

REFLEXIONA

Trigonometría, etimológicamente, significa medida de triángulos. Conociendo algunos elementos de un triángulo -algún lado, algún ángulo-, hemos de determinar los restantes. Para ello, se comparará con otro triángulo semejante a él del cual lo conozcamos todo, como hacen los chicos del dibujo: la estaca y su sombra, si el terreno es horizontal, forman un triángulo rectángulo semejante a cada uno de los triángulos formados por un árbol y su correspondiente sombra.

■ Los chicos del dibujo deben medir las alturas de los 47 árboles de una cierta parcela horizontal. Para ello, proceden del siguiente modo:

Clavan en el suelo una estaca vertical que sobresale 120 cm. A continuación, corren a señalar en el suelo los extremos de las sombras de los 47 árboles y de la estaca (¿ por qué tanta prisa?). Una vez señaladas, proceden con tranquilidad a medirlas y a anotar sus mediciones. He aquí algunos resultados:

SOMBRA DE...	Estaca	Ciprés	Higuera	Chopo
MIDE	75 cm	8,8 m	3 m	5,7 m

Calcula razonadamente la altura de esos tres árboles.

Las prisas se deben a que a medida que pasa el tiempo la longitud de la sombra se modifica pues el Sol sigue su camino.

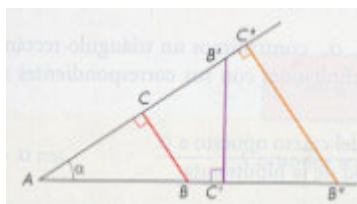
La estaca y los árboles forman con la sombra triángulos rectángulos ( si el suelo es horizontal y los árboles verticales) que serán semejantes ya que el ángulo de incidencia de los rayos solares es el mismo ( casi el mismo si lo miden muy deprisa), luego se cumple:

$$\frac{\text{Sombra}_{\text{estaca}}}{h_{\text{estaca}}} = \frac{S_{\text{Ciprés}}}{h_{\text{ciprés}}} = \frac{S_{\text{Higuera}}}{h_{\text{higuera}}} = \frac{S_{\text{Chopo}}}{h_{\text{chopo}}} \Rightarrow \begin{cases} h_{\text{ciprés}} = S_{\text{ciprés}} \frac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 8,8\text{m} \cdot \frac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 14,08 \text{ m} \\ h_{\text{higuera}} = S_{\text{higuera}} \frac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 3\text{m} \cdot \frac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 4,8 \text{ m} \\ h_{\text{chopo}} = S_{\text{chopo}} \frac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 5,7\text{m} \cdot \frac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 9,12 \text{ m} \end{cases}$$

TE CONVIENE RECORDAR

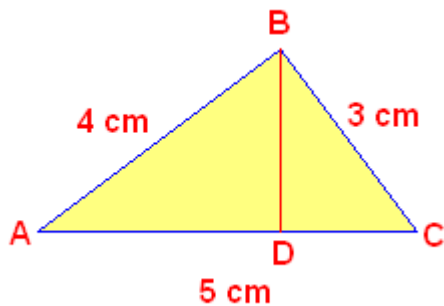
CUÁNDO SON SEMEJANTES DOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.



Por ejemplo, si trazamos perpendiculares a los lados de un ángulo agudo (BC, B'C', B''C'') los triángulos formados (ABC, AB'C', AB''C'') son semejantes porque son rectángulos con el ángulo agudo a común.

① Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Es rectángulo porque sus lados verifican el teorema de Pitágoras ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ). Traza la altura sobre la hipotenusa. Demuestra que los dos pequeños triángulos en que se divide el grande son semejantes entre sí.



Se forman tres triángulos: ABC, ABD y CBD.

ABC y ABD son semejantes pues son rectángulos y tienen el ángulo  $\hat{A}$  en común.

ABC y CBD son semejantes pues son rectángulos y tienen el ángulo  $\hat{C}$  en común.

Luego ABD y CBD son semejantes entre sí pues ambos son semejantes a ABC.

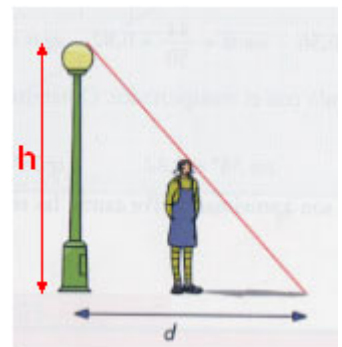
CÓMO SE MIDEN CIERTAS LONGITUDES INACCESIBLES

Debido a su lejanía, los rayos que llegan a la Tierra procedentes del Sol son paralelos entre sí. Un campo como el que se describe en la página anterior puede considerarse plano (es suficientemente pequeño como para no apreciarse la esfericidad de la Tierra). Por tanto, los rayos del Sol forman, en cada instante, el mismo ángulo con la superficie. Por eso son semejantes todos los triángulos que forman los árboles con sus respectivas sombras.

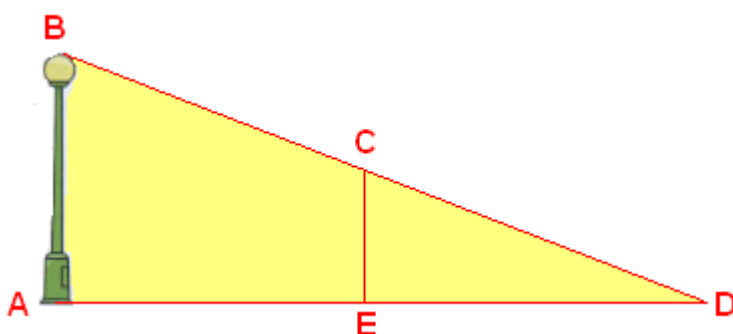
Pero eso no ocurre cuando la luz procede de una farola. Observa cómo calcula Leticia la altura de una morera que proyecta una sombra de 5,7 m a la luz de una farola de altura desconocida:

a) Altura de Leticia = 1,68 m. Sombra de Leticia = 1,5 m,  $d = 2,9$  m  
Con esto se calcula la altura de la farola.

$$\frac{h_{\text{farola}}}{d} = \frac{h_{\text{Leticia}}}{s_{\text{Leticia}}} \Leftrightarrow h_{\text{farola}} = \frac{h_{\text{Leticia}}}{s_{\text{Leticia}}} \cdot d = \frac{1,68\text{m}}{1,5\text{m}} \cdot 2,9\text{m} = 3,248 \text{ m}$$



b) Conociendo la altura de la farola y la sombra de la morera, 5,7 m, y midiendo la distancia de la farola a la morera, 8 m, se calcula la altura de la morera.



Altura de la farola =  $\overline{AB} = h_f = 3,248 \text{ m}$ .

Altura de la morera =  $\overline{CE} = h_m$

Distancia de la farola a la morera =  $\overline{AE} = d_1 = 8\text{m}$ .

Sombra que arroja la morera =  $\overline{ED} = d_2 = 5,7 \text{ m}$ .

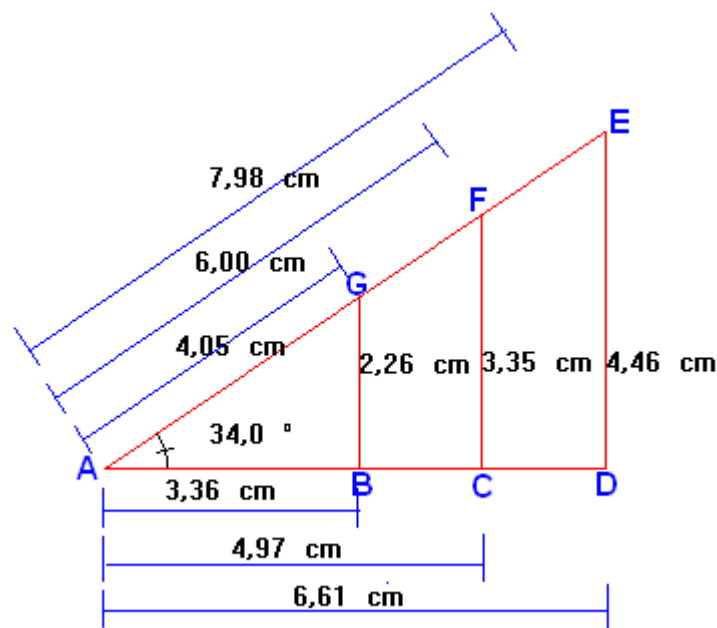
Como los triángulos ABD y ECD son semejantes (son rectángulos y tienen el ángulo  $\hat{A}$  común), se cumplirá la razón de semejanza:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \frac{h_f}{h_m} = \frac{d_1 + d_2}{d_2} \Leftrightarrow \frac{3,248\text{m}}{h_m} = \frac{5,7\text{m} + 8\text{m}}{5,7\text{m}} \Leftrightarrow h_m = \frac{3,248 \cdot 5,7}{13,7} = 1,35\text{ m}$  de altura mide la morera.

Actividades

Pág 154

① Dibuja sobre un ángulo como el anterior,  $34^\circ$ , un triángulo rectángulo mucho más grande. Halla sus razones trigonométricas y observa que son, aproximadamente, las mismas.

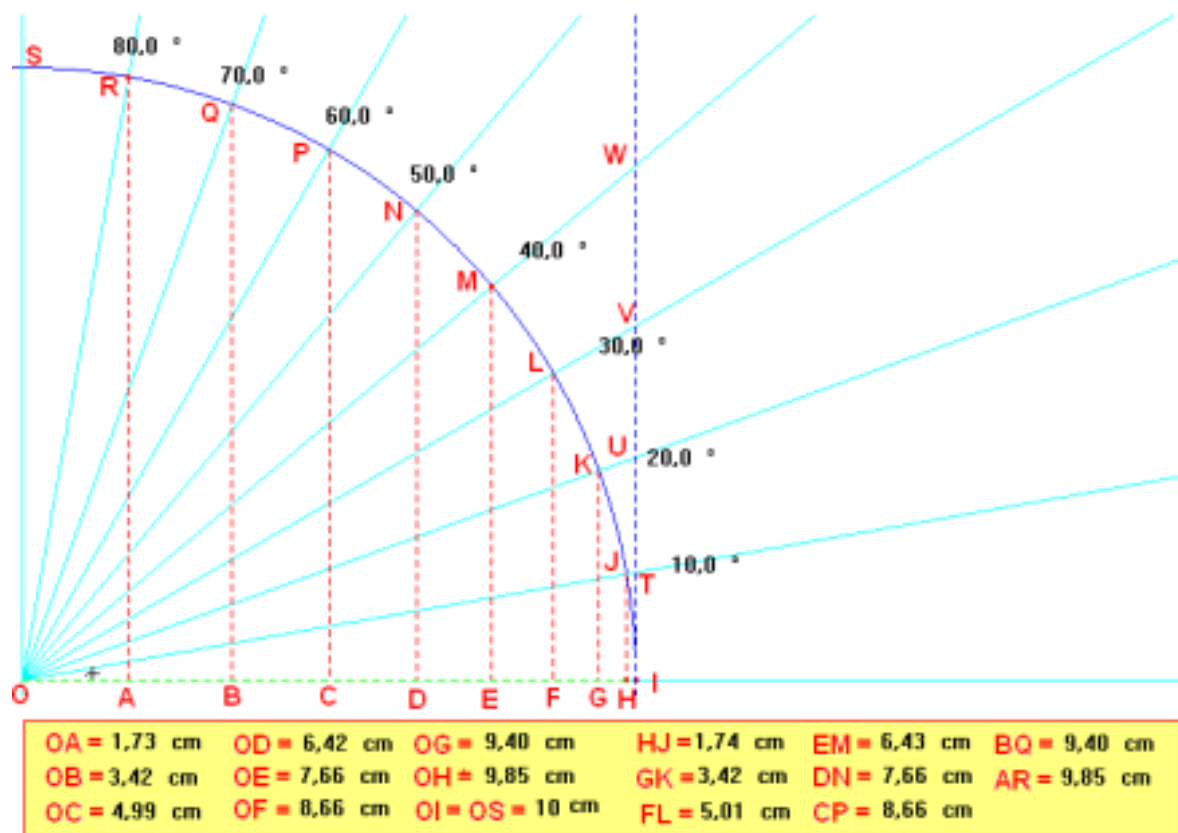


$$\text{sen}34^\circ = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{2,26\text{cm}}{4,05\text{cm}} = \frac{3,35\text{cm}}{6,00\text{cm}} = \frac{4,46\text{cm}}{7,98\text{cm}} = 0,558$$

$$\text{cos}34^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}} = \frac{3,36\text{cm}}{4,05\text{cm}} = \frac{4,97\text{cm}}{6,00\text{cm}} = \frac{6,61\text{cm}}{7,98\text{cm}} = 0,828$$

$$\text{tg}34^\circ = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{2,26\text{cm}}{3,36\text{cm}} = \frac{3,35\text{cm}}{4,97\text{cm}} = \frac{4,46\text{cm}}{6,61\text{cm}} = 0,674$$

Utilizando el anterior aparato y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  y  $80^\circ$ , y la tangente de aquellos que puedas.



Hemos dibujado una circunferencia de radio  $r = \overline{OI} = \overline{OS} = 10 \text{ cm}$ , para que el dibujo se visualizase mejor, luego hay que dividir los valores por 10, es decir correr la coma un lugar hacia la izquierda:

Ángulo = $\alpha$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\text{sen } \alpha$	$\overline{HJ} = 0,174$	$\overline{GK} = 0,342$	$\overline{FL} = 0,501$	$\overline{EM} = 0,643$	$\overline{DN} = 0,766$	$\overline{CP} = 0,866$	$\overline{BQ} = 0,940$	$\overline{AR} = 0,985$
$\text{cos } \alpha$	$\overline{OH} = 0,985$	$\overline{OG} = 0,94$	$\overline{OF} = 0,866$	$\overline{OE} = 0,766$	$\overline{OD} = 0,642$	$\overline{OC} = 0,499$	$\overline{OB} = 0,342$	$\overline{OA} = 0,173$
$\text{Tg } \alpha$	$\overline{IT} = 0,176$	$\overline{IU} = 0,363$	$\overline{IV} = 0,578$	$\overline{IW} = 0,839$				

La tangente la hallamos aplicando la fórmula:  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ .

Observa que  $\text{sen } 10^\circ = \text{cos } 80^\circ$ ,  $\text{sen } 20^\circ = \text{cos } 70^\circ$ , es decir  $\text{sen } \alpha = \text{cos}(90^\circ - \alpha)$  y viceversa.

### Pág 156

1  $\text{sen } 37^\circ = 0,6$ . Calcula  $\text{cos } 37^\circ$  y  $\text{tg } 37^\circ$ .

Aplicamos las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 37^\circ + \text{cos}^2 37^\circ = 1 \Leftrightarrow \text{cos} 37^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

$$\text{tg} 37^\circ = \frac{\text{sen} 37^\circ}{\text{cos} 37^\circ} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

2)  $\text{tg} 28^\circ = 0,53$ . Calcula  $\text{sen} 28^\circ$  y  $\text{cos} 28^\circ$ .

Resolvemos el sistema: 
$$\begin{cases} \text{tg} 28^\circ = \frac{\text{sen} 28^\circ}{\text{cos} 28^\circ} = 0,53 \Leftrightarrow \text{sen} 28^\circ = 0,53 \text{cos} 28^\circ \\ \text{sen}^2 28^\circ + \text{cos}^2 28^\circ = 1 \end{cases}$$
 que sustituimos

en la segunda ecuación  $(0,53 \text{cos} 28^\circ)^2 + \text{cos}^2 28^\circ = 1$ ;  $1,281 \text{cos}^2 28^\circ = 1 \Leftrightarrow \text{cos} 28^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{1,281}} = \pm 0,88$ . Luego  $\text{sen} 28^\circ = 0,53 \text{cos} 28^\circ = 0,53 \cdot 0,88 = 0,47$

3) Teniendo en cuenta que  $\text{tg} 45^\circ = 1$ , deduce el valor de  $\text{sen} 45^\circ$  y de  $\text{cos} 45^\circ$  mediante las relaciones fundamentales.

$$\begin{cases} \text{tg} 45^\circ = \frac{\text{sen} 45^\circ}{\text{cos} 45^\circ} = 1 \Leftrightarrow \text{sen} 45^\circ = \text{cos} 45^\circ \\ \text{sen}^2 45^\circ + \text{cos}^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \text{cos}^2 45^\circ + \text{cos}^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow 2 \text{cos}^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \text{cos} 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen} 45^\circ \end{cases}$$

4) Teniendo en cuenta que  $\text{sen} 30^\circ = 1/2$ , halla el valor de  $\text{cos} 30^\circ$  y de  $\text{tg} 30^\circ$  mediante las relaciones fundamentales.

$$\text{sen}^2 30^\circ + \text{cos}^2 30^\circ = 1 \quad \text{cos} 30^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg} 30^\circ = \frac{\text{sen}^2 30^\circ}{\text{cos}^2 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
sen $\alpha$	0,94	0,57	4/5	0,96	1/2	$\sqrt{2}/2$
cos $\alpha$	0,34	0,82	3/5	0,27	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
tg $\alpha$	2,76	0,70	4/3	3,5	$\sqrt{3}/3$	1

En las operaciones donde aparezcan radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

Para completar la tabla vamos haciendo a continuación las operaciones en cada columna para hallar las razones que nos faltan a partir de la que conocemos y usando las relaciones fundamentales:

①

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,94^2} = 0,34 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{0,94}{0,34} = 2,76$$

②

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,82^2} = 0,57 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{0,57}{0,82} = 0,70$$

③

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

④

Resolvemos el sistema :  $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 3,5 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \end{cases}$ , primero despejamos  $\operatorname{sen} \alpha$  de la primera ( $\operatorname{sen} \alpha = 3,5 \operatorname{cos} \alpha$ ) y sustituimos en la segunda  $(3,5 \operatorname{cos} \alpha)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ ;  $12,25 \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ ;  $13,25 \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ , es decir  $\operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{13,25} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{1}{13,25}} = 0,27$  y, sustituyendo  $\operatorname{sen} \alpha = 3,5 \cdot 0,27 = 0,96$ , que llevamos a la tabla.

⑤

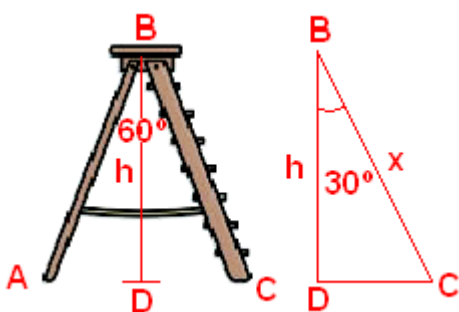
Partimos de la ecuación fundamental sustituyendo el coseno por su valor y despejando el seno:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

⑥

Resolvemos el sistema :  $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 1 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \end{cases}$ , primero despejamos  $\operatorname{sen} \alpha$  de la primera ( $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$ ) y sustituimos en la segunda  $\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ ;  $2 \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ ; es decir  $\operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y, sustituyendo  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , que llevamos a la tabla.

⑦ Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de  $60^\circ$ . Para que la altura de la escalera, estando abierta, sea de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?



En el triángulo rectángulo BDC (mitad de la escalera), respecto del ángulo B ( $30^\circ$ ) sabemos el cateto contiguo ( $h = \overline{DB} = 2$  m) y queremos saber la longitud de la hipotenusa ( $x = \overline{BC}$ ), utilizamos el coseno:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 2,3 \text{ m miden los brazos de la escalera.}$$

7 Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,7.

Como  $\cos \alpha = 0,7$ , sustituyendo en  $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\text{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,7^2} = \sqrt{0,51} = 0,71 \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,71}{0,7} = 1,02$$

8 Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

Resolvemos el sistema :  $\begin{cases} \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0,7 \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$ , primero despejamos  $\text{sen} \alpha$  de la primera ( $\text{sen} \alpha = 0,7 \cos \alpha$ ) y sustituimos en la segunda  $(0,7 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ ;  $0,49 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;  $1,49 \cos^2 \alpha = 1$ , es decir  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1,49} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1,49}} = 0,82$  y, sustituyendo,  $\text{sen} \alpha = 0,7 \cdot 0,82 = 0,57$ .

### Pág 158

1 Halla  $\text{tg} 76^\circ$  y  $\cos 38^\circ$ .

$\text{tg} 76^\circ$	$\text{tan} 76^\circ = 4.010780934$
$\cos 38^\circ$	$\cos 38^\circ = 0.788010753$

2 Copia en la calculadora  $39^\circ 11' 48''$ . Pasa a  $^\circ$  “ el ángulo  $39,19666667^\circ$ .

$39^\circ 11' 48''$  se introduce 39  $^\circ ' ''$  11  $^\circ ' ''$  48  $^\circ ' ''$  39.19666667

Es la operación inversa 39.19666667 **SHIFT**  $^\circ ' ''$   $39^\circ 11' 48''$ .

3 Halla  $\alpha$  y  $\beta$  directamente con la calculadora, sabiendo que  $\cos \alpha = 0,83$  y  $\text{tg} \beta = 2,5$ .

0.83 **SHIFT** **cos** 33.901262 **SHIFT**  $^\circ ' ''$   $33^\circ 54' 4.54''$

2.5 **SHIFT** **tan** 68.19859051 **SHIFT**  $^\circ ' ''$   $68^\circ 11' 54.93''$

4 Si  $\text{tg} \beta = 0,6924$ , halla  $\cos \beta$ .

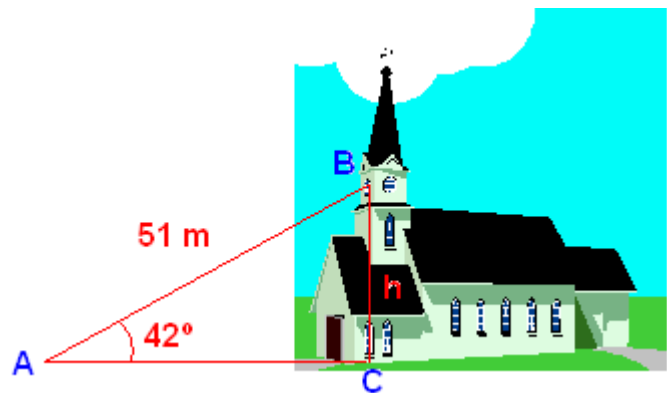
0.6924 **SHIFT** **tan** 34.69872863 **SHIFT**  $^\circ ' ''$   $34^\circ 41' 55.42''$  **cos** 0.822156672

## Pág 159

① Víctor y Ramón quieren saber la altura a la que se encuentra el campanario de la iglesia de su pueblo. Para ello, Víctor sube al campanario y lanza el extremo de una cuerda hacia afuera. El pie de la torre no es accesible. Ramón se aleja con la cuerda hasta que queda tensa y la clava en el suelo. Forma un ángulo de  $42^\circ$ . La cuerda mide 51 metros.

a) ¿A qué altura está el campanario?

b) ¿A qué distancia se encuentra Ramón de la base del campanario?



a) En el triángulo rectángulo ABC, conocemos el ángulo  $\hat{A} = 42^\circ$  y queremos conocer el cateto opuesto, sabiendo que la hipotenusa  $\overline{AB}$  mide 51 m, usamos el seno:

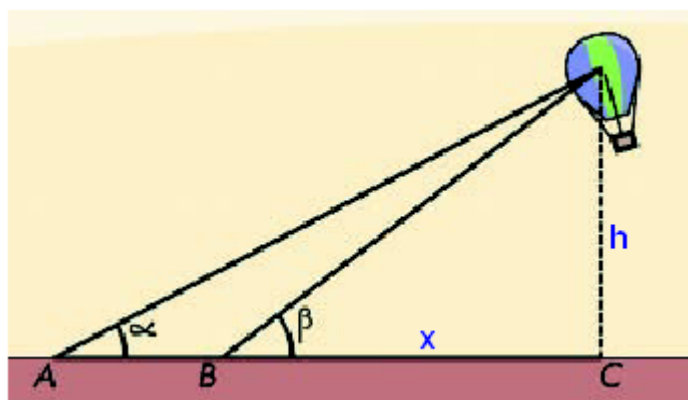
$\text{sen}42^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \text{sen}42^\circ = 51 \cdot \text{sen}42^\circ = 34,1 \text{ m}$  es la altura a que está el campanario del suelo.

b) Ahora tenemos varias posibilidades, usar el teorema de Pitágoras, la tangente o el coseno, la que usa datos originales ( cometeremos menos errores ya que sólo haremos una aproximación) es la última:

$\text{cos}42^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \text{cos}42^\circ = 51 \cdot \text{cos}42^\circ = 37,9 \text{ m}$  es la distancia pedida.

## Pág 160

② Para hallar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos del siguiente modo:



Rosa se coloca en un punto B, y yo en un punto A, a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A, B y C (observa la figura) quedan alineados.

Si los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  miden  $40^\circ$  y  $50^\circ$ , respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?

Es un ejemplo del tipo conocido como “doble observación”. Usamos la tangente pues de los ángulos dados queremos relacionar los catetos opuestos y los contiguos:



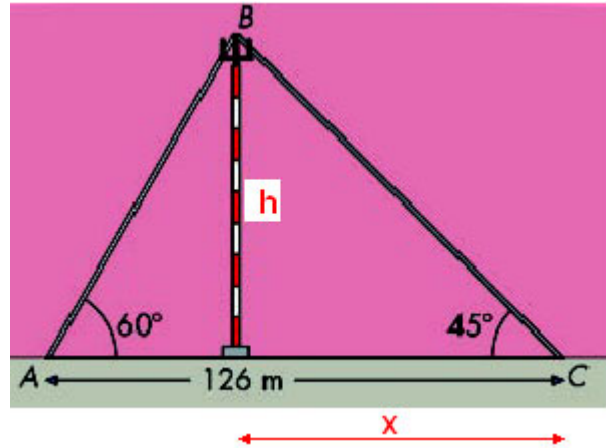
$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x+5} \Rightarrow h = (x+5)\operatorname{tg}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x\operatorname{tg}\beta = (x+5)\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x\operatorname{tg}\beta - x\operatorname{tg}\alpha = 5\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = 5\operatorname{tg}\alpha$$

$$x = \frac{5\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{5 \cdot \operatorname{tg}40^\circ}{\operatorname{tg}50^\circ - \operatorname{tg}40^\circ} = 11,9 \text{ m}, \quad h = 11,9 \cdot \operatorname{tg}50^\circ = 16,9 \cdot \operatorname{tg}40^\circ = 14,2 \text{ m}$$

3) Una antena de radio está sujeta al suelo con dos tirantes de cable de acero, como indica la figura

Calcula:

- a) La altura de la antena.
- b) La longitud de los cables.
- c) El valor del ángulo ABC.



a) Es un problema de “doble observación”.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}45^\circ \\ \operatorname{tg}60^\circ = \frac{h}{126-x} \Rightarrow h = (126-x)\operatorname{tg}60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow x\operatorname{tg}45^\circ = (126-x)\operatorname{tg}60^\circ \Leftrightarrow x\operatorname{tg}45^\circ + x\operatorname{tg}60^\circ = 126\operatorname{tg}60^\circ \Leftrightarrow$$

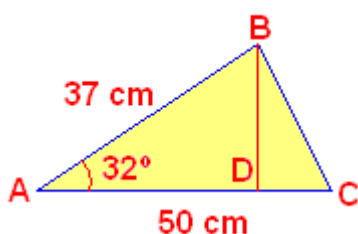
$$x(\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ) = 126\operatorname{tg}60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{126\operatorname{tg}60^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ} = \frac{126 \cdot \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \approx 79,9 \text{ m}$$

Como la  $\operatorname{tg}45^\circ = 1$  y  $h = x\operatorname{tg}45^\circ = x = 79,9 \text{ m}$  mide la antena.

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen}60^\circ = \frac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{h}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{79,9\text{m}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 92,3 \text{ m} \\ \operatorname{sen}45^\circ = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{h}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{79,9\text{m}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 113 \text{ m} \end{cases}$$

c) Ángulo ABC =  $180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

① En un triángulo ABC, calcula BC conociendo  $\overline{AB} = 37$  cm,  $\overline{AC} = 50$  cm y  $\angle BAC = 32^\circ$ .



$$\text{sen}32^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AB}\text{sen}32^\circ = 37 \cdot \text{sen}32^\circ \approx 19,6 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{37^2 - 19,6^2} \approx 31,4 \text{ cm}$$

Por tanto  $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 50 - 31,4 = 18,6$  cm y, por último aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BDC:

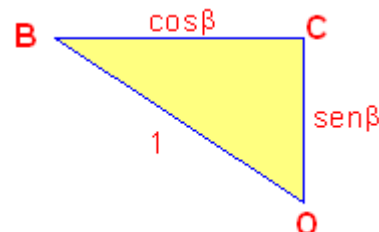
$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{DB}^2} = \sqrt{18,6^2 + 19,6^2} = 27,03 \text{ cm}$$

Pág 162

① Razonando sobre el triángulo coloreado de arriba, y teniendo en cuenta que su hipotenusa es  $\overline{OA} = 1$ , justifica que los segmentos  $\overline{OA'}$  y  $\overline{A'A}$  corresponden, efectivamente, a las razones trigonométricas  $\cos \alpha$ ,  $\text{sen} \alpha$ , respectivamente.

$$\text{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AA'}}{1} = \overline{AA'} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'}$$

② Aplicando el teorema de Pitágoras en el correspondiente triángulo rectángulo, justifica que  $(\text{sen} \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1$ .



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo:

$$\overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 \Leftrightarrow (-\cos \beta)^2 + \text{sen}^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

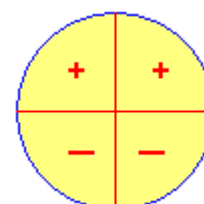
③ Di el valor de  $\text{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$  cuando  $\alpha$  vale  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ .

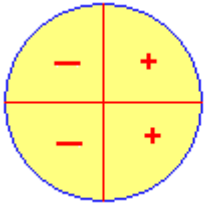
$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\text{sen} \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1

Ya que el seno se mide en vertical y el coseno en la horizontal como hemos visto en el ejercicio 1 anterior.

④ En este círculo se da el signo de  $\text{sen} \phi$  según el cuadrante en el que se halle situado el ángulo  $\phi$ . Comprueba que es correcto y haz algo similar para  $\cos \phi$ .

Como el seno se representa en vertical, para ángulos de los cuadrantes 1º y 2º será positivo pues el segmento va hacia arriba, pero en los cuadrantes 3º y 4º al ir hacia abajo será negativo.

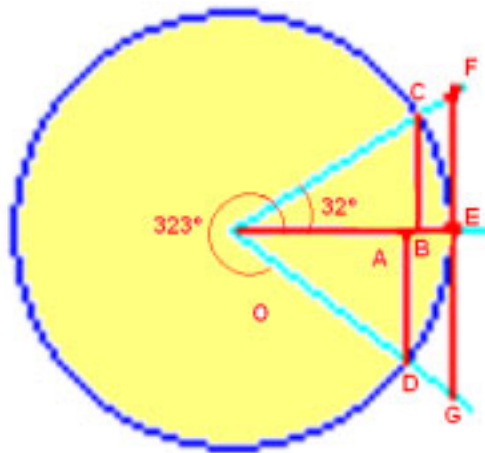




Como el coseno se representa en el eje horizontal, los signos en cada cuadrante serán los que se indican en el círculo de al lado.

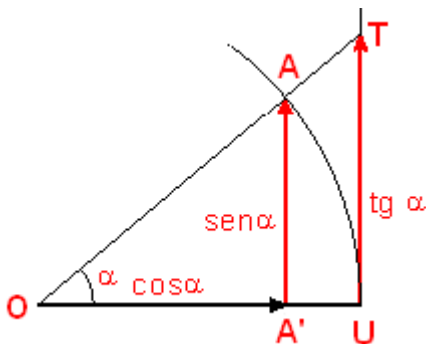
Pág 163

5) Sitúa sobre la circunferencia goniométrica los ángulos siguientes: a) 32° b) 323°  
Representa sus razones trigonométricas y valóralas numéricamente.



	sen	cos	tg
32°	$\overline{CB} = 0,53$	$\overline{OB} = 0,85$	$\overline{EF} = 0,63$
323°	$\overline{AD} = -0,60$	$\overline{OA} = 0,80$	$\overline{EG} = -0,75$

6) Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos OA'A y O UT, y que  $\overline{OU} = 1$ , demuestra que:  
 $\text{sen } \alpha / \text{cos } \alpha = \text{tg } \alpha$



Al semejantes los lados homólogos serán proporcionales:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{UT}} \Leftrightarrow \overline{UT} = \text{tg } \alpha = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{OU}}{\overline{OA'}} = \frac{\text{sen } \alpha \cdot 1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Pág 164

7) Expresa con valores comprendidos entre -180° y 180°:  
a) 1 555°, b) 1297°.

$$\begin{array}{r|l} \text{a) } 1\ 555 & 360 \\ \hline 115 & 4 \end{array} \quad 1\ 555^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 115^\circ = 115^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} \text{b) } 1\ 297 & 360 \\ \hline 217 & 3 \end{array}$$

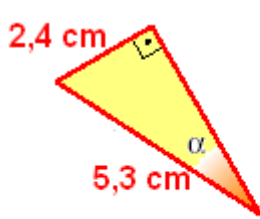
$$1\ 297^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 217^\circ = 217^\circ = 217^\circ - 360^\circ = -143^\circ$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

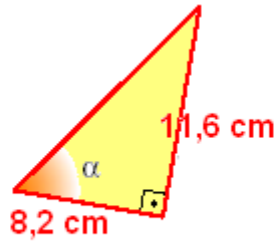
PRACTICA

► Razones trigonométricas de un ángulo agudo

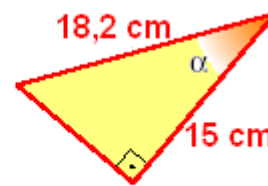
① Halla las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en cada uno de estos triángulos:



a)



b)



c)

a)

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} = \frac{2,4}{5,3} = 0,45 \quad \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,45^2} = 0,89 \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,45}{0,89} = 0,51$$

b) Hallamos primero la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{8,2^2 + 11,6^2} = 14,21 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} = \frac{11,6}{14,21} = 0,82 \\ \text{cos } \alpha = \frac{\text{cat.cont.}}{\text{hip.}} = \frac{8,2}{14,21} = 0,58 \\ \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.cont.}} = \frac{11,6}{8,2} = 1,41 \end{cases}$$

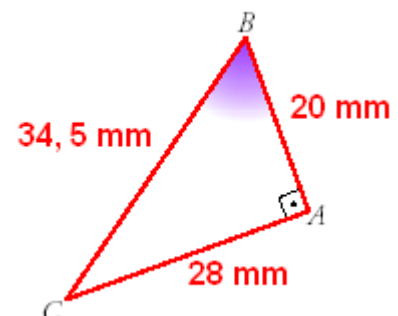
c)

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cat.cont.}}{\text{hip.}} = \frac{15}{18,2} = 0,82 \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,82^2} = 0,57 \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,57}{0,82} = 1,06$$

② Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de B en cada caso:

$$\text{a) } \text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{28\text{mm}}{34,5\text{mm}} = 0,81$$

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{20\text{mm}}{34,5\text{mm}} = 0,58$$

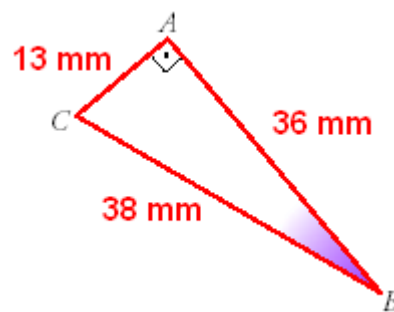


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.cont.}} = \frac{28\text{mm}}{20\text{mm}} = 1,4$$

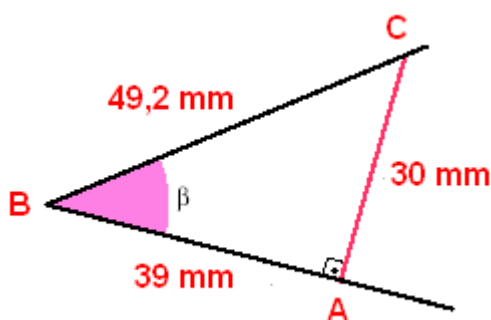
$$\text{b) } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{13\text{mm}}{38\text{mm}} = 0,34$$

$$\operatorname{cos} \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{36\text{mm}}{38\text{mm}} = 0,95$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.cont.}} = \frac{13\text{mm}}{36\text{mm}} = 0,36$$



③ Calcula las razones trigonométricas de  $\beta$ :



$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{30\text{mm}}{49,2\text{mm}} = 0,61$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{39\text{mm}}{49,2\text{mm}} = 0,79$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{30\text{mm}}{39\text{mm}} = 0,77$$

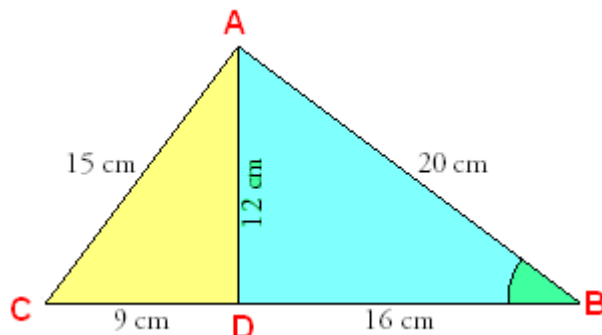
① Prueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos ABC y ADB son rectángulos.

### Triángulo ABC

$$\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 ; (9+16)^2 = 15^2 + 20^2 ; 625 = 225 + 400, \text{ luego sí es rectángulo.}$$

### Triángulo ADB

$$\overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 ; 20^2 = 12^2 + 16^2 ; 400 = 144 + 256, \text{ luego sí es rectángulo.}$$

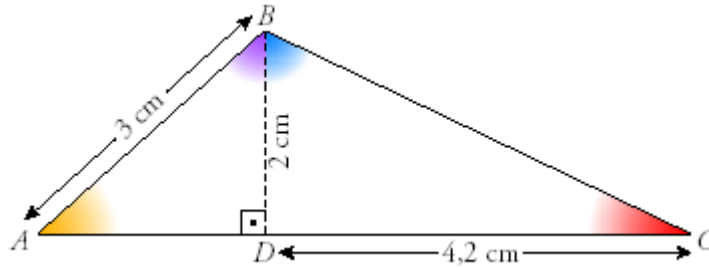


Halla  $\operatorname{sen} B$  en los dos triángulos (el verde y el total) y comprueba que obtienes el mismo valor.

$$\text{Triángulo ABC } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{15\text{cm}}{25\text{cm}} = 0,6$$

$$\text{Triángulo ADB } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{12\text{m}}{20\text{cm}} = 0,6$$

5) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos A y C, ABD y CBD.



Hallamos primero las longitudes de los segmentos que faltan:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}\text{cm}; \overline{BC} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{2^2 + 4,2^2} = 4,65\text{cm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\hat{A} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \\ \text{cos}\hat{A} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,76 \\ \text{tg}\hat{A} = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{cos}\hat{A}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\hat{C} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = \frac{2}{4,65} = 0,43 \\ \text{cos}\hat{C} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{4,2}{4,65} = 0,9 \\ \text{tg}\hat{C} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{cos}\hat{C}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{4,2} = 0,48 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\hat{A}BD = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,75 \\ \text{cos}\hat{A}BD = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \\ \text{tg}\hat{A}BD = \frac{\text{sen}\hat{A}BD}{\text{cos}\hat{A}BD} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,12 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\hat{C}BD = \frac{\overline{DC}}{\overline{CB}} = \frac{4,2}{4,65} = 0,90 \\ \text{cos}\hat{C}BD = \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{2}{4,65} = 0,43 \\ \text{tg}\hat{C}BD = \frac{\text{sen}\hat{C}BD}{\text{cos}\hat{C}BD} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{4,2}{2} = 2,1 \end{array} \right.$$