25 *Obtén con la calculadora:*

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2}$ = 9.5 x^y 2 x^{1/y} 5 = 2,460874364...

b) $\sqrt[3]{-173}$ = 173 ± x^{1/y} 3 = - 5,572054655...

c) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{14}{9}\right)^3}$ = [(--- 14 ÷ 9 ---)] x^y 3 x^{1/y} 4 = 1,392881418...

d) $\sqrt[4]{5^{-9}}$ = 5 x^y 9 ± x^{1/y} 4 = 0,026749612...

e) $28^{3/4} = \sqrt[4]{28^3}$ = 28 x^y 3 x^{1/y} = 12,17218441...

f) $8^{-1/3} = \sqrt[3]{8^{-1}}$ = 8 x^y 1 ± x^{1/y} 3 = 0,5.

g) $0{,}03^{-3/2} = \sqrt{0{,}03^{-3}}$ = 0.03 x^y 3 ± = √ = 192,4500897...

h) $\left(\sqrt[5]{0{,}0025}\right)^{-1}$ = 0.0025 x^{1/y} 5 x^y 1 ± = 3,314454017...

26 *Expresa en forma exponencial:*

a) $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$.

b) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3 = \sqrt[5]{\left(a^2\right)^3} = \sqrt[5]{a^6} = a^{5/6}$.

c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$.

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x} = x^{1/12}$.

e) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3} = \sqrt{a^{-3}} = a^{-3/2}$.

f) $\sqrt[6]{a^3} = a^{3/6} = a^{1/2}$.

g) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2 = \sqrt[4]{\left(a^2\right)^2} = \sqrt[4]{a^4} = a^{4/4} = a$.

h) $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{10/2} = a^5$.

27 *Expresa como una raíz:*

a) $15^{1/2} = \sqrt{15}$.

b) $(x^2)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2}$.

c) $(x^{-1})^{5/4} = \sqrt[4]{\left(x^{-1}\right)^5} = \sqrt[4]{x^{-5}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^5}}$.

d) $(a^{1/5})^{-4} = \left(\sqrt[5]{a}\right)^{-4} = \sqrt[5]{a^{-4}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{a^4}}$.

e) $(a^{2/3})^{1/2} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

f) $a^2 \,.\, a^{1/2} = a^{\frac{2}{2}} = a = \sqrt{a^2}$.

g) $(3^{-2/5})^{10/3} = 3^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}} = 3^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^{-4}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^4}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

28 *Expresa como potencia única:*

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4} = \dfrac{a^{7/3}}{a^4} = a^{\frac{7}{3}-4} = a^{-\frac{5}{3}}$.

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[4]{a^{-1}} = a^{-\frac{1}{4}}$.

c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{5^{3/2}}{5^{2/3}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{9-4}{6}} = 5^{\frac{5}{6}}$.

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2} = 2^{-1}\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{1/4} = 2^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{-4+2+1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}}$.

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/3}}{a\cdot a^{1/2}} = \dfrac{a^{2/3}}{a^{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{2/3}}{a^{3/2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{4-9}{6}} = a^{-\frac{5}{6}}$.

f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}\cdot\dfrac{a^3}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot a^3}{a^2\cdot\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/3}\cdot a^3}{a^2\cdot a^{1/2}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}+3}}{a^{2+\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{11/3}}{a^{5/2}} = a^{\frac{11}{3}-\frac{5}{2}} = a^{\frac{22-15}{6}} = a^{\frac{7}{6}}$.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Radicales

29 *Multiplica y simplifica el resultado:*

a) $\sqrt{2a}\sqrt{3a}\sqrt{6a} = \sqrt{2a\cdot 3a\cdot 6a} = \sqrt{36a^3} = \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot a^2\cdot a} = 2\cdot 3\cdot a\sqrt{a} = 6a\sqrt{a}$.

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a\cdot a^2\cdot b^4\cdot b^2} = \sqrt[3]{a^3\cdot b^6} = a^{\frac{3}{3}}\cdot b^{\frac{6}{3}} = a\cdot b^2$.

c) $\sqrt{5a}\sqrt{10ab}\sqrt{8a^3b}\sqrt{a} = \sqrt{5a\cdot 10ab\cdot 8a^3b\cdot a} = \sqrt{400a^6b^2} = \sqrt{2^4\cdot 5^2a^6b^2} = 2^25a^3b = 20a^3b$.

30 *Simplifica los siguientes radicales:*

a) $\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

b) $\sqrt[15]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{15}} = 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$.

c) $\sqrt[10]{a^8} = a^{\frac{8}{10}} = a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$.

d) $\sqrt[12]{a^4\cdot b^8} = a^{\frac{4}{12}}\cdot b^{\frac{8}{12}} = a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}} = \left(ab^2\right)^{1/3} = \sqrt[3]{ab^2}$.

e) $\sqrt[8]{\left(x^2y^2\right)^2} = \sqrt[8]{(xy)^4} \overset{(1)}{=} \sqrt{xy}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$

(1) Dividiendo el índice y el exponente del radicando por 4.

31 *Extrae factores de los siguientes radicales:*

a) $\sqrt[3]{16x^6} = \sqrt[3]{2^4x^6} = \sqrt[3]{2\cdot 2^3\cdot x^6} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2 = 2x^2\sqrt[3]{2}$.

b) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\dfrac{2^2\cdot 7\cdot x^4\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} = \dfrac{2x^2}{5y}\sqrt{\dfrac{7x}{3y}}$.

c) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10} = \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^8\cdot 2^2} = 2^2\sqrt[4]{2^2} = 4\cdot\sqrt{2}$.

d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^3a^5}{b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^2\cdot 2\cdot a^4\cdot a}{b^4}} = \dfrac{2a^2}{b^2}\sqrt{2a}$.

e) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^4\cdot c^2}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^2}}$.

f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^5a^3}{3^2\cdot 5\cdot b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^4\cdot 2\cdot a^2\cdot a}{3^2\cdot 5\cdot b^4}} = \dfrac{2^2a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}} = \dfrac{4a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}}$.

32 *Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:*

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}$; como m.c.m.(2, 3, 4, 5, 6) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ al reducir a común índice quedan

$\sqrt[60]{2^{30}}, \sqrt[60]{3^{20}}, \sqrt[60]{4^{15}}, \sqrt[60]{5^{12}}, \sqrt[60]{6^{10}}$ ahora comparamos los radicandos :

$6^{10} = 60\ 466\ 176 < 5^{12} = 244\ 140\ 625 < 2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824 = 4^{15} = (2^2)^{15} < 3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$
luego el orden es $\sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5}$ como m.c.m.(3, 4, 6) = $2^2 \cdot 3 = 12$ al reducir a común índice quedan

$\sqrt[12]{(2^4)^4}, \sqrt[12]{(5^3)^3}, \sqrt[12]{(3^5)^2} \Leftrightarrow \sqrt[12]{2^{14}}, \sqrt[12]{5^9}, \sqrt[12]{3^{10}}$ ahora comparamos los radicandos :

$2^{14} = 16\ 384 < 3^{10} = 59\ 049 < 5^9 = 1\ 953\ 125$ luego el orden es $\sqrt[3]{2^4} < \sqrt[6]{3^5} < \sqrt[4]{5^3}$.

33 *Introduce dentro de la raíz y simplifica:*

Un factor se introduce en una raíz elevado al índice.

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2^2}{2}} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$.

b) $3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{3}} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$.

c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[3]{2^{3-2}} = \sqrt[3]{2}$.

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 2^4}{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 2^2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$.

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$.

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

34 *Divide y simplifica el resultado:*

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$.

b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{2/3}}{2^{1/2}} = 2^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{4-3}{6}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \sqrt[4]{\frac{5}{12} : \frac{20}{3}} = \sqrt[4]{\frac{15}{12 \cdot 20}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2}$.

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{ab}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}$.

e) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}:\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{3^2}{2^2}}=\dfrac{3}{2}$.

f) $\dfrac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}=\sqrt[12]{\dfrac{20^2}{10^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{(2^2\cdot 5)^2}{(2\cdot 5)^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^4\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{2}{5}}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

36 *Suma:*

a) $\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\left(1+\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{3}=\dfrac{12+9-20}{12}\sqrt{3}=\dfrac{1}{12}\sqrt{3}$.

b) $2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-7\sqrt{18}=2\sqrt{2^3}+4\sqrt{2^3\cdot 3^2}-7\sqrt{2\cdot 3^2}=2\sqrt{2\cdot 2^2}+4\sqrt{2\cdot 2^2\cdot 3^2}-7\sqrt{2\cdot 3^2}=$

$=2\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 2\cdot 3\sqrt{2}-7\cdot 3\sqrt{2}=4\sqrt{2}+24\sqrt{2}-21\sqrt{2}=(4+24-21)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

c) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}=3\sqrt{2}+4\sqrt{2\cdot 2^2}-\sqrt{2\cdot 2^4}+\sqrt{2\cdot 5^2}=3\sqrt{2}+4\cdot 2\sqrt{2}-2^2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=$
$=3\sqrt{2}+8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=12\sqrt{2}$.

d) $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\sqrt{48}=5\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^3}-8\sqrt{3\cdot 5^2}+\sqrt{2^4\cdot 3}=5\cdot 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-8\cdot 5\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}=$
$=10\sqrt{3}+3\sqrt{3}-40\sqrt{3}+4\sqrt{3}=-23\sqrt{3}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

37 *Efectúa:*

a) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}=\sqrt{2^6\cdot 5}+\sqrt{2^4\cdot 5}-\sqrt{2^2\cdot 5^3}=2^3\sqrt{5}+2^2\sqrt{5}-2\cdot 5\sqrt{5}=8\sqrt{5}+4\sqrt{5}-10\sqrt{5}=$

$=2\sqrt{5}$.

b) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$.

c) $\sqrt{\dfrac{7}{64}}-\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\sqrt{\dfrac{7}{2^6}}-\sqrt{\dfrac{7}{2^2}}=\dfrac{1}{2^3}\sqrt{7}-\dfrac{1}{2}\sqrt{7}=\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{7}=\dfrac{1-4}{8}\sqrt{7}=-\dfrac{3}{8}\sqrt{7}$.

d) $\sqrt[5]{96}-\sqrt[5]{\dfrac{3}{32}}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}-\sqrt[5]{\dfrac{3}{2^5}}=2\sqrt[5]{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{3}=\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt[5]{3}=\dfrac{3}{2}\sqrt[5]{3}$.

e) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3^3}-\sqrt{2^3\cdot 3}=5\sqrt{6}+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$.

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 5}{2^3}}-\sqrt[3]{\frac{5}{2^3}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{5}=\frac{2}{2}\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}$.

****

38 *Racionaliza y simplifica:*

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. **b)** $\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

c) $\frac{6}{\sqrt{12}}=\frac{6}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

d) $\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

****

40 *Racionaliza:*

Para racionalizar expresiones del tipo:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{m-n}}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{m-n}}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{m-n}}}{\sqrt[n]{a^{m-m+n}}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{m-n}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{m-n}}}{a}$$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$. **b)** $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\cdot\sqrt[8]{a^3}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$.

Las siguientes expresiones se racionalizan multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

c) $\frac{8}{\sqrt{5}-1}=\frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\overset{(1)}{=}\frac{8(\sqrt{5}+1)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}=2\left(\sqrt{5}-1\right)$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\overset{(1)}{=}\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}=-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{6}+3$.

(1) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

****

41 *Racionaliza y simplifica:*

a) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-2}=-2(1-\sqrt{2})=-2+2\sqrt{2}$.

b) $\frac{14}{3-\sqrt{2}}=\frac{14(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{14(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{14(3+\sqrt{2})}{9-2}=\frac{14(3+\sqrt{2})}{7}=2(3+\sqrt{2})=6+2\sqrt{2}$.

c) $\frac{23}{5-\sqrt{2}}=\frac{23(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}=\frac{23(5+\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{23(5+\sqrt{2})}{25-2}=\frac{23(5+\sqrt{2})}{23}=5+\sqrt{2}$.

d) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1^2+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{1-3}=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{-2}=-2-\sqrt{3}$.

e) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{2^2(\sqrt{5})^2-9}=\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9}=\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{11}=2\sqrt{5}-3$

f) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{(\sqrt{3})^2+4\sqrt{2}\sqrt{3}+(2\sqrt{2})^2}{3-4\cdot2}=\frac{3+4\sqrt{6}+8}{3-8}=$

$=\frac{11+4\sqrt{6}}{-5}=-\frac{11}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{6}$.

g) $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2}=\frac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10}=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

h) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)}=\frac{2(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-3^2}=\frac{4-3\sqrt{2}}{8-9}=\frac{4-3\sqrt{2}}{-1}=-4+3\sqrt{2}$.

i)

$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{5-3}=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=$

$=\frac{2(4-\sqrt{15})}{2}=4-\sqrt{15}$.

PIENSA Y RESUELVE

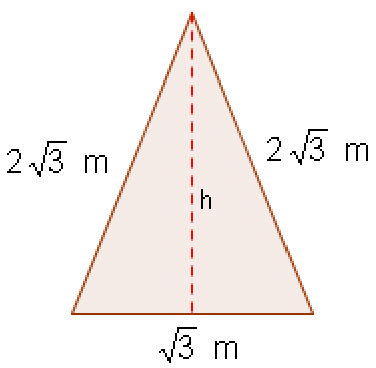
42 *La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilos.*

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot M_{Tierra} = 330\,000 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{25} = 1{,}9734 \cdot 10^{27}$ t $= 1{,}9734 \cdot 10^{27}$ t $\cdot 10^3$ kg/t $= 1{,}9734 \cdot 10^{30}$ kg.

43 *El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?*

138 t = $138\,\text{t} \cdot 10^6 \dfrac{\text{g}}{\text{t}} = 1{,}38 \cdot 10^8$ g. Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita: $\dfrac{1{,}38 \cdot 10^8\ \text{g/ballena}}{10^{-18}\ \text{g/virus}} = 1{,}38 \cdot 10^{26}\ \dfrac{\text{virus}}{\text{ballena}}$.

44 *Los lados iguales de un triángulo isósceles miden el doble que la base, cuya longitud es $2\sqrt{3}$ m. Calcula -el perímetro del triángulo, su altura y su área. Expresa el resultado con radicales.*



Perímetro = $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Como Área = A = $\dfrac{\text{bxh}}{2}$, necesitamos hallar la longitud de la altura h, para lo que utilizamos el teorema de Pitágoras aplicado a la mitad del triángulo:

$$h = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\ \text{m luego:}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}\ \text{m}^2.$$

45 *En un cubo cuya arista mide $\sqrt{3}$ cm, halla:*

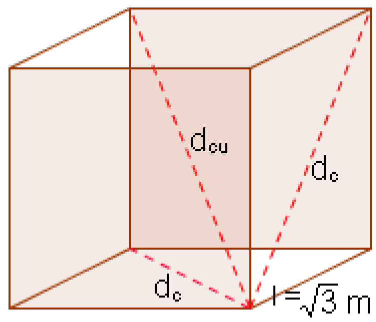
a) *La diagonal de una cara.*

b) *La diagonal del cubo.*

c) *El volumen del cubo.*

Expresa los resultados en forma radical.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻



a) $d_c = \sqrt{l^2+l^2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$ m

b) $d_{cu} = \sqrt{d_c^2+l^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3\,\text{m}.$

c) $V = l^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3\ m^3 = \sqrt{3^3}\ m^3 = 3\sqrt{3}\ m^3$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

46 *Reduce a un solo radical:*

a) $\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{8+3}{12}} = 2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}}.$

b) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{9-10}{12}} = a^{-\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a^{-1}} = \sqrt[12]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a}}.$

c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^3}{3^2\cdot 2^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{1}{3^2\cdot 2}} = \sqrt[8]{\dfrac{1}{18}}.$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

47 *¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?*

$$\sqrt[3]{-20};\ \sqrt[6]{0{,}12};\ \sqrt{-1};\ \sqrt[5]{241};\ \sqrt[4]{-16}$$

No existen las raíces de índice par y radicando negativo: $\sqrt{-1};\ \sqrt[4]{-16}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

48 *Escribe un número racional y otro irracional comprendidos entre los números dados:*

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

a) $3,\widehat{7} < \begin{Bmatrix} \text{Racional}: 3,778 \\ \text{Irracional}: \sqrt{14,271773} \end{Bmatrix} < 3,78$.

b) $\dfrac{71}{50} = 1,42 < \begin{Bmatrix} \text{Racional}: 1,422 \\ \text{Irracional}: \sqrt{2,022084} \end{Bmatrix} < \dfrac{64}{45} = 1,4\widehat{2}$.

c) $\sqrt{2} = 1,4142136 < \begin{Bmatrix} \text{Racional}: 1,42 \\ \text{Irracional}: 1,42422242222... \end{Bmatrix} < \sqrt{3} = 1,7320508$.

d) $\sqrt[3]{2} = 1,259921... < \begin{Bmatrix} \text{Racional}: 1,27 \\ \text{Irracional}: 1,272272227... \end{Bmatrix} < \sqrt[4]{3} = 1,316074...$

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

49 *¿Cuántos números racionales hay entre* $0,\widehat{8}$ *y* $0,\widehat{9}$ *? Pon ejemplos y razona tu respuesta.*

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

Entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$ hay infinitos números racionales. Por ejemplo, 0,9 está entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$, también 0,91, 0,911, etc.

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

50 *Escribe dos números racionales, uno mayor que* $\sqrt{2}$ *y otro menor que* $\sqrt{2}$*, que se diferencien de él en menos de una milésima.*

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

Como $\sqrt{2}$ = 1,4142136..., un número menor es 1,4135 y otro mayor 1,4145, cuyas diferencias respecto de $\sqrt{2}$ son $\sqrt{2} - 1,4135 \approx 0,000713$ y 1,4145 - $\sqrt{2}$ $\approx$ 0,00029, diferencias, ambas, menores que 0,001.

❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋

51 *Justifica si, en cada caso, los dos radicales son iguales o distintos:*

a) $\begin{cases} \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \\ \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$ Iguales

b) $\begin{cases} \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \\ \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \end{cases} \Rightarrow$ Distintas.

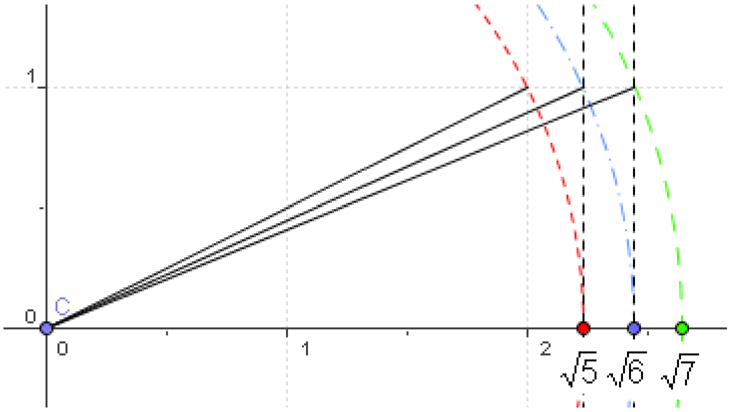
c) $\begin{cases} \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{3} \end{cases} \Rightarrow$ Iguales

d) $\begin{cases} \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \\ \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow$ Iguales.

****

52 *Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente* $\sqrt{7}$ *cm.*

****

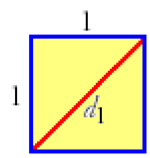


Primero trazamos la diagonal de un rectángulo de 1x2 que será $\sqrt{1^1+2^2} = \sqrt{5}$, después la diagonal de otro de dimensiones 1 x $\sqrt{5}$ que valdrá $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{6}$ y, por último la diagonal de un tercero de dimensiones 1 x $\sqrt{6}$ que será $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{7}$

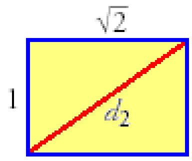
****

53 *Calcula el valor de la diagonal en cada caso:*

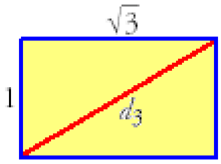
****



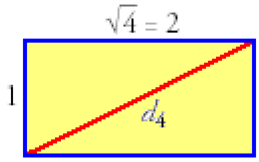
$d_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$



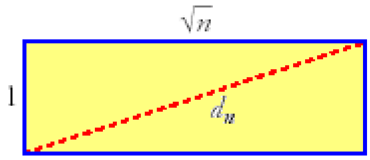
$d_2 = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$



$$d_3 = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$



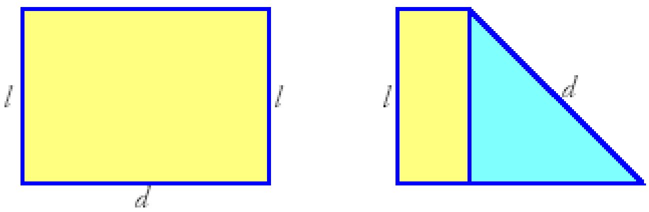
$$d_4 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$



$$d_n = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2} = \sqrt{1+n}$$

PROFUNDIZA

54 *Dobla una hoja DIN A-4 formando un cuadrado y expresa la diagonal de ese cuadrado en función del lado menor, l. Comprueba, con otra hoja igual, que el lado mayor mide lo mismo que la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es la razón entre las dimensiones de la hoja DIN A-4?*



Como $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$ la razón $\frac{d}{l} = \frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2}$

55 *Racionaliza y simplifica:*

a) $\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2} - 2}{2} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2^2} - 1\right)}{2} = \sqrt[3]{2^2} - 1 = \sqrt[3]{4} - 1.$

b)

$$\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}=\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{(3\sqrt{3})^2-2^2}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=$$

$$=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$$

c) $$\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{21}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}=\frac{(4\sqrt{15}-2\sqrt{21})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{8\sqrt{75}+4\sqrt{105}-4\sqrt{105}-2\sqrt{147}}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2}=$$

$$=\frac{8\sqrt{3\cdot 5^2}-2\sqrt{3\cdot 7^2}}{20-7}=\frac{40\sqrt{3}-14\sqrt{3}}{13}=\frac{26\sqrt{3}}{13}=2\sqrt{3}.$$

d) $$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=x-\sqrt{x^2-1}.$$

56 *Efectúa y simplifica:*

a) $$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})=\left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}\right)(3+2\sqrt{2})=\left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}\right)(3+2\sqrt{2})=$$

$$=\frac{(\sqrt{6})^2-2\sqrt{18}+(\sqrt{3})^2}{6-3}(3+2\sqrt{2})=\frac{6-2\sqrt{2\cdot 3^2}+3}{3}(3+2\sqrt{2})=\frac{9-6\sqrt{2}}{3}(3+2\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=$$

$$=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1.$$

b)

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}-3\sqrt{5}=\frac{(5+2\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}-3\sqrt{5}=\frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1}-3\sqrt{5}=$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+6+2\sqrt{25}+2\sqrt{5}}{4}-3\sqrt{5}=\frac{16+8\sqrt{5}}{4}-3\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4+\sqrt{5}.$$

c)

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{3}}:\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{-2}=-2+\sqrt{3}.$$

57 *¿Para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces?*

a) $\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ **b)** $\sqrt{-x} \Rightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ **c)** $\sqrt[4]{8-x} \Rightarrow 8-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 8$. **d)** $\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 \geq 0$ que siempre es positivo, para cualquier valor de x.

58 *Si sabes que a > 1, ¿cómo ordenarías los siguientes números de menor a mayor?*

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{a+1} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a} < a$$