < 2^{600} < 5^{300} < 7^{300} < 2^{900}$, ¿ y el 2^{297} ¿, como 297 < 300 , será el menor, quedando definitivamente ordenados :

$$\mathbf{8^{99} < 16^{75} < 32^{120} < 25^{150} < 7^{300} < 2^{900}}$$

5. Va de velas

De estas dos velas, la más estrecha mide 14 cm y se consumirá totalmente en 3 horas y media. La otra tardará 5 horas en consumirse.
Si las dejamos arder, al cabo de dos horas tendrán la misma altura. ¿Qué altura tiene ahora la vela más ancha?

Si la vela de 14 cm se consume en 3,5 h, en 2 h se habrán consumido 8 cm. La altura de esta vela ahora es de (14 cm – 8 cm =) 6 cm.

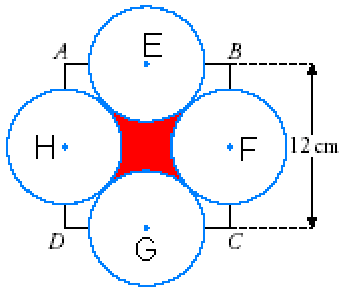
Si suponemos que la otra vela mide *x* cm, en 2 horas se consumirán $\frac{2}{5}x$ cm, luego quedan $\frac{3}{5}x$ cm por consumirse.

En este momento, ambas velas tienen la misma altura. Por tanto:

$\frac{3}{5}x = 6\,\text{cm} \Rightarrow$ **x = 10cm es lo que medía la vela más corta.**

6. Dentro del cuadrado

Calcula el área de la zona coloreada.



El área del cuadrado *ABCD* mide 12^2 = 144 cm^2. Al unir los centros de las cuatro circunferencias se obtiene otro cuadrado *EFGH* de área la mitad del inicial:

$$A_{EFGH} = \frac{A_{ABCD}}{2} = \frac{144\ \text{cm}^2}{2} = 72\ \text{cm}^2\text{, cuyo lado medirá :}$$

$$l_{EFGH} = \sqrt{A_{EFGH}} = \sqrt{72\ \text{cm}^2} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

Como: Área de EFGH = Área zona sombreada + 4 Área sector circular y, por ser el ángulo del sector circular de 90°, cuatro sectores de 90º equivalen a un círculo de diámetro d = EF = $6\sqrt{2}$ cm, se cumple :

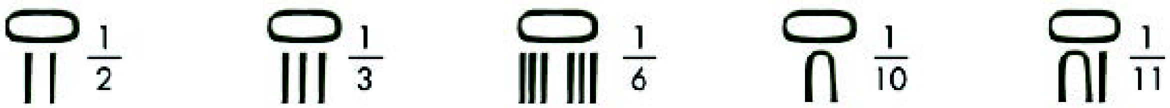
$$\text{Área de un circulo} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{EF}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\pi\ \text{cm}^2\text{, luego :}$$

Área sombreada = Área EFGH – Área circulo = 72 – 18π ≈ 72 – 56,52 = 15,48 cm².

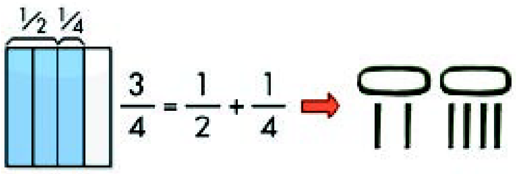
JUEGOS PARA PENSAR

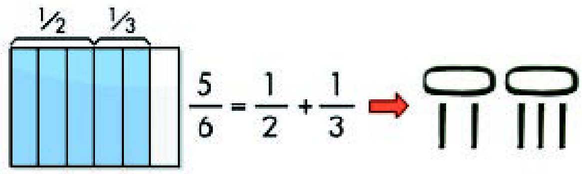
1. Números egipcios

Los números son un invento humano perfeccionado lentamente a través de los distintos pueblos y culturas. En el antiguo Egipto ya se usaban las fracciones, pero no como ahora. En realidad, solo sabían escribir fracciones con el numerador igual a la unidad:

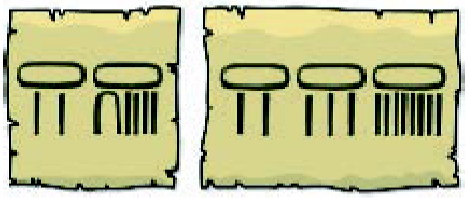


Las fracciones con numerador distinto de uno se expresaban como suma de las anteriores, empezando por las de denominador más pequeño posible.

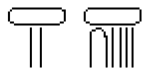


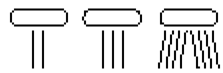


¿Qué fracciones expresan estos papiros?



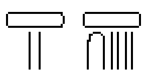
¿Cómo escribiría un egipcio estas fracciones? $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$

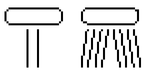
 $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{4}{7}$

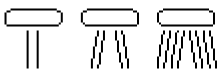
 $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{23}{24}$

Uno de los algoritmos para descomponer cualquier fracción (comprendida entre 0 y 1) en fracciones egipcias consiste en tomar la mayor fracción unitaria posible (es decir, la de menor denominador) que no supere el valor de la fracción dada, restar las dos fracciones y repetir el mismo proceso para la fracción obtenida. Por ejemplo, para 7/15, la primera fracción es 1 /3; luego hacemos 7/ 15 -1 /3 = 2/ 15; para 2/ 15 la fracción será 1/8; haciendo 2/15-1/8=1/120, resulta 7/15=1/3+1/8+ +1/120. Si para una fracción hemos obtenido una descomposición, es posible hallar otra con un término más, de lo que puede deducirse que si hay una, hay una infinidad. Por ejemplo, a partir de 4/7=1/2+1/14, cambiando la última fracción se obtiene 4/7 =1 /2 + 1/ 15 + 1 /210; de ésta se puede obtener 4/7 =1 /2 + 1/ 15 + 1 /211 + 1 /44 310, y así sucesivamente. Observa que basta con sustituir el último denominador por el siguiente y por el producto de los dos. Así, en el primer paso de nuestro ejemplo cambiamos 14 por 15 y por 210 (14 x 15) y luego 210 por 211 y por 44 310 (210 x 211); este cambio siempre es posible, pues, en general, 1 /n =1 / (n + 1) + 1 / n (n + 1), y este método permite obtener cada vez una nueva descomposición, con denominadores mayores que los anteriores.

Teniendo en cuenta lo dicho una posible descomposición sería :

$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \rightarrow$ 

$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \rightarrow$ 

$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \rightarrow$ 

Descomposición de fracciones de numerador 2 y denominador impar $\frac{2}{2n-1}$

Observando las distintas descomposiciones, parece intuirse el método: dividimos por 2 el denominador y tomamos el entero superior, que será el denominador de la primera fracción unitaria; el segundo se obtiene multiplicando el primero por el denominador de la fracción inicial; este método es válido en general, ya que:

$$\frac{2}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n\cdot(2n-1)}$$

2. Solo con tres...

El número 24 puede conseguirse utilizando solamente tres ochos. Así: 24= 8+8+8 ¿Cómo lo harías utilizando solamente tres treses? ¿Y con tres doses?

$3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$
$22 + 2 = 24$

3. Número escondido

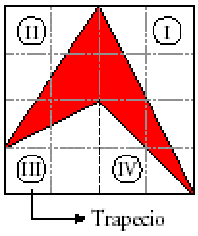
Aquí hay un numero que es cuadrado perfecto. Además, sus dos últimas cifras son, precisamente, la raíz cuadrada de él mismo. ¿Qué número puede ser?

625 es cuadrado perfecto (es el cuadrado de 25).

4. A simple vista...

¿Cuánto mide la superficie coloreada de cada cuadrado si la superficie de uno de ellos es de 16 CM^2.

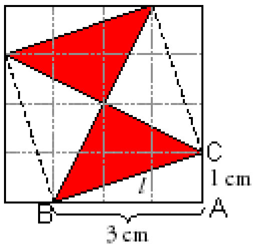
Como el área del cuadrado es de 16 m^2 su lado medirá $l=\sqrt{A}=\sqrt{16\text{ cm}^2}=4\text{cm}$, y, al estar dividido cada lado en 4 partes iguales, el lado de cada cuadradito pequeño (punteados) será de 1 cm.



Tenemos tres triángulos y un trapecio, cuyas áreas son :

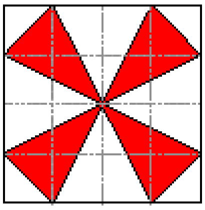
$$A_I=\frac{4\cdot 2}{2}=4\text{cm}^2;\ A_{II}=\frac{2\cdot 3}{2}=3\text{cm}^2;\ A_{IV}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\text{cm}^2;\ A_{III}=\frac{(B+b)}{2}\cdot h=\frac{(1+2)}{2}\cdot 2=3\text{cm}^2$$

El área de la figura sombreada es = 16 – (4 + 3 + 2 + 3) = 4 m^2.



Podrías utilizar la misma estrategia del caso anterior y restar al área total, el área de 4 cuadrados y dos trapecios, pero según se aprecia en la figura, uniendo los vértices se forma un cuadrado y el área sombreada es la mitad, vamos a hallar el lado de ese cuadrado (en el triángulo ABC) y después su área :
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC, tenemos el lado l :

$$l = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\ cm^2 \Rightarrow A = l^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10\ cm^2 \Rightarrow A_S = \frac{10}{2} = 5 cm^2$$



El área **no sombreada** está formada por :

- 4 triángulos rectángulos de área = 4 · ½ = 2 cm^2.
- 4 Triágulos isósceles de base = b = 2 cm y altura = h = 2 cm , luego el área será :

$$4 \cdot A = 4 \frac{b \cdot h}{2} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 8\ cm^2$$

$A_{sombreada}$ = 16 – (8 + 2) = 16 – 10 = 6 cm^2.

5. Dominó

Ordena estas fichas de dominó en la posición que ves en la figura de abajo.