Relaciones fundamentales

6 Si sen α = 3/5, calcula cos α y tg α utilizando las relaciones fundamentales (α < 90°).

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

7 Halla el valor exacto (con radicales) de sen α y cos α sabiendo que tg α = 3 (α < 90°).

$$\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 3 & \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = 3\cos\alpha \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

que sustituimos en la segunda:

$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 10\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y entonces $\text{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

8 Completa esta tabla:

	①	②	③	④	⑤	⑥
sen α	0,92	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	0,2	$\sqrt{3}/2$
cos α	0,39	0,8	0,12	$2/3$	0,98	1 /2
tg α	2,36	0,75	8,25	$\sqrt{5}/2$	0,2	$\sqrt{3}$

①

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}92^2} = 0{,}39 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$

②

Resolvemos el sistema : $\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}75 \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos senα de la primera (senα = 0,75 cosα) y sustituimos en la segunda $(0{,}75\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$; $0{,}5625\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1{,}5625\cos^2\alpha = 1$, es decir $\cos^2\alpha = \frac{1}{1{,}5625} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1{,}5625}} = 0{,}8$ y, sustituyendo senα = 0,75 ·0,8 = 0,6, que llevamos a la tabla.

③

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}12^2} = 0{,}99 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}25$

④

Resolvemos el sistema : $\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos sen$\alpha$ de la primera (senα = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cosα) y sustituimos en la segunda $\dfrac{5}{4}\cos^2\alpha$ +$\cos^2\alpha$ = 1; $\dfrac{9}{4}\cos^2\alpha$ =1; es decir $\cos^2\alpha = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ y, sustituyendo senα = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, que llevamos a la tabla.

⑤

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}39 \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$

⑥

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow sen\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

9 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan y el ángulo α ($\alpha < 90°$).

	①	②	③
sen α	1/3	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
cos α	$2\sqrt{2}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
tg α	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{7/2}$	2
α	19º 28' 16,39"	61º 52' 28,18"	63º 26' 5,82"

①

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

α = arc sen(1/3) = 19º 28' 16,39"

②

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow sen\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (\sqrt{2}/3)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

α = arc cos($\sqrt{2}$/3) = 61º 52' 28,18".

③

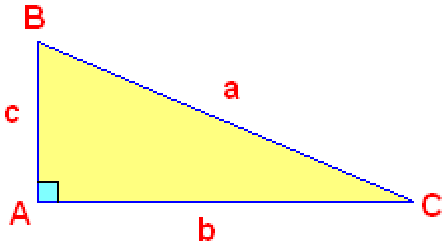
Resolvemos el sistema : $\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = 2 \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos senα de la primera (senα = 2 cosα) y sustituimos en la segunda 4cos$^2\alpha$ +cos$^2\alpha$ = 1; 5cos$^2\alpha$ =1; es decir $\cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y, sustituyendo senα =2$\frac{\sqrt{5}}{5}$, que llevamos a la tabla.

α = arc tg2 = 63º 26’ 5,82”

Resolución de triángulos rectángulos

①① Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A}$ = 90°):

a) b = 5 cm c = 12 cm Calcula a, B y C
b) c = 43 m C = 37° Calcula a, b y B
c) b = 7 m C = 49° Calcula a, c y B
d) a = 5 m B = 65° Calcula b, c y C



a) Hallamos la longitud de la hipotenusa a mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

$$tg\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{5cm}{12cm} = 0,42 \Rightarrow \hat{B} = arc\ tg\frac{5}{12} = 22º37'11,51''$$
$$\hat{C} = 90º - \hat{B} = 90º - 22º37'11,51'' = 67º22'48,49''$$

b) $$sen\hat{C} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{43m}{sen37º} = 71,45\ m; \hat{B} = 90º - \hat{C} = 90º - 37º = 53º$$

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{c}{tg\hat{C}} = \frac{43m}{tg37º} = 57,1m$$

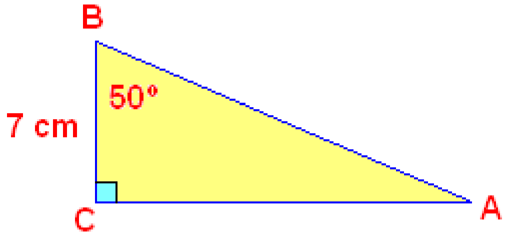
c) $$\cos\hat{C} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\cos\hat{C}} = \frac{7m}{\cos 49º} = 10,7\ m; \hat{B} = 90º - \hat{C} = 90º - 49º = 41º$$

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b\,tg\hat{C} = 7m \cdot tg49º = 8,1\,m$$

d) $$\hat{C} = 90º - \hat{B} = 90º - 65º = 25º; sen\hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a\,sen\hat{B} = 5m \cdot sen65º = 4,53m$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a\cos\hat{B} = 5m \cdot \cos 65º = 2,11\,m$$

①① En un triángulo rectángulo, ABC con el ángulo recto en C conocemos B = 50° y el cateto $\overline{BC}$ = 7cm . Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y Â.

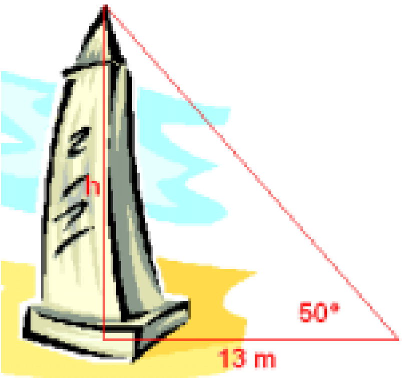


$$\hat{A} = 90º - \hat{B} = 90º - 50º = 40º$$

$$tg\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BC} \cdot tg\hat{B} = 7 \cdot tg50º = 8{,}3cm$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\cos\hat{B}} = \frac{7cm}{\cos 50º} = 10{,}9\ cm$$

①② Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.



$$tg50º = \frac{h}{13m} \Leftrightarrow h = 13m \cdot tg50º = 15{,}5\ m$$

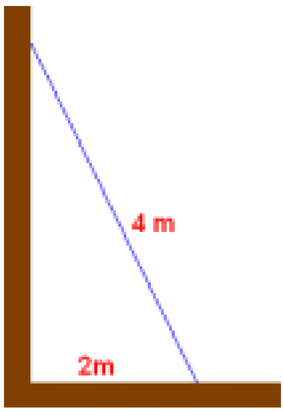
①③ De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo mide 45° y uno de sus catetos 5 cm. ¿ Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?

Si es rectángulo y un ángulo mide 45º, el otro también medirá 45º, es isósceles, luego el otro cateto también mide 5 cm y la hipotenusa (h) :

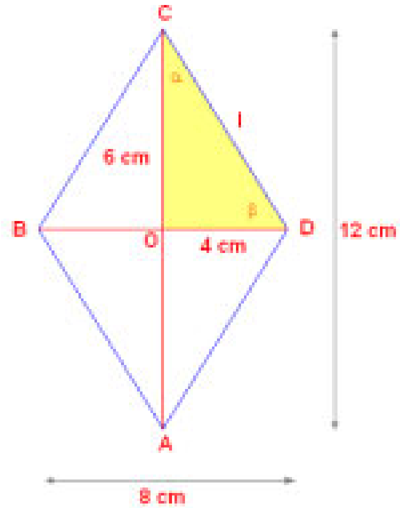
$$h = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} = 7{,}07\ cm$$

①④ Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿ Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

$$\cos\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60º$$



⓵⓹ Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿ Cuánto mide el lado del rombo?



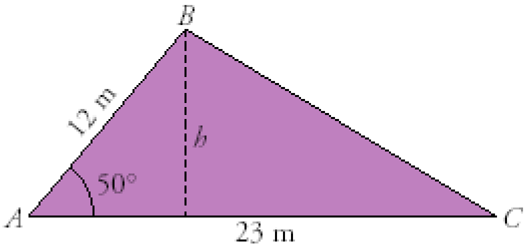
$$l=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=7{,}21\,\text{cm}$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\frac{4\text{cm}}{6\text{cm}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha=\text{arctg}\frac{2}{3}=33°41'24{,}24''$$

β = 90º - α = 90º- 33º 41' 24,24" = 56º 18' 35,76"

⓵⓺ En el triángulo ABC:

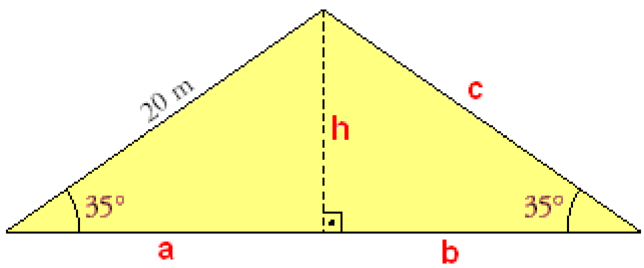
a) Traza la altura sobre AC y halla su longitud.
b) Calcula el área del triángulo.



a) $\text{sen}50°=\frac{h}{\overline{AB}}\Leftrightarrow h=\overline{AB}\text{sen}50°=12\text{m}\cdot\text{sen}50°=9{,}2\text{m}$

b) $A=\frac{\overline{AC}\cdot h}{2}=\frac{23\text{m}\cdot 9{,}2\text{m}}{2}=105{,}8\ \text{m}^2$

⓵⓻ Calcula el área de este triángulo:



$$\text{sen}35°=\frac{h}{20\text{m}}\Leftrightarrow h=20\text{m}\cdot\text{sen}35°=11{,}5\text{ m}$$

$$\cos 35°=\frac{a}{20\text{m}}\Leftrightarrow a=20\text{m}\cdot\cos 35°=16{,}4\text{ m}$$

Base = a + b = 2a = 2 · 16,4 m = 32,8 m

$$\text{Área}=\frac{\text{Base}\cdot h}{2}=\frac{32{,}8\text{m}\cdot 11{,}5\text{m}}{2}=188{,}6\ \text{m}^2$$

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

18 Di en qué cuadrante se encuentran los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.

a) 128° **b)** 198° **c)** 87° **d)** 98° **e)** 285° **f)** 305°

Compruébalo con la calculadora.

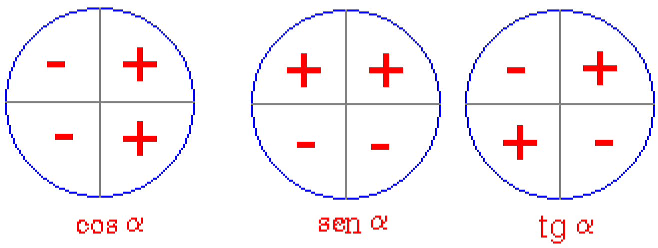
Como 0º < 1er cuadrante < 90º, 90º < 2º cuadrante < 180º, 180º < 3er cuadrante < 270º, 270º < 4^{o} cuadrante < 360º, tenemos:

	128º	198º	87º	285º	305º
Cuadrante	2º	3º	1º	3º	3º
sen	+	-	+	-	-
cos	-	-	+	+	+
tg	-	+	+	-	-

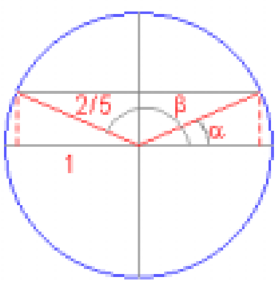
19 Completa esta tabla sin usar la calculadora:

	0°	90°	180°	270°	360º
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	∞	0	- ∞	0

20 En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿ Cuál corresponde a sen α, cuál a cos α y cuál a tg α?



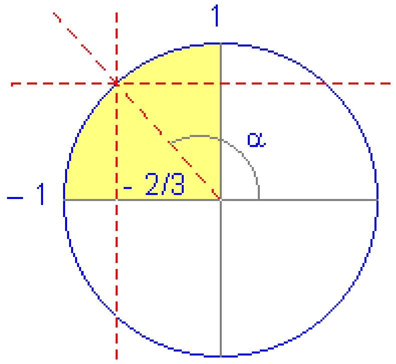
22 Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 2/5 y halla su coseno.



$$\text{sen}\alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \alpha = \text{arcsen}\frac{2}{5} = 23º\ 34'\ 1{,}44''$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

23 Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea -2/3 y halla su seno y su tangente.



$$\cos\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos -\frac{2}{3} = 131^{\circ}\ 48'\ 37{,}1''$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

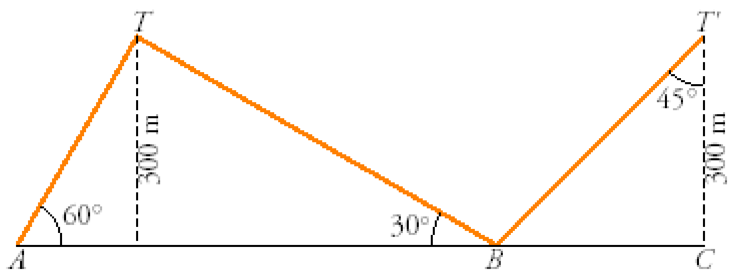
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

24 Sabiendo que tg α = -2 y α < 180°, halla sen α y cos α.

Resolvemos el sistema : $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -2 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos senα de la primera (senα = -2 cosα) y sustituimos en la segunda $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $5\cos^2\alpha = 1$; es decir $\cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y, sustituyendo senα = $-2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

PIENSA Y RESUELVE

25 Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, T y T'. Este es un plano de la línea:



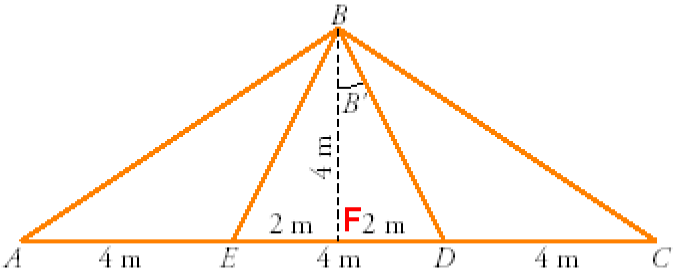
Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.

$$\operatorname{sen}60^{\circ} = \frac{300\text{m}}{\overline{AT}} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{300\text{m}}{\operatorname{sen}60^{\circ}} = 346{,}1\,\text{m}$$

$$\operatorname{sen}30^{\circ} = \frac{300\text{m}}{\overline{BT}} \Rightarrow \overline{BT} = \frac{300\text{m}}{\operatorname{sen}30^{\circ}} = 600\text{ m}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{300\text{m}}{\overline{BT'}} \Rightarrow \overline{BT'} = \frac{300\text{m}}{\cos 45^\circ} = 424{,}3\text{ m}$$

26 Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura.



Halla la longitud de los postes $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$ y la medida de los ángulos A , C , EBD y ABC.

◉ En el triángulo rectángulo ABF, hallamos la hipotenusa $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{(4+2)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21\text{m}$$

◉ En el triángulo rectángulo EFB, hallamos la hipotenusa $\overline{BE}$:

$$\overline{EB}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4{,}5\text{ m}$$

◉ En el triángulo rectángulo ABF:

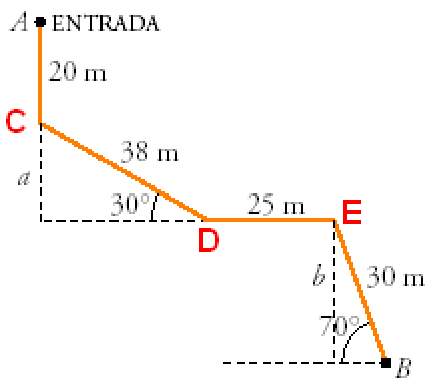
$$\text{tg}\hat{A} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} = \frac{4\text{m}}{6\text{m}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \text{arctg}\frac{2}{3} = 33^\circ\, 41'\, 24{,}24''\text{ , luego } A\hat{B}F = 90^\circ - \hat{A} = 56^\circ\, 18'\, 35{,}76''$$

y por tanto $A\hat{B}C = 2 \cdot A\hat{B}F = 112^\circ\, 37'\, 11{,}5''$

◉ En el triángulo rectángulo FBD: $\text{tg}\hat{B}' = \frac{\overline{FD}}{\overline{FB}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}' = \text{arctg}\frac{1}{2} = 26^\circ\, 33'\, 4{,}18''$ luego

$E\hat{B}D = 2 \cdot \hat{B}' = 53^\circ\, 7'\, 48{,}37''$

27 Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.



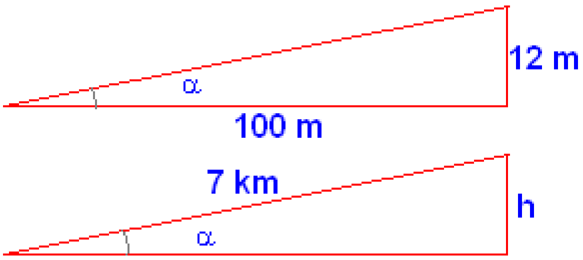
La profundidad a que se halla B es = 20 m + a + b, tenemos que hallar a y b :

$$\text{sen}30^\circ = \frac{a}{\overline{CD}} \Leftrightarrow a = \overline{CD} \cdot \text{sen}30^\circ = 38\text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 19\text{ m}$$

$$\text{sen}70^\circ = \frac{b}{\overline{EB}} \Leftrightarrow b = \overline{EB} \cdot \text{sen}70^\circ = 30\text{ m} \cdot \text{sen}70^\circ = 28{,}2\text{ m}$$

Luego Profundidad = 20 m + 19m + 28,2 = 67,2 m

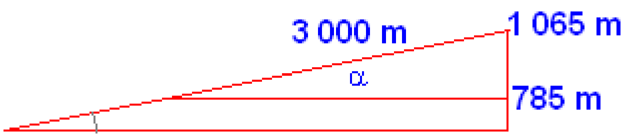
❷❽ Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿ Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿ Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?



$$\text{tg}\alpha = \frac{12\text{m}}{100\text{m}} = 0{,}12 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}0{,}12 = 6º\ 50'\ 34''$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{h}{7\text{km}} \Leftrightarrow h = 7\text{km}\cdot\text{sen}\alpha = 0{,}834 = 834\text{m}$$

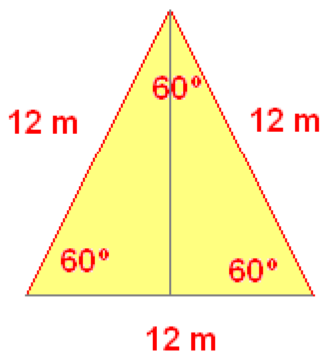
❷❾ En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1065 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.



$$\text{sen}\alpha = \frac{1065 - 785}{3000} = 0{,}09\widehat{3} \Rightarrow \alpha = 5º\ 21'\ 19{,}44''$$

Pendiente = tg 5º 21' 19,44" = 0,094 = 9,4 %

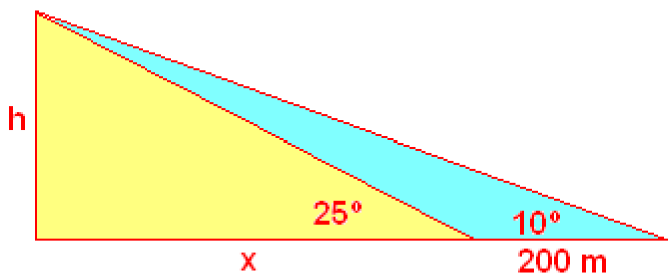
❸⓿ Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 60°. ¿ Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?



Si el ángulo de abertura es de 60º el triángulo formado ha de ser equilátero y por tanto el radio de la circunferencia que se puede trazar es de 12m.

❸❶ Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya23base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:

- ♦ El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°.
- ♦ Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.



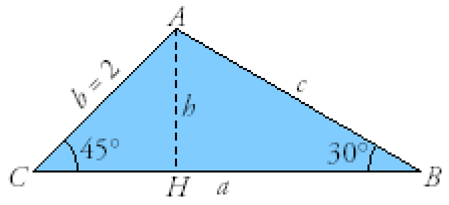
Es un caso típico de "doble observación"

$$\begin{cases} \text{tg}25º = \dfrac{h}{x} & h = x\text{tg}25º \\ \text{tg}10º = \dfrac{h}{200 + x} & h = (200 + x)\text{tg}10º \end{cases}$$

x tg25º = (200+x) tg10º

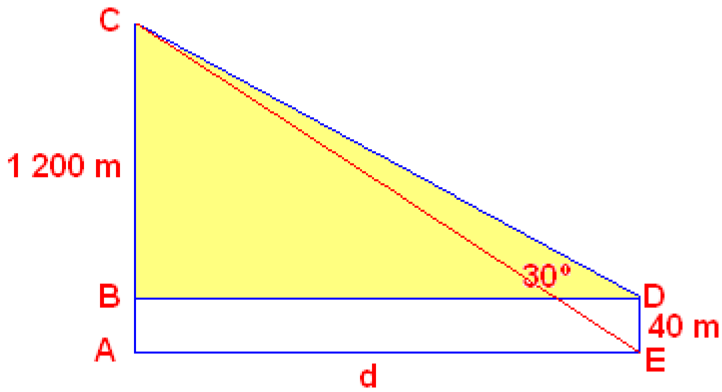
$$x = \frac{200tg10^o}{tg25^o - tg10^o} = 121{,}6\ m \Rightarrow h = xtg25^o = (200 + x)tg10^o = 121{,}6 \cdot tg25^o = 321{,}6 \cdot tg10^o \approx 56{,}7\ m$$

32 Resuelve el siguiente triángulo ABC; es decir, averigua las medidas de sus elementos desconocidos. Empieza por trazar la altura AH.



33 Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30° . ¿ A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?

Se nos pide hallar la longitud de $\overline{CE}$, para lo cual hallamos la longitud de $\overline{BD}$ = d en el triángulo BCD y después aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ACE para hallar la hipotenusa $\overline{CE}$.



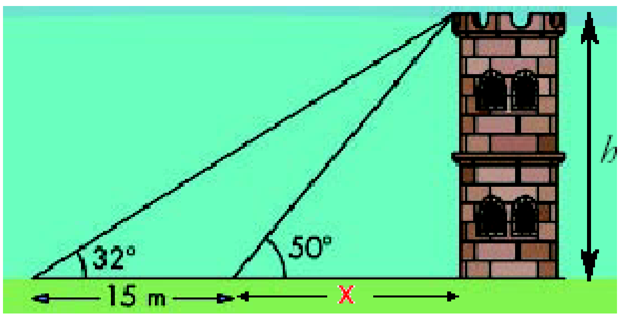
Cálculo de la longitud de BD :

$$tg30^o = \frac{1200 - 40}{d} \Leftrightarrow d = \frac{1160}{tg30^o} = 2009{,}2\ m$$

Cálculo de la longitud de CE:

$\overline{CE} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{1200^2 + 2009{,}2^2} = 2340{,}3$ m es la distancia del avión al pie de la torre.

34 Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50° . ¿ Cuál es la altura de la torre?



De nuevo un caso de “doble observación” :

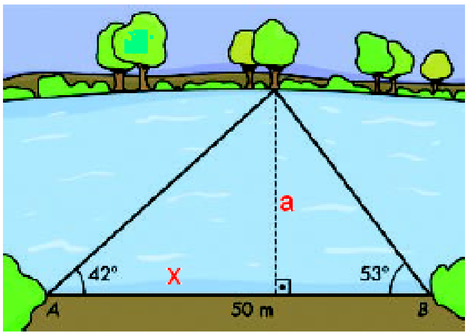
$$\left.\begin{array}{l} tg32^o = \dfrac{h}{15 + x} \\ tg50^o = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\}$$

resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y tenemos h y x:

$$(15 + x)\,tg32^o = h;\ xtg50^o = h \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{h}{tg32^o} - 15 \\ x = \dfrac{h}{tg50^o} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{h}{tg32^o} - 15 = \frac{h}{tg50^o} \Leftrightarrow h = \frac{15}{\dfrac{1}{tg32^o} - \dfrac{1}{tg50^o}} = 19{,}7\ m$$

35 Observa las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río. Realiza los cálculos que ha de hacer Juan para hallar la anchura del río.

Otro problema de "doble observación".

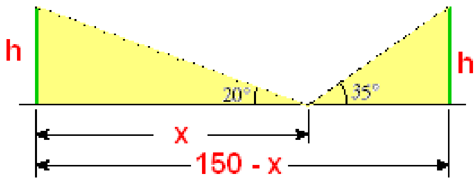


$$\left.\begin{array}{l} tg42^o = \dfrac{a}{x} \\ tg53^o = \dfrac{a}{50 - x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow a = xtg42^o \\ \Leftrightarrow a = (50 - x)\cdot tg53^o \end{array} \Rightarrow xtg42^o = (50 - x)tg53^o$$

$$xtg42^o + xtg53^o = 50tg53^o \Leftrightarrow x(tg42^o + tg53^o) = 50tg53^o$$

$$x = \frac{50tg53^o}{tg42^o + tg53^o} = 29{,}8\ m \qquad \begin{array}{l} a = xtg42^o = 29{,}8\cdot tg42^o = 26{,}8\ m \\ a = (50 - x)tg53^o = (50 - 29{,}8)tg53^o = 26{,}8\ m \end{array}$$

36 Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿ Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?



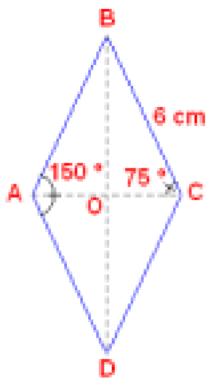
Otro problema de "doble observación".

$$\left.\begin{array}{l} tg20^o = \dfrac{h}{x} \\ tg35^o = \dfrac{h}{150 - x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow h = xtg20^o \\ \Leftrightarrow h = (150 - x)\cdot tg35^o \end{array} \Rightarrow xtg20^o = (150 - x)tg35^o$$

$$xtg20^o + xtg35^o = 150tg35^o \Leftrightarrow x(tg20^o + tg35^o) = 150tg53^o$$

$$x = \frac{150tg35^o}{tg20^o + tg35^o} = 98{,}7\ m \qquad \begin{array}{l} h = xtg20^o = 98{,}7\cdot tg20^o = 36\ m \\ h = (150 - x)tg35^o = (150 - 98{,}7)tg35^o = 36\ m \end{array}$$

37 Calcula el área de un rombo cuyo lado mide 6 cm y uno de sus ángulos, 150°.



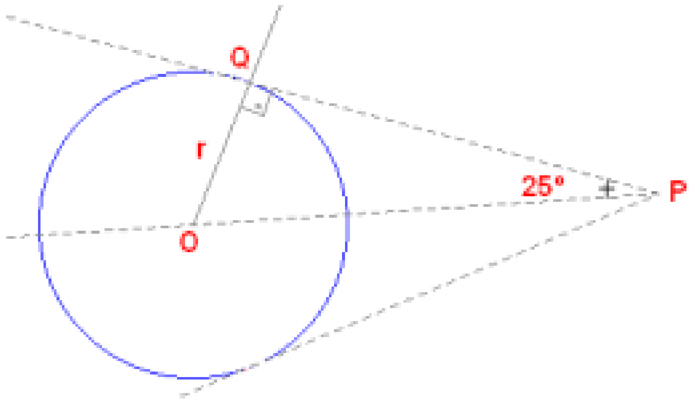
El área de un rombo se halla A = $\dfrac{D\cdot d}{2} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}$, luego, hemos de hallar la longitud de las diagonales utilizando las razones trigonométricas:

$$\text{sen}75^\circ = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{OB} = \overline{BC}\text{sen}75^\circ = 6\text{ cm}\cdot\text{sen}75^\circ = 5{,}8\text{ cm}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{BC}\cos 75^\circ = 6\text{ cm}\cdot\cos 75^\circ = 1{,}6\text{ cm}$$

$$A = \frac{2\overline{OB}\cdot 2\overline{OC}}{2} = 2\cdot 5{,}8\text{cm}\cdot 1{,}6\text{cm} = 18{,}6\text{ cm}^2$$

38 Las tangentes a una circunferencia de centro O, trazadas desde un punto exterior P, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia PO sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.

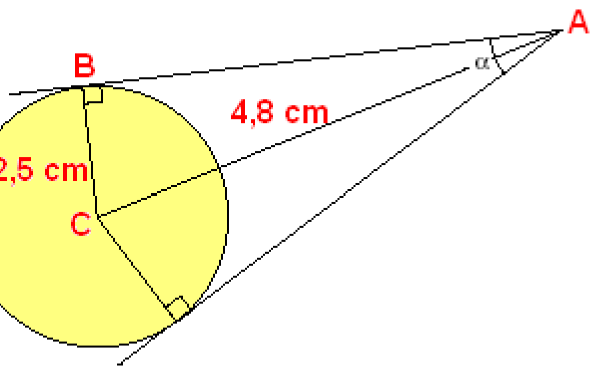


$$\text{sen}25^\circ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{\overline{OQ}}{\text{sen}25^\circ} = \frac{12{,}4\text{cm}}{\text{sen}25^\circ} =$$

= 29,3 m es la distancia de $\overline{OP}$.

39 El diámetro de una moneda de 2 € mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.

El triángulo ABC es rectángulo en B ya que el radio siempre es perpendicular a la tangente en ese punto.

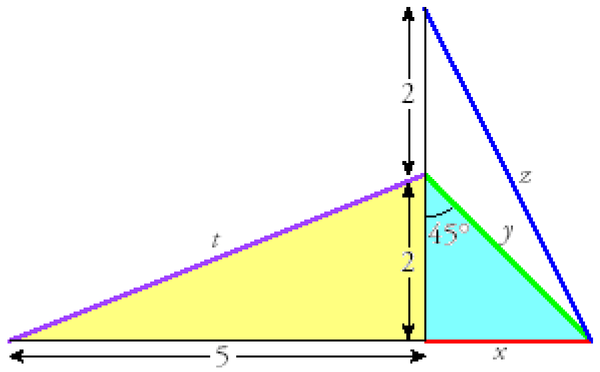


$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}5\text{cm}}{4{,}8\text{cm}} = 0{,}5208\widehat{3}$$

luego $\frac{\alpha}{2} = \text{arcsen}0{,}5208\widehat{3} = 31^\circ\ 23'\ 17{,}4''$

$\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\cdot(31^\circ\ 23'\ 17{,}4'') = 62^\circ\ 46'\ 34{,}8''$

40 Calcula los valores de x, y, z, t en la siguiente figura:



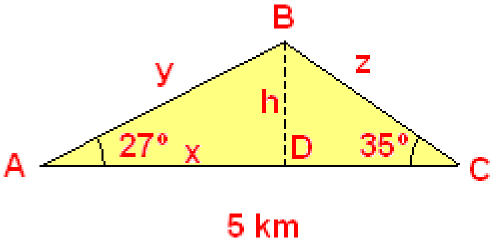
$$\text{tg}45^\circ = \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2\cdot 1 = 2$$

$$t = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4$$

$$z = \sqrt{(2+2)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$$

④② En dos comisarías de policía, A y C se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.

$$\left.\begin{array}{l} tg27^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg35^\circ = \dfrac{h}{5-x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow h = xtg27^\circ \\ \Rightarrow h = (5-x)tg35^\circ \end{array} \Rightarrow xtg27^\circ = (5-x)tg35^\circ$$

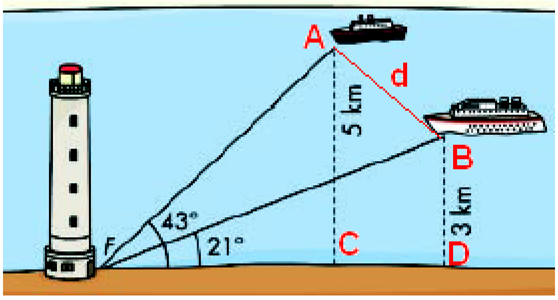


$$xtg27^\circ + xtg35^\circ = 5tg35^\circ \Leftrightarrow x(tg27^\circ + tg35^\circ) = 5tg35^\circ$$

$$x = \frac{5tg35^\circ}{tg27^\circ + tg35^\circ} \approx 2{,}9 \text{ km} \; ; \; \cos 27^\circ = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{x}{\cos 27^\circ} = \frac{2{,}9km}{\cos 27^\circ} \approx 3{,}25km$$

$$\cos 35^\circ = \frac{5-x}{z} \Leftrightarrow z = \frac{5-x}{\cos 35^\circ} \approx 2{,}56 \text{ km.}$$

④③ Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.



Hallamos primero las distancias $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:

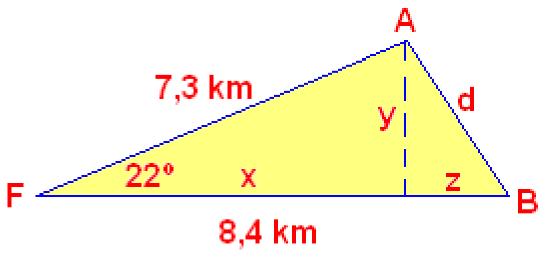
⊗ En el triángulo FAC:

$$sen43^\circ = \frac{5km}{\overline{FA}} \Leftrightarrow \overline{FA} = \frac{5km}{sen43^\circ} \approx 7{,}3 \text{ km}$$

⊗ En el triángulo FBD:

$$sen21^\circ = \frac{3km}{\overline{FB}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \frac{3km}{sen21^\circ} \approx 8{,}4 \text{ km.}$$

Nos fijamos ahora en el triángulo FAB



$$sen22^\circ = \frac{y}{7{,}3km} \Leftrightarrow y = 7{,}3 \cdot sen22^\circ = 2{,}7 \text{ km}$$

$\cos 22^\circ = \dfrac{x}{7{,}3km} \Leftrightarrow x = 7{,}3 \cdot \cos 22^\circ = 6{,}8$ km , luego z = 8,4 km – x = 8,4 km – 6,8 km = 1,6 km y

por último: $d = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{2{,}7^2 + 1{,}6^2} = 3{,}1\,km$ separa los dos barcos.