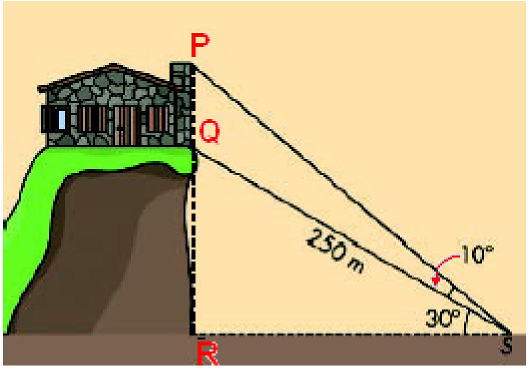
44 Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.



$\overline{PQ} = \overline{PR} - \overline{QR}$

En el triángulo SRQ :

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}30° = \dfrac{\overline{RQ}}{250} \Leftrightarrow \overline{RQ} = 250\,\text{sen}30° = 125\text{ m} \\ \cos 30° = \dfrac{\overline{RS}}{250} \Leftrightarrow \overline{RS} = 250\cos 30° \approx 216{,}5\text{ m} \end{array}\right\}$$

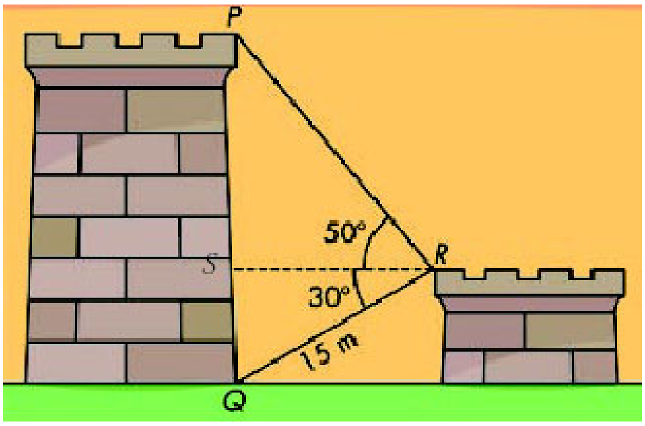
Ahora en el triángulo SRP:

$$\text{tg}40° = \frac{\overline{PR}}{\overline{RS}} \Leftrightarrow \overline{PR} = \overline{RS}\cdot\text{tg}40° = 216{,}5\cdot\text{tg}40° = 181{,}7\text{ m}$$

$\overline{PQ} = \overline{PR} - \overline{QR} = 181{,}7\text{ m} - 125\text{ m} = 56{,}7\text{ m}$ es la altura del edificio.

45 Si $\overline{QR} = 15$ m, ¿ cuál es la altura de la torre, $\overline{PQ}$?

En el triángulo RSQ hallamos las longitudes de $\overline{SQ}$ y $\overline{SR}$:



$$\text{sen}30° = \frac{\overline{SQ}}{\overline{QR}} \Leftrightarrow \overline{SQ} = \overline{QR}\,\text{sen}30° = 15\cdot\frac{1}{2} = 7{,}5\text{ m}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{SR}}{\overline{QR}} \Leftrightarrow \overline{SR} = \overline{QR}\cos 30° = 15\frac{\sqrt{3}}{2} = 13\text{m}$$

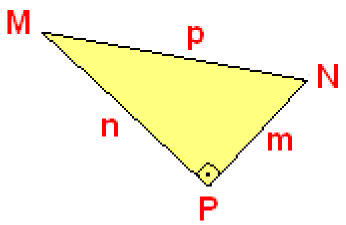
Ahora ya podemos hallar, en el triángulo rectángulo SRP, la longitud de $\overline{SP}$:

$$\text{tg}50° = \frac{\overline{SP}}{\overline{SR}} \Leftrightarrow \overline{SP} = \overline{SR}\,\text{tg}50° = 13\text{m}\cdot 1{,}19 = 15{,}5\text{ m}$$, por tanto la altura de la torre es :

$$h = \overline{QS} + \overline{SP} = 7{,}5\text{ m} + 15{,}5\text{ m} = 23\text{ m}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

46 Observa el triángulo rectángulo MPN, y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por sen, cos o tg



a) $\operatorname{sen}\hat{M} = \frac{m}{p}$ **b)** $\cos\hat{N} = \frac{m}{p}$ **c)** $\operatorname{tg}\hat{M} = \frac{m}{n}$

d) $\operatorname{sen}\hat{N} = \frac{n}{p}$ **e)** $\operatorname{tg}\hat{N} = \frac{n}{m}$ **f)** $\cos\hat{M} = \frac{n}{p}$

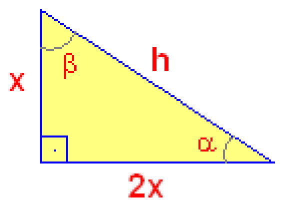
47 ¿ Existe algún ángulo α tal que sen $\alpha = \frac{3}{5}$ y tg $\alpha = \frac{1}{4}$.

Veamos si puede haber algún ángulo α que cumpla las dos igualdades, para ello partimos de la primera y mediante la ecuación fundamental hallamos el cos α :

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4},$$ luego no pueden cumplirse ambas igualdades a la vez.

48 En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide el doble que el otro.

a) Llama x al cateto menor y expresa en función de x el otro cateto y la hipotenusa.
b) Halla las razones trigonométricas del ángulo menor.
c) ¿ Cuánto miden los ángulos de ese triángulo



a) Hallamos la longitud de la hipotenusa en función de x:

$$h = \sqrt{x^2+(2x)^2} = \sqrt{x^2+4x^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{h} = \frac{x}{x\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{2x}{h} = \frac{2x}{x\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

c) $\alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{5}}{5} = 26^\circ\ 33'\ 54{,}18''$; $\beta = 90^\circ - \alpha = 63^\circ\ 26'\ 5{,}82''$

49 El seno de un ángulo α es igual a la mitad de su coseno. Calcula sen α, cos α y tg α.

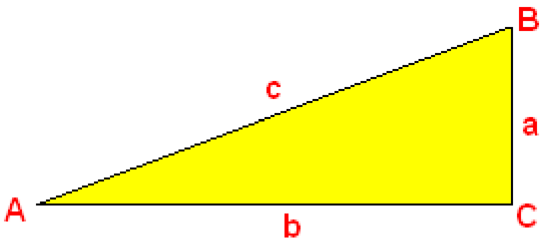
$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha \Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\frac{1}{2} = 26^\circ\, 33'\, 54{,}18''$$

Además cos α = 2senα, luego:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \text{sen}^2\alpha + (2\text{sen}\alpha)^2 = 1; 5\text{sen}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{y por tanto}: \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

50 En el triángulo rectángulo ABC $\text{sen}\hat{A} = \frac{1}{3}$

¿ Cuánto valen las siguientes relaciones entre si lados?



$$\frac{a}{c} = \text{sen}\hat{A} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{b}{c} = \cos\hat{A} = \sqrt{1-\text{sen}^2\hat{A}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \text{tg}\hat{A} = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen}\hat{A}} = 3$$

51 Usando las relaciones fundamentales, simplifica:

(sen α + cos α)^2 + (sen α - cos α)^2 = sen^{2}α + cos^{2}α + 2senα cosα + sen^{2}α + cos^{2}α - 2senα cosα = 2sen^{2}α + 2cos^{2}α = 2(sen^{2}α + cos^{2}α) = 2 ·1 = 2.

52 Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:

a) $$\frac{(\text{sen}\alpha)^3 + \text{sen}\alpha(\cos\alpha)^2}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\text{sen}\alpha} = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

b) $$\frac{(\text{sen}\alpha)^3 + \text{sen}\alpha(\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha$$

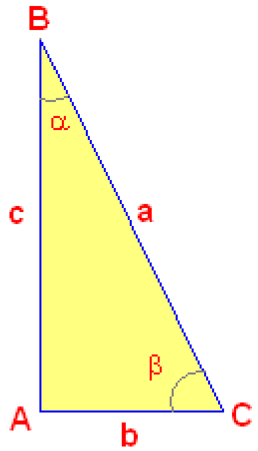
c) $$1 + (\text{tg}\alpha)^2 = 1 + \left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

53 ¿ Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿ Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.

Como la definición de sen $\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ y en todo triángulo rectángulo la longitud de cualquiera de los dos catetos es siempre menor que la hipotenusa, el cociente (el seno) no puede ser nunca 2.

Como la definición de cos $\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ y en todo triángulo rectángulo la longitud de cualquiera de los dos catetos es siempre menor que la hipotenusa, el cociente (el coseno) no puede ser nunca 3/2.

54 Dibuja un triángulo rectángulo en el que la tangente de uno de sus ángulos agudos valga dos. ¿ Cuánto vale la tangente del otro ángulo agudo?



Como la tangente es el cociente entre el cateto opuesto y el contiguo, el cateto opuesto ha de medir el doble que el contiguo (c = 2b):

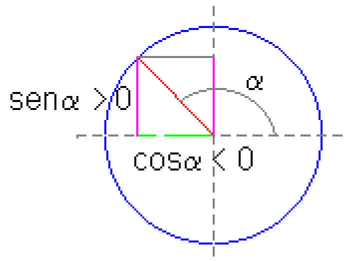
$$\text{tg}\beta = \frac{c}{b} = \frac{2b}{b} = 2 \text{, luego } \text{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

55 Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α:

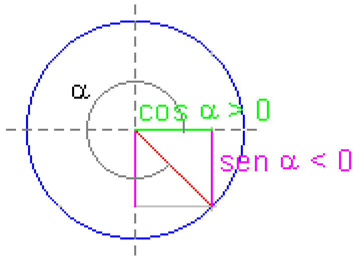
a) sen $\alpha > 0$, cos $\alpha < 0$
b) sen $\alpha < 0$, cos $\alpha > 0$
c) tg $\alpha > 0$, sen $\alpha < 0$
d) tg $\alpha > 0$, sen $\alpha > 0$

Como el seno de un ángulo se representa en el eje vertical y el coseno en el eje horizontal:

a) $\begin{cases} \text{sen}\alpha > 0 \Rightarrow \text{hacia arriba} \\ \cos\alpha < 0 \Rightarrow \text{hacia la izquierda} \end{cases} \Rightarrow 2^{\circ}\text{cuadrante}$



b) sen α < 0, hacia abajo, cos α > 0, hacia la derecha, luego el ángulo α ha estar en el 4º cuadrante

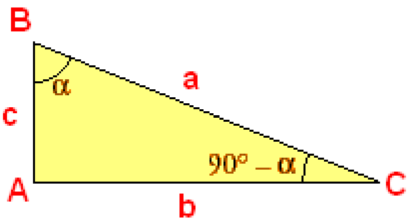


c) Como $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, si tg α > 0 y sen α < 0 (hacia abajo), ha de ser cos α < 0 (hacia la izquierda) y, por tanto, el ángulo α ha de estar en el 3er cuadrante.

d) Como $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, si tg α > 0 y sen α > 0 (hacia arriba), ha de ser cos α > 0 (hacia la derecha) y, por tanto, el ángulo α ha de estar en el 3er cuadrante.

PROFUNDIZA

56 Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es un recto. ¿ Cómo se podrían calcular las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario? Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:



Sabemos que $sen\alpha = \dfrac{b}{a}; \cos\alpha = \dfrac{c}{a}; tg\alpha = \dfrac{b}{c}$

Queremos expresar en función de las razones trigonométricas de l ángulo α, las de su complementario 90º - α :

$$sen(90º-\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \cos\alpha$$

$$\cos(90º-\alpha) = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = sen\alpha \quad y \quad tg(90º-\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{b/c} = \frac{1}{tg\alpha}$$

57 Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo a en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:

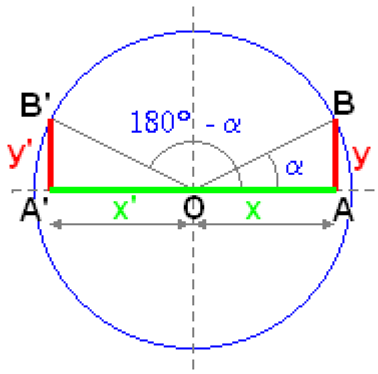
180° - α ; 1800 + α; 360° - α

Busca la relación que existe entre:

a) sen (180° - α) y sen α; cos (180° - α) y cos α ; tg(180° - α) y tg α
b) sen (180° + α) y senα; cos (180° + α) y cos α ; tg (180° + α) y tg α
c) sen (360° - α) y sen α ; cos (360° - α) y cos α; tg (360° - α) y tg α

a) Sabemos que $sen\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \dfrac{y}{R} = \dfrac{y}{1} = y$, ya que R = 1

$sen(180º-\alpha) = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{y'}{R} = y' = y = sen\alpha$ ya que los triángulos OAB y OA'B' son iguales

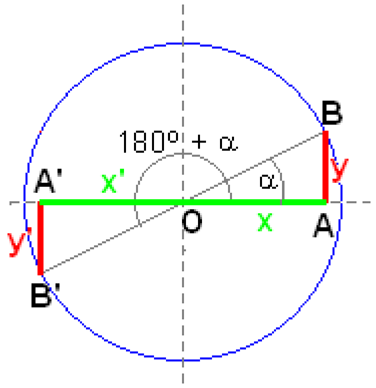


$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{x}{R} = \dfrac{x}{1} = x$ ya que R = 1

$\cos(180º-\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{x'}{R} = x' = -x = -\cos\alpha$

$$tg(180º-\alpha) = \frac{sen(180º-\alpha)}{\cos(180º-\alpha)} = \frac{sen\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha$$

b)



Sabemos que $\text{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$, ya que R = 1

$\text{sen}(180º+\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{y'}{R} = y' = -y = -\text{sen}\alpha$ ya que los triángulos OAB y OA'B' son iguales pero y es positivo e y' negativo.

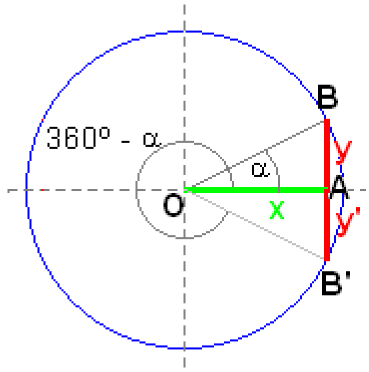
$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$ ya que R = 1

$\cos(180º+\alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{x'}{R} = x' = -x = -\cos\alpha$ ya que tienen sentidos opuestos

$$\text{tg}(180º+\alpha) = \frac{\text{sen}(180º+\alpha)}{\cos(180º+\alpha)} = \frac{-\text{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tg}\alpha$$

c) Sabemos que $\text{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$, ya que R = 1

$\text{sen}(360º-\alpha) = \frac{\overline{AB'}}{\overline{OB'}} = \frac{y'}{R} = y' = -y = -\text{sen}\alpha$ ya que los triángulos OAB y OA'B' son iguales pero y e y' son opuestos



$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$ ya que R = 1

$\cos(360º-\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{x}{R} = x = \cos\alpha$

$$\text{tg}(360º-\alpha) = \frac{\text{sen}(360º-\alpha)}{\cos(360º-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\alpha$$

58 Con ayuda de la calculadora, halla dos ángulos comprendidos entre 0° y 360° tales que:

- **a)** Su seno sea 0,7.
- **b)** Su coseno sea 0,54.
- **c)** Su tangente sea 1,5.
- **d)** Su seno sea -0,3.
- **e)** Su coseno sea -2/3.
- **f)** Su tangente sea -2.

a) sen α = 0,7 ⇒ α = arc sen 0,7 = 44º 25' 37", en el primer cuadrante. Como el seno es también positivo en el segundo cuadrante, otro ángulo cuyo seno es 0,7 es β = 180º - α = 135º 34' 23".

b) Si cos α = 0,54 ⇒ α = arc cos 0,54 = 57º 18’ 58”, en el primer cuadrante. Como el coseno es también positivo en el cuarto cuadrante, otro ángulo cuyo coseno es 0,54 es β = 360º - α = 302º 41’ 2”.

c) Si tg α = 1,5 ⇒ α = arc tg 1,5 = 56º 18’ 35”, en el primer cuadrante. Como la tangente es también positiva en el tercer cuadrante, otro ángulo cuya tangente es 1,5 es β = 180º + α = 236º 18’ 35”.

d) Si sen α = 0,3 ⇒ α = arc sen -0,3 = -17º 27’ 27” = 197º 27’ 27”, en el tercer cuadrante. Como el seno es también negativo en el cuarto cuadrante, otro ángulo cuyo seno es - 0,3 es β =360 º - 17º 27’ 27” = 342º 32’ 33”.

e) Si cos α = - 2/3 ⇒ α = arc cos – 2/3 = 131º 48’, en el segundo cuadrante. Como el coseno es también negativo en el tercer cuadrante, otro ángulo cuyo coseno es – 2/3 es β = 180º + (180º- α) = 228º 12’ .

f) Si tg α = -2 ⇒ α = arc tg -2 = - 63º 26’ 5,8” = 116º 33’ 54,2”, en el segundo cuadrante. Como la tangente es también negativa en el tercer cuadrante, otro ángulo cuya tangente es - 2 es β = 180º +(180º- α)= 243º 26’ 5,8”.

59 Recuerda las razones de 30° , 45° y 60° y completa la tabla sin usar la calculadora:

- sen 120º = sen (180º - 60º) = sen60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- cos120º = cos (180º - 60º) = - cos 60º = $-\frac{1}{2}$
- tg 120º = $\frac{sen120º}{cos120º} = \frac{sen60}{-\cos 60º} = -tg60º = -\sqrt{3}$

- sen 135º = sen (180º - 45º) = sen45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- cos135º = cos (180º - 45º) = - cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- tg 135º = $\frac{sen135º}{cos135º} = \frac{sen45º}{-\cos 45º} = -tg45º = -1$

- sen 150º = sen (180º - 30º) = sen30º = $\frac{1}{2}$.
- cos150º = cos (180º - 30º) = - cos30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- tg 150º = $\frac{sen150º}{cos150º} = \frac{sen30º}{-\cos 30º} = -tg30º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- sen 210º = sen (180º + 30º) = - sen30º = - $\frac{1}{2}$.

❋ $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

❋ $\mathrm{tg}\ 210^\circ = \frac{\mathrm{sen} 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-\mathrm{sen} 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = \mathrm{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

❁ $\mathrm{sen}\ 225^\circ = \mathrm{sen}(180^\circ + 45^\circ) = -\mathrm{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

❁ $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

❁ $\mathrm{tg}\ 225^\circ = \frac{\mathrm{sen} 225^\circ}{\cos 225^\circ} = \frac{-\mathrm{sen} 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = \mathrm{tg} 45^\circ = 1$

✪ $\mathrm{sen}\ 240^\circ = \mathrm{sen}(180^\circ + 60^\circ) = -\mathrm{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✪ $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

✪ $\mathrm{tg}\ 240^\circ = \frac{\mathrm{sen} 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{-\mathrm{sen} 60}{-\cos 60^\circ} = \mathrm{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

❁ $\mathrm{sen} 315^\circ = \mathrm{sen}(360^\circ - 45^\circ) = -\mathrm{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

❁ $\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

❁ $\mathrm{tg}\ 315^\circ = \frac{\mathrm{sen} 315^\circ}{\cos 315^\circ} = \frac{-\mathrm{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = -\mathrm{tg} 45^\circ = -1$

❋ $\mathrm{sen}\ 330^\circ = \mathrm{sen}(360^\circ - 30^\circ) = -\mathrm{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

❋ $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

❋ $\mathrm{tg}\ 330^\circ = \frac{\mathrm{sen} 330^\circ}{\cos 330^\circ} = \frac{-\mathrm{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -\mathrm{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	315°	330°
sen	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

① Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0° \le x \le 360°$.

a) $(\text{sen } x)^2 - \text{sen } x = 0$
b) $2(\cos x)^2 - \sqrt{3}\cos x = 0$
c) $3tgx+3=0$
d) $4(\text{sen } x)^2 - 1 = 0$
e) $2(\cos x)^2 - \cos x - 1 = 0$

a) $(\text{sen}x)^2 - \text{sen}x = 0;\ \text{sen}x(\text{sen}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° = 360° \\ x = 180° \end{cases} \\ \text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = 1 \Rightarrow x = 90° \end{cases}$

b) $2(\cos x)^2 - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90° \\ x = 270° \end{cases} \\ 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0\ \ tgx = \dfrac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 225° \\ x = 315° \end{cases}$

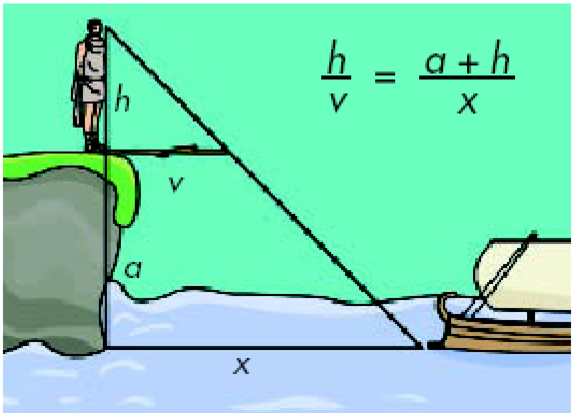
d) Si despejamos cosh de la ecuación de segundo grado:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{4}{4} = 1 \\ \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \cos = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° \\ x = 360° \end{cases} \\ \text{Si } \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases} \end{cases}$$

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

① Tales y la catapulta

Cuando la ciudad de Mileto, en la costa griega, fue atacada por naves enemigas, los soldados recurrieron a Tales: necesitaban saber la distancia a que se encontraba una nave para ajustar el tiro de sus catapultas. Tales resolvió el problema sacando una vara por la cornisa del acantilado, de forma que su extremo coincidiera con la visual del barco. Conociendo su altura (h), la del acantilado (a) y la longitud de la vara (v), calculó sin dificultad la distancia deseada (x).



¿ Sabrías hacerlo tú?

Si despejamos x de la proporción $\dfrac{h}{v} = \dfrac{a+h}{x}$ tenemos: $x = \dfrac{v(a+h)}{h}$

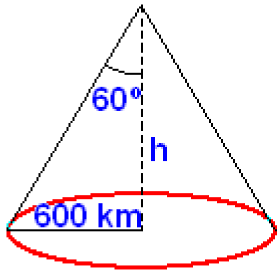
③ Fotos vía satélite

La Península Ibérica cabe en un círculo de 600 km de radio.

¿A qué altura debe colocarse un satélite para hacer una fotografía de la Península, sabiendo que el objetivo de la cámara fotográfica tiene una amplitud de 120° ?

(Nota: Consideraremos la Península como una superficie plana.)

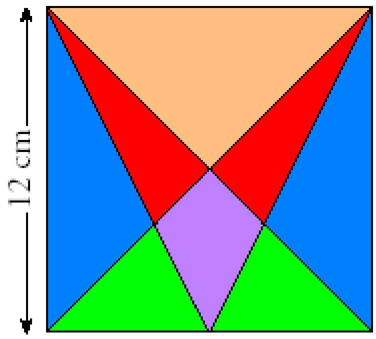
Como $\mathrm{tg}60^\circ = \dfrac{600\text{ km}}{h}$

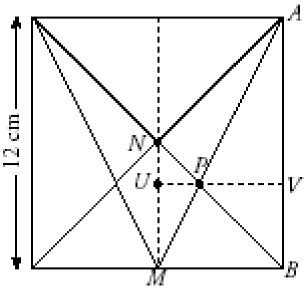


Despejando $h = \dfrac{600\text{ km}}{\mathrm{tg}60^\circ} = \dfrac{600\text{ km}}{\sqrt{3}} \approx 346{,}4\text{ km}$

④ Cuadrado a trozos

Calcula el área de la parte del cuadrado ocupada por cada color.





El triángulo $\overset{\triangle}{MPN}$ es semejante al triángulo $\overset{\triangle}{APB}$.

La razón de semejanza es $\dfrac{\overline{NM}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$, y la razón de las áreas, $\dfrac{1}{4}$.

Como consecuencia: $\overline{PV} = 2 \cdot \overline{UP} \rightarrow \begin{cases} \overline{UP} = \dfrac{\overline{UV}}{3} = \dfrac{6}{3} = 2\text{ cm} \\ \overline{VP} = \dfrac{2 \cdot \overline{UV}}{3} = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = 4\text{ cm} \end{cases}$

Ahora ya podemos calcular superficies:

$$S_{\widehat{APB}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{VP}}{2} = \frac{12\cdot 4}{4} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{\widehat{NPM}} = \frac{S_{\widehat{APB}}}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}^2$$

$$S_{\widehat{ANP}} = S_{\widehat{ANB}} - S_{\widehat{APB}} = \frac{12^2}{4} - 24 = 12 \text{ cm}^2$$

$$S_{\widehat{MPB}} = S_{\widehat{MNB}} - S_{\widehat{NPM}} = \frac{12^2}{8} - 6 = 12 \text{ cm}^2$$

$\rightarrow$

$$S_{\text{AMARILLA}} = \frac{12^2}{4} = 36 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{AZUL}} = 2\cdot S_{\widehat{APB}} = 2\cdot 24 = 48 \text{ cm}^2$$

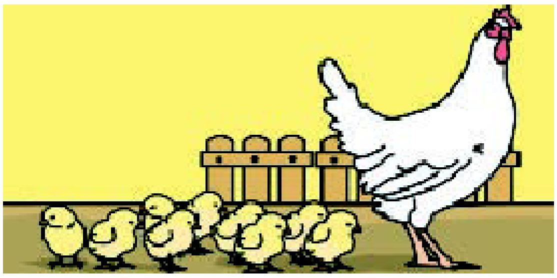
$$S_{\text{MORADA}} = 2\cdot S_{\widehat{NPM}} = 2\cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{VERDE}} = 2\cdot S_{\widehat{MPB}} = 2\cdot 12 = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{ROJA}} = 2\cdot S_{\widehat{ANP}} = 2\cdot 12 = 24 \text{ cm}^2$$

⑤ El pollo sube

Hace dos años compré 44 pollitos para mi granja por cierta cantidad de dinero ¿ Cuánto me darían hoy por esa misma cantidad, sabiendo que este producto ha subido un 5% cada año?



Asignemos al precio del pollito hace dos años = x

Como compré 44 pollitos me gasté 44x dinero.

Como sube un 5 % cada año, cada pollito costará:

El primer año: 1,05x
El segundo año: 1,05·1,05x = 1,1025x

y, a ese precio podré comprar, con 44x : $\frac{44x}{1{,}1025x} = 39{,}91 \approx 40$ pollitos

③ ¿Quién es quién? Solamente una dice la verdad y solamente una sabe trigonometría.

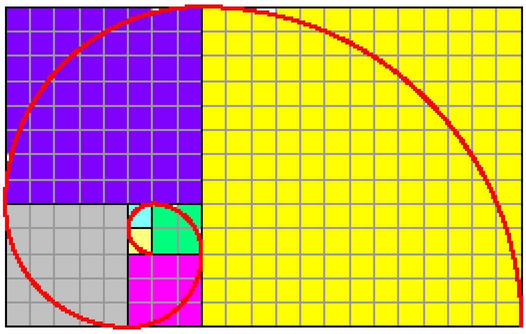
Supongamos que las chicas se llaman María (la de azul), Esther (la de Rosa) y Rebeca (la de amarillo y fucsia). Estudiemos las posibilidades:

❶ **María dice la verdad** (es experta en trigonometría) entonces Rebeca y Esther mienten pues sólo una debe decir la verdad y esta es María, pero si Esther miente ya hay dos chicas que saben trigonometría (ella y María) lo que contradice el enunciado de que sólo una sabe trigonometría, luego no puede ser cierto que María es la que dice la verdad.

❷ Es **Esther la que dice la verdad** (ella no sabe trigonometría), entonces las otras dos no pueden saber trigonometría (sólo hay una, según el enunciado que sabe trigonometría), pero entonces Rebeca tiene razón y habría dos que dicen la verdad en contra de la suposición inicial. Esther tampoco es la sincera.

❸ Si es **Rebeca la única sincera**, María y Esther mienten por tanto María no sabe trigonometría y Esther tampoco, luego sólo Rebeca sabe trigonometría y es la sincera.

④ Espiral y sucesión



¿ Sabrías explicar la relación existente entre la espiral y esta serie numérica?

1 - 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 -...

¿ Cuál sería el siguiente término de esta serie?

Cada número es el número de cuadraditos que tiene el lado del cuadrado por el que va pasando la espiral:

El primer cuadrado (amarillo claro) tiene de lado 1.
El 2º cuadrado (azul claro) también tiene de lado 1.
El tercer cuadrado (verde) tiene 2 cuadraditos de lado.
El cuarto cuadrado (rosa) tiene 3 cuadraditos de lado.
El quinto cuadrado (gris) tiene 5 cuadraditos de lado.
El sexto (violeta) tiene 8 cuadraditos de lado.
El séptimo cuadrado (amarillo) tiene 13 cuadrados de lado.
El siguiente tendría 8 + 13 = 21 cuadraditos de lado.

El serie de Fibonacci en que cada término (excepto el primero) se forma sumando los dos que le preceden.