Distancias y circunferencia

28 Calcula la distancia entre P y Q:

a) P(3, 5), Q(3, -7)
b) P(-8, 3), Q(-6, 1)
c) P(0, -3), Q(-5, 1)
d) P(-3, 0), Q(15, 0)

a) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{0+144} = 12$

b) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(-6+8)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(-5-0)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(15+3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

29

a) Halla el punto medio del segmento de extremos A(-2, 0), B(6, 4).
b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) Si llamamos al punto medio $M(x_M, y_M)$:

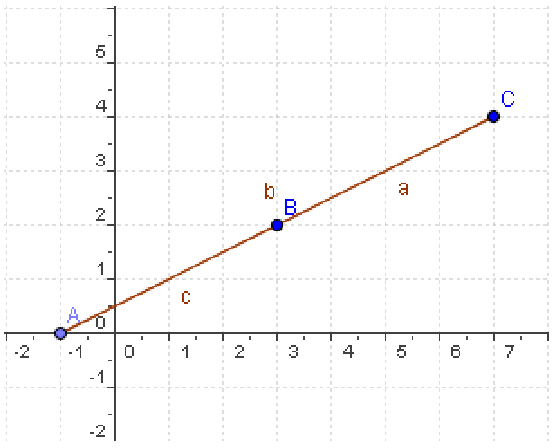
$$\left\{\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow M(2, 2)$$

b) $d(A, M) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$d(B, M) = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

luego d(A, M) = d(B, M).

30 Comprueba que el triángulo de vértices A(-1, 0), B(3, 2), C(7, 4) es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

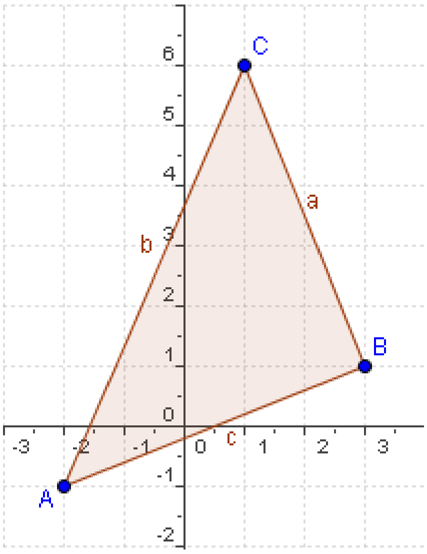


Si representamos los tres puntos tenemos la figura adjunta en la que da la impresión que los puntos A, B y C están alineados (no forman triángulo), pero ¿lo están?, lo comprobamos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (3,2) - (-1,0) = (4,2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (7,4) - (-1,0) = (8,4) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \text{ luego}$$

efectivamente están alineados, no forman triángulo, pero si es cierto que AB = BC ya que AC = 2AB

31 Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices A(-2, -1), B(3, 1), C(l, 6) es rectángulo.



Hallamos las longitudes de los tres lados:

$c = d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$b = d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1+2)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$a = d(C,B) = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

Si es rectángulo ha de cumplir el teorema de Pitágoras:

$b^2 = a^2 + c^2$; $\left(\sqrt{58}\right)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{29}\right)^2 \Leftrightarrow 58 = 29 + 29$, luego sí es un triángulo rectángulo (e isósceles además ya que los dos catetos tienen la misma longitud, a = c).

32 Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:

a) C(4, -3), r = 3 **b)** C(0, 5), r = 6 **c)** C(6, 0), r = 2 **d)** C(0, 0), r = 5

La ecuación de una circunferencia de radio r y centro C(a, b) es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

a) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$; $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 9$; $x^2 - 8x + y^2 + 6y + 16 = 0$.

b) $(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$; $x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36$; $x^2 + y^2 - 6y - 11 = 0$.

c) $(x - 6)^2 + (y + 0)^2 = 2^2$; $x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$; $x^2 - 12x + y^2 + 32 = 0$.

d) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$; $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

33 Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:

a) $(x-2)^2+(y+3)^2= 16$ **b)** $(x+l)^2+y^2=81$ **c)** $x^2+y^2=10$

La ecuación de una circunferencia de radio r y centro C(a, b) es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, si comparamos con las que se nos dan podemos saber el centro y el radio

a) Centro = C(2, -3), radio = r = 4.

b) Centro = C(-1, 0), radio = r = 9.

c) Centro = C(0, 0), radio = r = $\sqrt{10}$.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

PIENSA Y RESUELVE

34 Representa en este hexágono los siguientes vectores

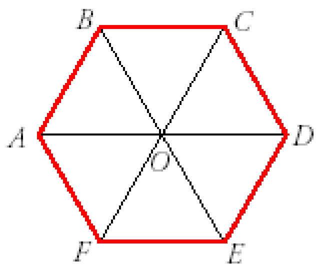
a) $\vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AO}$

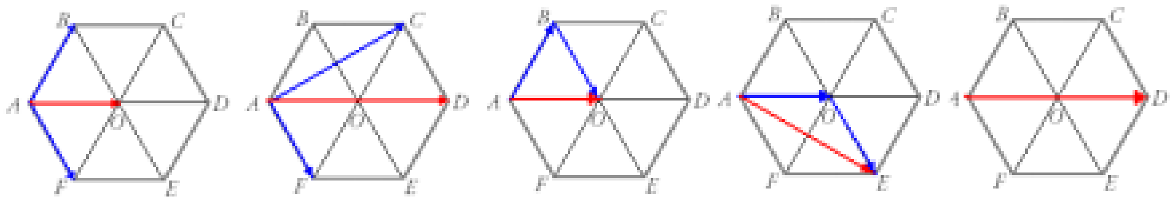
b) $\vec{AC} + \vec{AF} = \vec{AD}$

c) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AO}$

d) $\vec{AO} + \vec{AF} = \vec{AE}$

e) $\vec{AO} + \vec{BC} = \vec{AD}$





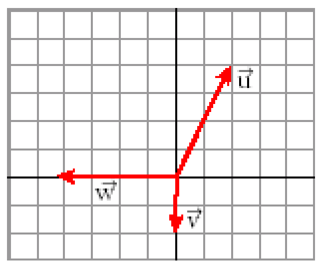
35 Calcula m y n para que se verifique $\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v}$ siendo $\vec{x}(8, 2)$, $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(2, -4)$.

$$\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow (8,2) = m(-3,2) + n(2,-4) \Rightarrow \begin{cases} 8 = -3m + 2n \\ 2 = 2m - 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 = -6m + 4n \\ 2 = 2m - 4n \\ \hline 18 = -4m \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} m &= -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \\ n &= \frac{8+3m}{2} = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

36

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

b) Calcula m y n de modo que se cumpla: $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v}$



a) $\vec{u}(2,4)$, $\vec{v}(0,-2)$, $\vec{w}(-4,0)$

b) $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow (-4,0) = m(2,4) + n(0,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2m \Leftrightarrow m = -2 \\ 0 = 4m - 2n \Leftrightarrow n = 2m = -4 \end{cases}$

37 Halla las coordenadas de un vector w que verifique la siguiente igualdad:

$$-2\vec{w} = 3\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{v} \quad \text{con } \vec{u}(-2,1) \text{ y } \vec{v}(4,-2)$$

$$-2\vec{w} = 3\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{v} \rightarrow -2(w_1, w_2) = 3(-2,1) - \frac{5}{2}(4,-2) \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{-6-10}{-2} = 8 \\ w_2 = \dfrac{3+5}{-2} = -4 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}(8,-4)$$

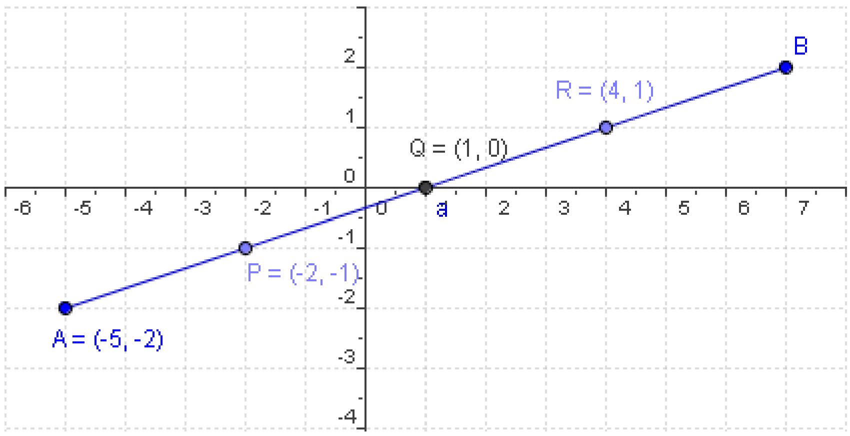
38 Determina los puntos que dividen al segmento de extremos A(-5, -2), B(7, 2) en cuatro partes iguales.

Para dividir el segmento AB en cuatro partes iguales hay que fijar tres puntos (P, Q, y R) que cumplan:

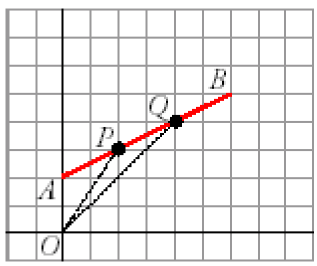
$$\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow P = A + \frac{1}{4}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{1}{4}(12,4) = (-5,-2) + (3,1) = (-2,-1)$$

$$\vec{AQ} = \frac{2}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow Q = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{1}{2}(12,4) = (-5,-2) + (6,2) = (1,0)$$

$$\vec{AR} = \frac{3}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow R = A + \frac{3}{4}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{3}{4}(12,4) = (-5,-2) + (9,3) = (4,1)$$



39 En el segmento AB de extremos A(0, 2), B(6, 5), halla las coordenadas de los puntos P y Q tales que: $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB}$.



Las componentes de $\vec{AB} = B - A = (6,5) - (0,2) = (6,3)$

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow P - A = \frac{1}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow (x_p, y_P) - (0,2) = \frac{1}{3}(6,3) \Leftrightarrow (x_p, y_P) = (0,2) + (2,1) = (2,3) \Rightarrow P(2,3)$$

$$\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow Q - A = \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow (x_Q, y_Q) - (0,2) = \frac{2}{3}(6,3) \Leftrightarrow (x_Q, y_Q) = (0,2) + (4,2) = (4,4) \Rightarrow Q(4,4)$$

40 Dado el segmento de extremos A(-1, 5),B(6, -2) halla los puntos P y Q tales que:

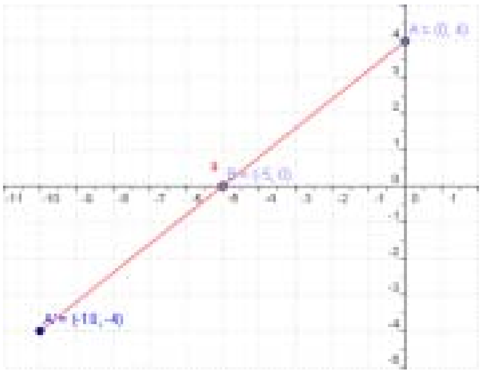
$$\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB}, \quad \vec{BQ} = -\frac{1}{5}\vec{AB}$$

Las componentes de $\vec{AB} = B - A = (6,-2) - (-1,5) = (7,-7)$.

$$\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow P - A = \frac{2}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow (x_P, y_P) - (-1,5) = \frac{2}{5}(7,-7) \Leftrightarrow (x_P, y_P) = (-1,5) + (\frac{14}{5}, -\frac{14}{5}) = (\frac{9}{5}, \frac{11}{5}) \Rightarrow P\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

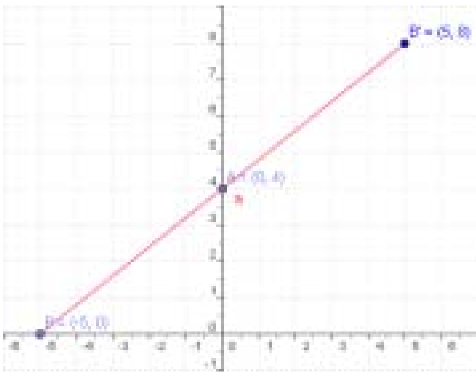
$$\vec{BQ} = -\frac{1}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow Q - B = -\frac{1}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow (x_Q, y_Q) - (6,-2) = -\frac{1}{5}(7,-7) \Leftrightarrow (x_Q, y_Q) = (6,-2) + (-\frac{7}{5}, \frac{7}{5}) = (\frac{23}{5}, -\frac{3}{5}) \Rightarrow P\left(\frac{23}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

41. Dados los puntos A(0, 4) y B(-5, 0), halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.



Si llamamos al punto simétrico de A(x_A, y_A) respecto de B(x_B, y_B), A'(x, y), se debe cumplir que B sea el punto medio del segmento AA' :

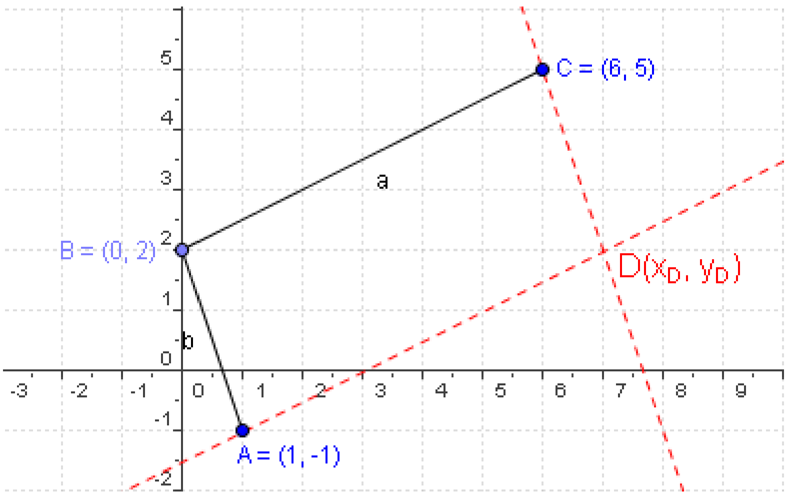
$$\left\{\begin{array}{l} x_B = \dfrac{x_A + x}{2} \Leftrightarrow x = 2x_B - x_A = 2\cdot(-5) - 0 = -10 \\ y_B = \dfrac{y_A + y}{2} \Leftrightarrow y = 2y_B - y_A = 2\cdot 0 - 4 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow A'(-10,-4)$$



Si llamamos al punto simétrico de B(x_B, y_B) respecto de A(x_A, y_A), B'(x, y), se debe cumplir que A sea el punto medio del segmento BB' :

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = \dfrac{x_B + x}{2} \Leftrightarrow x = 2x_A - x_B = 2\cdot 0 - (-5) = 5 \\ y_A = \dfrac{y_B + y}{2} \Leftrightarrow y = 2y_A - y_B = 2\cdot 4 - 0 = 8 \end{array}\right. \Rightarrow B'(5,8)$$

42 Halla las coordenadas del punto D, de modo que ABCD sea un paralelogramo, siendo A(1, -1), B(0, 2) y C(6, 5).



Si llamamos al punto buscado D(x_D, y_D), como ABCD ha de ser un paralelogramo, se cumplirá que los lados sean paralelos y por tanto sus vectores iguales dos a dos:

$\vec{AD} = \vec{BC}$ (fíjate en el orden Origen-Extremo)

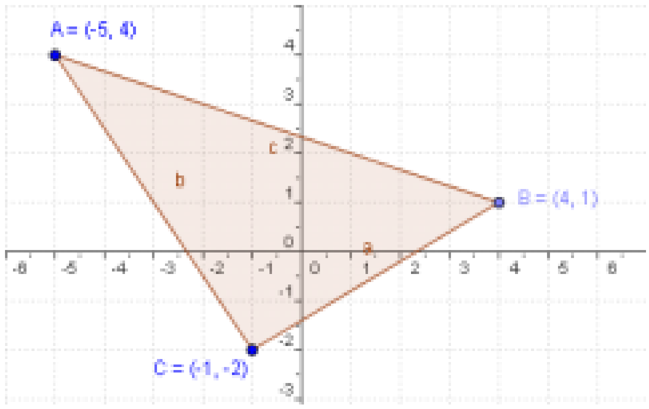
luego D – A = C – B, o sea

D = C – B + A, sustituyendo

(x_D, y_D) = (6, 5) – (0, 2) + (1, -1) = (7, 2)

41 Dado el triángulo de vértices A(-5, 4), B(4, 1), C(-1, -2) halla:

- **a)** Las ecuaciones de los tres lados.
- **b)** El punto medio del lado AC.
- **c)** La ecuación de la mediana del vértice B.



a)

Ecuación del lado AB

El vector director es $\vec{AB} = B - A = (4,\ 1) - (-5,\ 4) = (9,\ -3)$, su pendiente m = -3/9 = -1/3 y un punto el A(-5, 4), luego su ecuación es :

$$y = 4 - \frac{1}{3}(x+5) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0$$

Ecuación del lado BC

El vector director es $\vec{BC} = C - B = (-1,-2) - (4,\ 1) = (-5,\ -3)$, su pendiente m = 3/5 y un punto el B(4, 1), luego su ecuación es :

$$y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5} \Leftrightarrow 3x - 5y - 7 = 0$$

Ecuación del lado CA

El vector director es $\vec{AC} = C - A = (-1,-2) - (-5,\ 4) = (4,\ -6)$, su pendiente m = -6/4=-3/2 y un punto el A(-5, 4), luego su ecuación es :

$$y = 4 - \frac{3}{2}(x+5) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

b) Punto medio de AC, M(x_M, y_M): $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$ M(-3, 1).

c) La mediana del vértice B pasa por B(4, 1) y el punto medio del lado opuesto AC, M(-3,1) que hemos hallado en el apartado anterior:

El vector director es $\vec{BM} = M - B = (3,\ 1) - (4,\ 1) = (-1,\ 0)$, su pendiente m = 0/(-1)= 0 (es horizontal y un punto el B(4, 1), luego su ecuación es y = 1; y – 1 = 0.

45 Dados los puntos A(-1, 1) y B(3, 4), halla:

a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB.
b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela aleje X.
c) El punto de corte de r y s.

a) Si ha de ser perpendicular a AB(4, 3), su vector director $\vec{v}$ es el (-3, 4) y su pendiente m = -4/3, como pasa por A(-1, 1) la ecuación de la recta r será:

$$y = 1 - \frac{4}{3}(x+1) = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x + 3y + 1 = 0$$

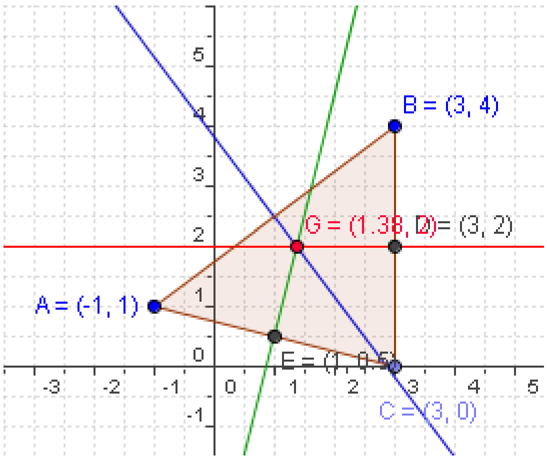
b) Si ha de ser paralela al eje X (horizontal) su ecuación será de la forma y = k (pendiente m = 0) y como tiene que pasar por el B(3, 4), será y = 4 o sea y - 4 = 0.

c) El punto de corte es el punto común a ambas rectas es decir que cumple las dos ecuaciones a la vez y por tanto es la solución del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} r \equiv 4x + 3y + 1 = 0 \xrightarrow{2)} x = \dfrac{-1-3y}{4} = \dfrac{-1-3\cdot 4}{4} = -\dfrac{13}{4} \\ s \equiv y - 4 = 0 \xrightarrow{1)} y = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte (-13/4, 4).}$$

46 En el triángulo de vértices A(-1, 1), B(3, 4), y C(3, 0), halla:

a) La ecuación de la mediatriz de BC
b) La ecuación de la mediatriz de AC.
c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).



Mediatriz de un segmento: Recta perpendicular en el punto medio del segmento. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos. Las de un triángulo se cortan en el circuncentro (G).

a) La mediatriz de BC que llamaremos m_1 será una recta que pasa por el punto medio de BC (que llamamos D) y es perpendicular a BC:

❍ **Vector director**: el perpendicular a $\vec{BC} = C - B = (3,0) - (3, 4) = (0, -4)$, cuyas componentes son (4, 0) es decir es una recta horizontal.

❍ **Pasa** por el punto medio de BC (que llamamos D): $\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3 \\ y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow D(3, 2).$

La ecuación de m_1 es y = 2 + 0·(x-3)= 2; es decir y – 2 = 0.

b) La mediatriz de AC que llamaremos m_2 será una recta que pasa por el punto medio de AC (que llamamos E) y es perpendicular a AC:

❍ **Vector director**: el perpendicular a $\overrightarrow{AC} = C - A = (3,0)$ – (-1, 1) = (4, - 1), cuyas componentes son (1, 4), por tanto su pendiente m = 4.

❍ **Pasa** por el punto medio de AC (que llamamos E): $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow E(1, 1/2).$

La ecuación de m_2 es y = 1/2 + 4·(x - 1)= 4x – 7/2; es decir 8x - 2y – 7 = 0.

c) El circuncentro(G) es el punto solución de las dos mediatrices halladas (la tercera, que no hemos calculado también pasará por G):

$$\begin{cases} m_1 \equiv y = 2 \\ m_2 \equiv 8x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2; x = \frac{2y+7}{8} = \frac{2\cdot 2+7}{8} = \frac{11}{8} \Rightarrow G\left(\frac{11}{8}, 2\right)$$

④⑦ Comprueba si los puntos A(14, 0), B(-9, 3), C(2, 3/2) y D(4, 8/7) pertenecen a la recta determinada por los puntos P(-2, 2) y Q(5, 1).

La recta que pasa por PQ, tiene por vector director $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ = (5, 1) – (-2, 2) = (7, -1) y por tanto sus pendiente es m = -1/7. Como pasa por P(-2, 2), su ecuación es:

$$y = 2 - \frac{1}{7}(x+2) = -\frac{1}{7}x + \frac{12}{7} \Leftrightarrow x + 7y - 12 = 0$$

Como queremos comprobar si una serie de puntos pertenecen a la recta anterior, sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación de la recta y, si la cumplen, es que pertenecen y, si no la cumplen, es que no pertenecen:

❁ Sustituimos A(14, 0): 14 + 7·0 – 12 = 2 ≠ 0, no la cumple luego A no pertenece a la recta PQ.

❁ Sustituimos B(-9, 3): -9 + 7·3 – 12 = 0, la cumple, luego B pertenece a la recta PQ.

❁ Sustituimos C(2, 3/2): 2 + 7·(3/2) – 12 = 1/2, no la cumple, luego C no pertenece a la recta PQ.

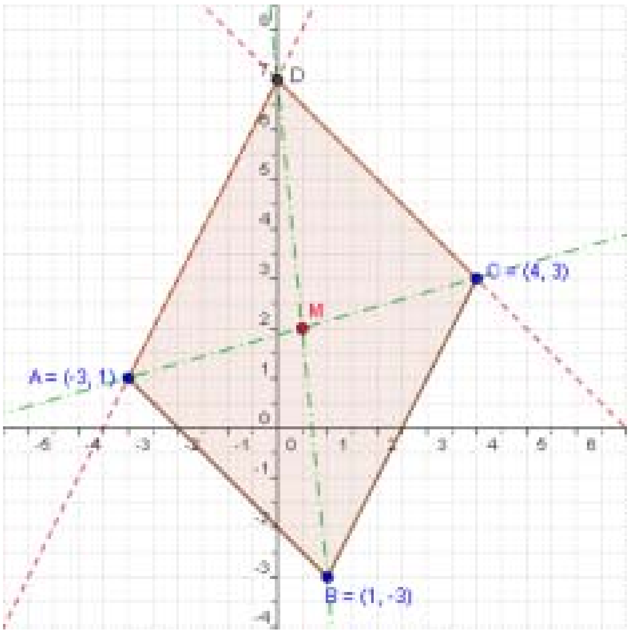
❁ Sustituimos D(4, 8/7): 4 + 7·(8/7) – 12 = 0, la cumple, luego D pertenece a la recta PQ.

48 Los puntos A(-3, 1), B(1, -3) y C(4, 3) son tres vértices de un paralelogramo. Halla:

a) El vértice D opuesto a B.

b) El punto M donde se cortan las diagonales.

c) Comprueba que M es el punto medio de las dos diagonales.



a) Para que ADCB sea un paralelogramo ha de ser $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, es decir A – B = D – C, de donde despejando D = A – B + C = (-3, 1) – (1, -3) + (4, 3) = (0, 7).

b) Hallamos las ecuaciones de las dos diagonales:

Diagonal AC

El vector director es $\overrightarrow{AC} = C - A =$ (4, 3) – (-3, 1) = (7, 2), su pendiente m = 2/7 y un punto el A(-3, 1), luego su ecuación es :

$$y = 1 + \frac{2}{7}(x+3) = \frac{2}{7}x + \frac{13}{7} \Leftrightarrow 2x - 7y + 13 = 0$$

Diagonal BD

El vector director es $\overrightarrow{BD} = D - B =$ (0, 7) – (1, -3) = (-1, 10), su pendiente m = -10 y un punto el D(0, 7), luego su ecuación es :

$$y = 7 - 10x \Leftrightarrow 10x + y - 7 = 0$$

Si resolvemos el sistema tenemos el punto de corte de ambas diagonales:

$$\begin{cases} 2x - 7y + 13 = 0 \longrightarrow 2x - 7y + 13 = 0 \\ 10x + y - 7 = 0 \xrightarrow{7} 70x + 7y - 49 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 72x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{36}{72} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 7 - 10x = 7 - 5 = 2$$

El punto M es (1/2, 2).

c) El punto M(x_M, y_M) ha de ser punto medio de AC o de BD:

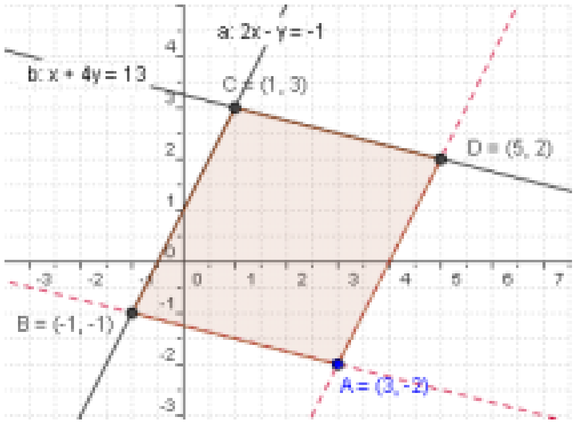
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

49 Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas r : 2x - y + 1 = 0 y s : x + 4y - 13 = 0, y el punto (3, -2) es uno de sus vértices.

a) Dibuja el paralelogramo.

b) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

c) Calcula las coordenadas de los vértices.



a) El paralelogramo ABCD es la figura adjunta.

b) El lado AD es paralelo es paralelo al lado BC, luego su ecuación será de la forma 2x – y + k =0, como sabemos que pasa por A(3, -2), sustituyendo este punto sabemos el valor de k: 2 ·3 – (-2) + k = 0; 6 + 2 + k = 0; k = - 8, luego la ecuación del lado AD es 2x – y – 8 = 0.

El lado AB es paralelo es paralelo al lado CD, luego su ecuación será de la forma x + 4y + h =0, como sabemos que pasa por A(3, -2), sustituyendo este punto sabemos el valor de h: 3 + 4·(-2) + h = 0; 3 - 8 + h = 0; h = 5, luego la ecuación del lado AB es x + 4y + 5 = 0.

c) El vértice B es el punto de corte de los lados AB y CB, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de esos lados tendremos las coordenadas del vértice B:

$$\begin{cases} x+4y+5=0 \longrightarrow x+4y+5=0 \\ 2x-y+1=0 \xrightarrow{4} 8x-4y+4=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 9x+9=0 \Leftrightarrow x=-1;\ y=2x+1=2(-1)+1=-1$$

luego B(-1, -1).

El vértice C es el punto de corte de los lados CD y CB, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de esos lados tendremos las coordenadas del vértice C:

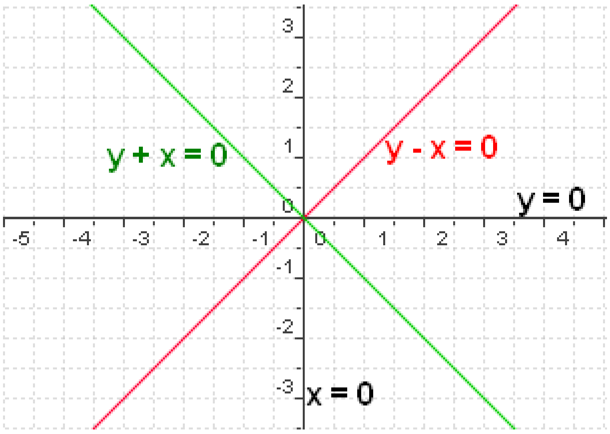
$$\begin{cases} x+4y-13=0 \longrightarrow x+4y-13=0 \\ 2x-y+1=0 \xrightarrow{4} 8x-4y+4=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 9x-9=0 \Leftrightarrow x=1;\ y=2x+1=2+1=3$$

luego C(1, 3).

Para hallar las coordenadas de D podemos usar el mismo método que para los vértices anteriores pero basándonos en las propiedades de los paralelogramos, los vectores de los lados paralelos han de ser iguales:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ C – B = D – A, es decir D = A + C – B = (3, -2) + (1, 3) – (-1, -1) = (5, 2).

50 Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas y de las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.



❂ Eje horizontal (abscisas) o eje X:

Pendiente m = 0, pasa por (0, 0), luego la ecuación es y = 0 (todos los puntos de este eje tienen la coordenada y nula).

❂ Eje vertical (ordenadas) o eje Y:

Pendiente m = ∞, pasa por el (0, 0), luego x = 0 (todos los puntos de este eje tienen la coordenada x nula).

❂ Bisectriz del primer cuadrante

Todos los puntos de esta bisectriz cumplen x = y, luego y – x = 0. Otra forma: pendiente m = 1 (la x = y) y como pasa por el (1, 1) o (2, 2), será y = 1 + 1·(x- 1) = 1 + x – 1 = x.

❂ Bisectriz del segundo cuadrante

Análogamente x = - y, es decir x + y = 0.

51

a) Escribe la ecuación de una recta r que es paralela al eje OY y que pasa por el punto (-3, 2).

b) Halla el punto de corte de r con la recta: 3x+4y-7=0

a) Si es paralela al eje horizontal, su ecuación es x + k = 0 y como pasa por (-3, 2), sustituyendo -3 + k = 0; k = 3, luego la ecuación pedida es r ≡ x + 3 = 0.

b) Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+3=0 \xrightarrow{1)} x=-3 \\ 3x+4y-7=0 \xrightarrow{2)} y=\dfrac{7-3x}{4}=\dfrac{7-3\cdot(-3)}{3}=\dfrac{16}{4}=4 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte (-3, 4).}$$

52 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto medio del segmento de extremos A(0, 4), B(3, 0) y su radio es igual a la mitad de dicho segmento.

Hallamos primero el centro C que el punto medio de AB:

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2} \\ y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{3}{2},2\right)$$

Ahora el radio r:

$$r = \frac{1}{2}|\vec{AB}| = \frac{1}{2}d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = \frac{5}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 4y + 4 = \frac{25}{4}$$ o sea: $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

53 Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(1, -1) y pasa por el punto A(3, 4).

Hallamos el radio r que es la distancia del centro al punto A(3, 4):

$r = |\vec{AC}| = d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{29}$, y ahora la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 29$$ o sea:

$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 27 = 0$.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

54 De las siguientes expresiones, indica cuáles son verdaderas:

a) Dos vectores con distinta dirección no se pueden sumar.
b) Dos vectores opuestos tienen igual dirección.
c) Si $\vec{u} = k\vec{v}$ y k es negativo, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección.
d) Si $\vec{u} = -\vec{v}$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual módulo.

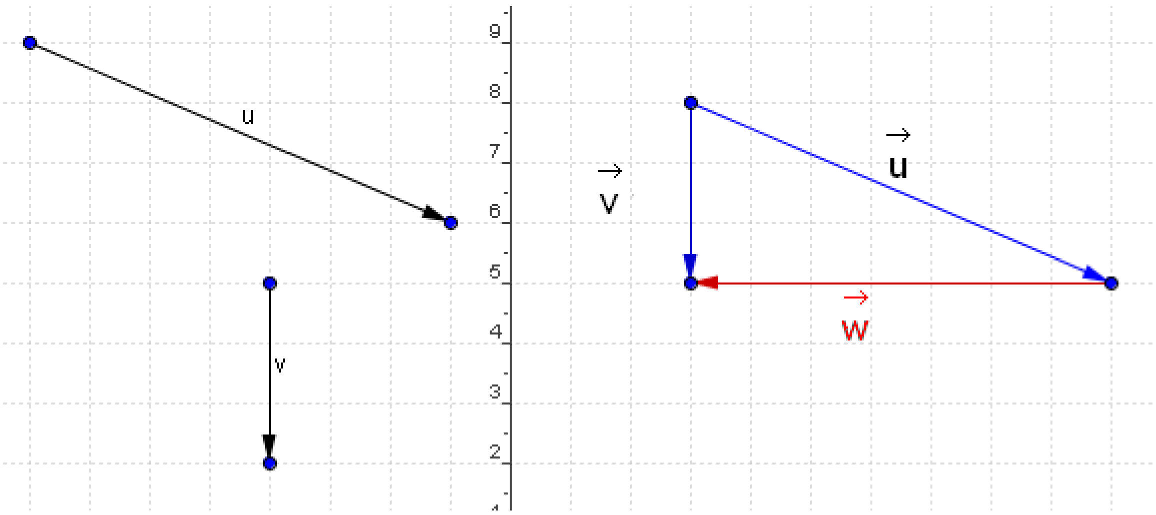
a) FALSO, Se pueden sumar vectores sea cual sea su dirección.

b) VERDADERO ya que dos vectores son opuestos cuando tienen la misma dirección pero sentidos contrarios, $-\vec{v} = (-1)\cdot\vec{v}$.

c) FALSO: El valor de k negativo cambia el sentido pero la dirección sigue siendo la misma.

d) Verdadero pues el módulo o longitud del vector es siempre positiva independientemente de su sentido.

55 Dibuja un vector que sumado con $\vec{u}$ nos de el vector $\vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.



Las componentes de $\vec{u}$ son (7, -3), las de $\vec{v}$ (0, -3), luego:

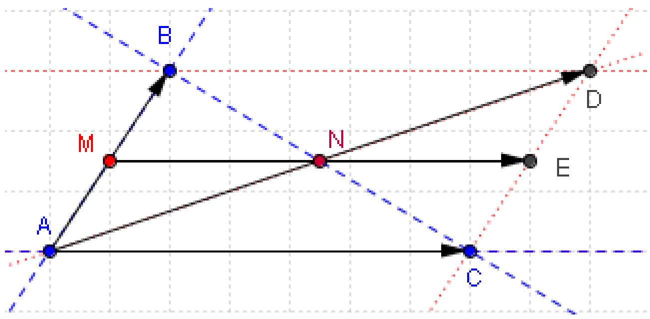
$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = (0, -3) – (7, -3) = (-7, 0)$$

56 Sean A, B, C tres puntos no alineados cualesquiera, y M y N los puntos medios de los segmentos AB y BC, respectivamente.

Explica si son ciertas estas igualdades:

a) $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AN}$.

b) $\vec{AC} = 2\vec{MN}$.



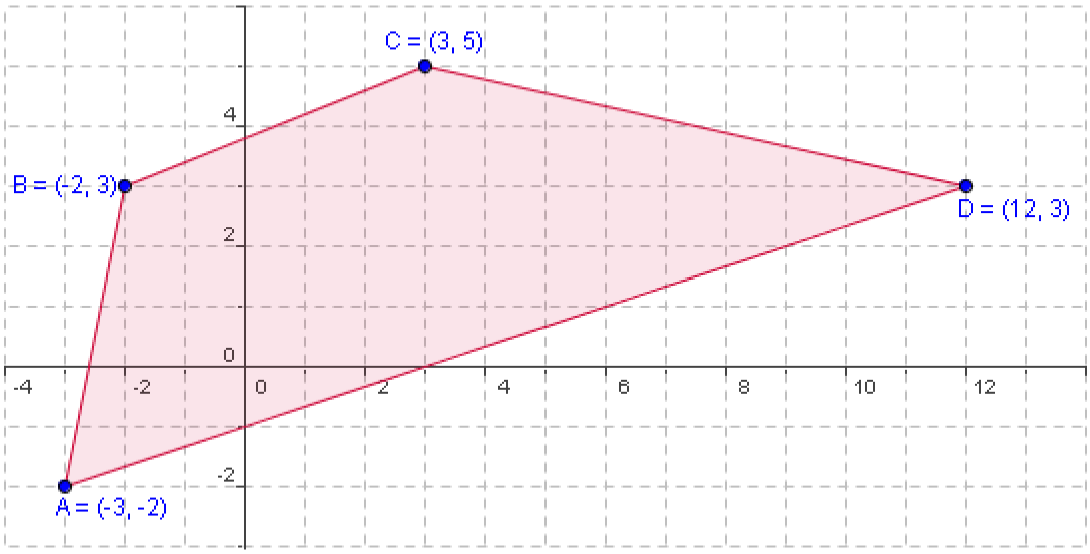
Si formamos el paralelogramo ABDC, añadiendo otro triángulo igual al ABC con el lado BC común como se muestra en la figura adjunta:

a) Puede verse que la suma de $\vec{AB} + \vec{AC}$ es el vector diagonal del paralelogramo $\vec{AD} = 2\vec{AN}$ ya que el punto de corte de las diagonales divide a estas en dos vectores iguales.

b) Como puede apreciarse en el dibujo $\vec{AC} = \vec{ME} = 2\vec{MN}$ ya que van del punto medio M al punto medio E y los lados son paralelos AC = ME.

PROFUNDIZA

57 La figura adjunta parece un trapecio. Comprueba si realmente lo es. Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que sí lo sea.



Para que sea un trapecio los lados AD y BC han de ser paralelos y para que sean paralelos las componentes de los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ han de ser proporcionales, comprobémoslo:

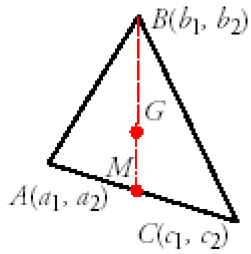
$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = D - A = (12{,}3) - (-3{,}-2) = (15{,}5) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (3{,}5) - (-2{,}3) = (5{,}2) \end{cases} \Rightarrow \frac{15}{5} = 3 \neq \frac{5}{2} = 2{,}5$$

, luego no son paralelos y el cuadrilátero ABCD no es un trapecio.

Para que fuese un trapecio las coordenadas de D(15, y_D) han de cumplir:

$\frac{15}{5} = 3 = \frac{y_D + 2}{2} \Leftrightarrow y_D + 2 = 6 \Leftrightarrow y_D = 4$, D tiene que ser el punto (15, 4).

58 Sea G el baricentro del triángulo ABC, y M el n,ntn medio del lado AC.'



a) Escribe las coordenadas de M en función de las de A y C.

b) Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

c) Demuestra que las coordenadas de G son: $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$

a) $M\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{a_1 + c_1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{a_2 + c_2}{2} \end{cases}$

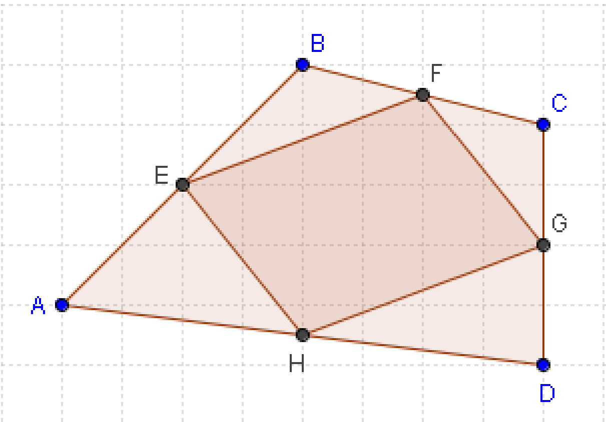
b)

$$\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BM} = \frac{2}{3}(M - B) = \frac{2}{3}\left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1, \frac{a_2 + c_2}{2} - b_2\right) = \left(\frac{a_1 + c_1 - 2b_1}{3}, \frac{a_2 + c_2 - 2b_2}{3}\right)$$

c) Como $\vec{BG} = G - B \Rightarrow G = \vec{BG} + B = \left(\dfrac{a_1 + c_1 - 2b_1}{3}, \dfrac{a_2 + c_2 - 2b_2}{3}\right) + (b_1, b_2) =$

$= \left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

59 Toma cuatro puntos cualesquiera que sean los vértices de un cuadrilátero y prueba que, al unir los puntos medios de los lados de ese cuadrilátero, obtienes un paralelogramo.



Para probar que EFGH es una paralelogramo hemos de probar que EF ∥ HG y FG ∥ EH, y para probar que los lados son paralelos hemos de probar que los vectores asociados son proporcionales (iguales para ser un paralelogramo).

Comenzamos por hallar las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD (E, F,G, H) en función de las coordenadas de sus extremos:

$$E\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right);\quad F\left(\frac{x_C + x_B}{2}, \frac{y_C + y_B}{2}\right);\ G\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}\right) \text{ y } H\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}\right)$$

Ahora hallamos las componentes de los vectores:

$$\left.\begin{cases} \vec{EF} = F - E = \left(\dfrac{x_C - x_A}{2}, \dfrac{y_C - y_A}{2}\right) \\ \vec{HG} = G - H = \left(\dfrac{x_C - x_A}{2}, \dfrac{y_C - y_A}{2}\right) \end{cases}\right. \Rightarrow \vec{EF} = \vec{HG}$$

$$\left.\begin{cases} \vec{EH} = H - E = \left(\dfrac{x_D - x_B}{2}, \dfrac{y_D - y_B}{2}\right) \\ \vec{FG} = G - F = \left(\dfrac{x_D - x_B}{2}, \dfrac{y_D - y_B}{2}\right) \end{cases}\right. \Rightarrow \vec{EH} = \vec{FG}$$

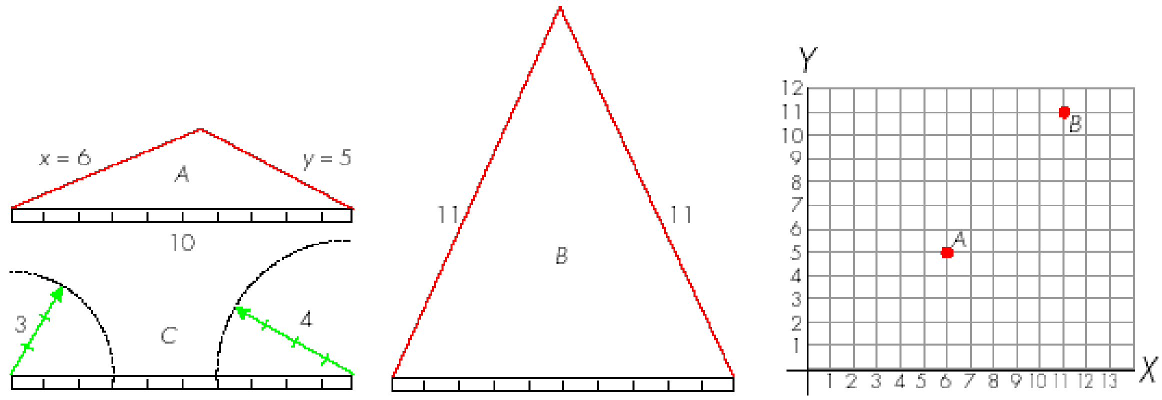
Ya hemos demostrado que EFGH es un paralelogramo.

P R O B L E M A S   D E   E S T R A T E G I A

①. Tres listones para un triángulo

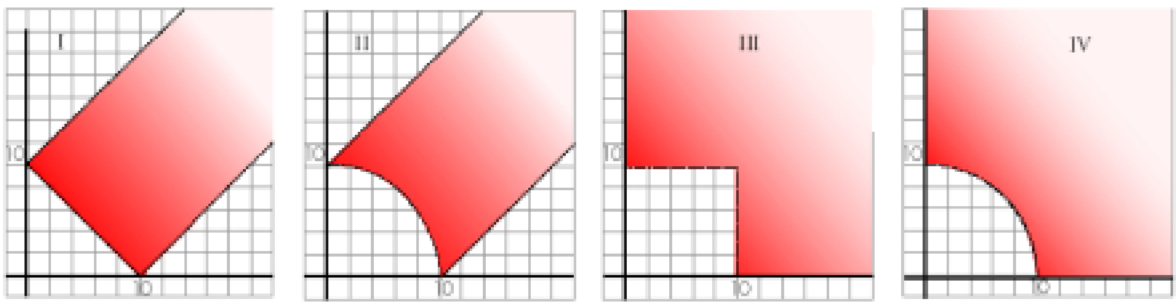
Supón que queremos construir un triángulo con tres listones, uno de 10 dm de longitud y los otros dos de longitudes x e y. Supón que contemplamos todas las posibilidades en cuanto a las longitudes de x e y y que representamos cada una en un punto P (x, y) del plano.

EJEMPLOS:



Así, representamos los puntos A(6, 5) y B(11,11) que corresponden a los triángulos de la ilustración. Pero no incluimos el punto C(3, 4), ya que con los listones de 3 dm y 4 dm no se completa un triángulo.

¿ Cuál de las zonas sombreadas representa el conjunto de los puntos P(x, y) mencionados? (x e y son las longitudes de los lados de un triángulo cuyo tercer lado mide 10 dm).



Las coordenadas de los puntos P(x, y) han de cumplir las condiciones:

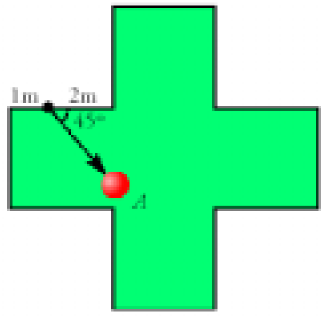
$x > 0$, $y > 0$, $x + y > 10$ y $|y – x| < 10$ que son las condiciones que han de cumplir tres segmentos para que formen triángulo.

La condición $|y – x| < 10$ son en realidad dos: $\begin{cases} y - x < 10 \\ x - y > 10 \end{cases}$

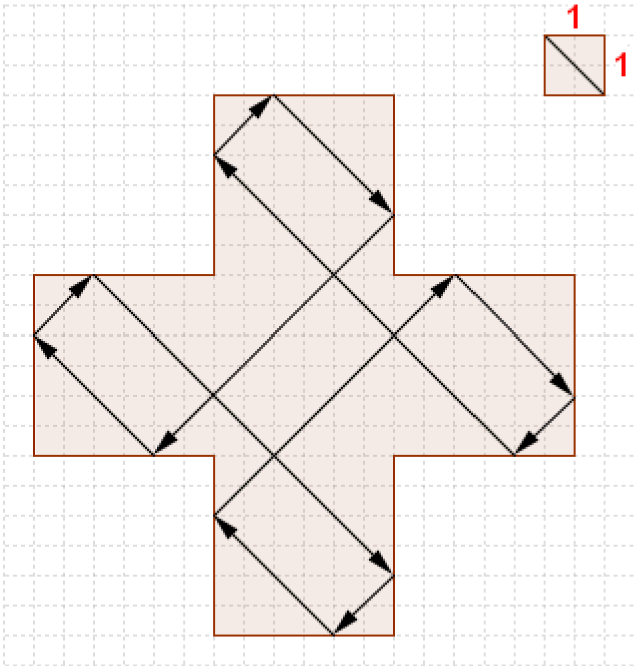
Si representamos la región que cumple las cinco restricciones obtenemos la figura I.

②. Rebote tras rebote

Desde el punto A, y en la dirección que indica la figura, se lanza una bola que irá rebotando elásticamente contra las paredes.



Calcula la distancia recorrida hasta que vuelva al punto de partida.



La unidad mínima del recorrido es la diagonal del cuadrado de lado l = 1, cuya longitud es:

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

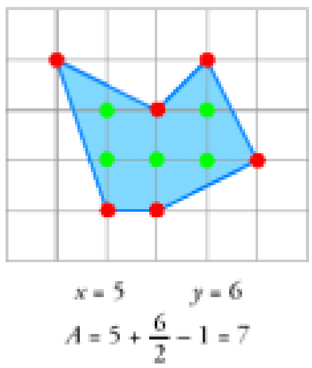
Si contamos las veces que se repite esta unidad mínima [6 (en cada rectángulo) · 5(rectángulos)] son 30, luego la longitud total del recorrido es:

$30\sqrt{2}\approx 42{,}426$

J U E G O S   P A R A   P E N S A R

①. ¿Sabías que...?

Hay una curiosa forma de calcular el área de un polígono cuyos vértices coinciden con los de una cuadrícula:

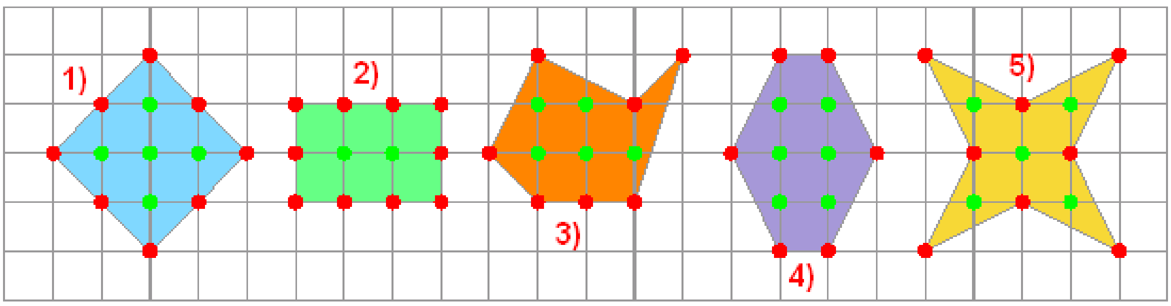


- ❑ Cuentas el número de puntos que hay dentro del polígono (x).
- ❑ Cuentas el número de puntos que hay sobre el borde (y).

Entonces, el área (A), medida en unidades de la cuadrícula, es:

$A = x+\frac{y}{2}-1$ (teorema de Pick)

Comprueba la relación anterior con estos polígonos:



Polígono 1) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 8 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$

Polígono 2) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 2 \\ \text{Perímetro} = y = 10 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$

Polígono 3) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 7 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{7}{2} - 1 = 7{,}5$

Polígono 4) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 6 \\ \text{Perímetro} = y = 6 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$

Polígono 5) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 8 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$

②. Para resolver de cabeza

En la feria se cambian dos ocas por cinco gallinas, y tres corderos por ocho ocas. ¿Cuántos corderos te darán a cambio de 60 gallinas?

Llevo a la feria 60 gallinas pero como por cada 5 gallinas me dan dos ocas, consigo 60/5 = 12 · 2 = 24 ocas y ahora cambio las ocas por corderos, como por cada 8 ocas me dan 3 corderos y tengo 24 ocas conseguiré $\frac{24\text{ocas}}{8\text{ocas}} \cdot 3\text{corderos} = 9$ corderos en la feria.

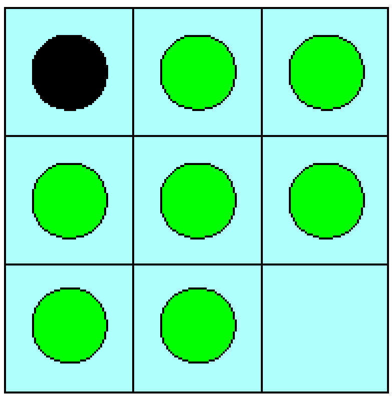
③. Solitario

OBJETIVO

Llevar la ficha negra a la casilla vacía con el mínimo número de movimientos.

REGLA

Una ficha se mueve, en horizontal o vertical, a una casilla contigua vacía.



- ¿Cuántos movimientos necesitas?
- ¿Y si el tablero fuera de 4 x 4 ?
- ¿Y si fuera de n x n ?

Con un cuadrado de 2x2 necesito 5 movimientos, con uno de 3x3 necesito 13 movimientos, con uno de 4x4 necesito 21 movimientos, luego la sucesión es:

5, 13, 21,... que es una progresión aritmética de diferencia d = 8, luego el término general (para un cuadrado de n x n) es :

$$a_n = a_1 + (n-2)d = 5 + (n-2)8 = 5 + 8n - 16 = 8n - 11$$