REFLEXIONA

■ Los chicos del dibujo deben medir las alturas de los 47 árboles de una cierta parcela horizontal. Para ello, proceden del siguiente modo:

Clavan en el suelo una estaca vertical que sobresale 120 cm. A continuación, corren a señalar en el suelo los extremos de las sombras de los 47 árboles y de la estaca (¿ por qué tanta prisa?). Una vez señaladas, proceden con tranquilidad a medirlas y a anotar sus mediciones. He aquí algunos resultados:

SOMBRA DE...	Estaca	Ciprés	Higuera	Chopo
MIDE	75 cm	8,8 m	3 m	5,7 m

Calcula razonadamente la altura de esos tres árboles.

Las prisas se deben a que a medida que pasa el tiempo la longitud de la sombra se modifica pues el Sol sigue su camino.

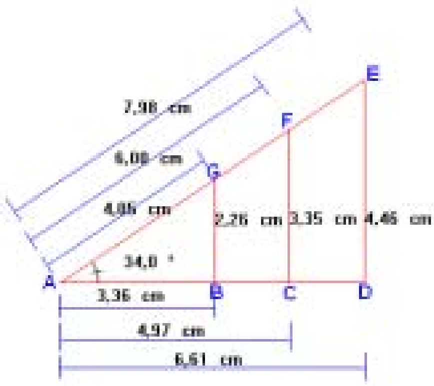
La estaca y los árboles forman con la sombra triángulos rectángulos (si el suelo el horizontal y los árboles verticales) que serán semejantes ya que el ángulo de incidencia de los rayos solares es el mismo (casi el mismo si lo miden muy deprisa), luego se cumple:

$$\frac{\text{Sombra}_{\text{estaca}}}{h_{\text{estaca}}} = \frac{S_{\text{Ciprés}}}{h_{\text{ciprés}}} = \frac{S_{\text{Higuera}}}{h_{\text{higuera}}} = \frac{S_{\text{Chopo}}}{h_{\text{chopo}}} \Rightarrow \begin{cases} h_{\text{ciprés}} = S_{\text{ciprés}} \dfrac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 8{,}8\text{m}\cdot\dfrac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 14{,}08 \text{ m} \\ h_{\text{higuera}} = S_{\text{higuera}} \dfrac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 3\text{m}\cdot\dfrac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 4{,}8 \text{ m} \\ h_{\text{chopo}} = S_{\text{chopo}} \dfrac{h_{\text{estaca}}}{\text{Sombra}_{\text{estaca}}} = 5{,}7\text{m}\cdot\dfrac{120\text{cm}}{75\text{cm}} = 9{,}12 \text{ m} \end{cases}$$

Actividades

Pág 179

① Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34° , un triángulo rectángulo mucho más grande. Halla sus razones trigonométricas y observa que son, aproximadamente, las mismas.



$$\text{sen}34^\circ = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{2{,}26\text{cm}}{4{,}05\text{cm}} = \frac{3{,}35\text{cm}}{6{,}00\text{cm}} = \frac{4{,}46\text{cm}}{7{,}98\text{cm}} = 0{,}558$$

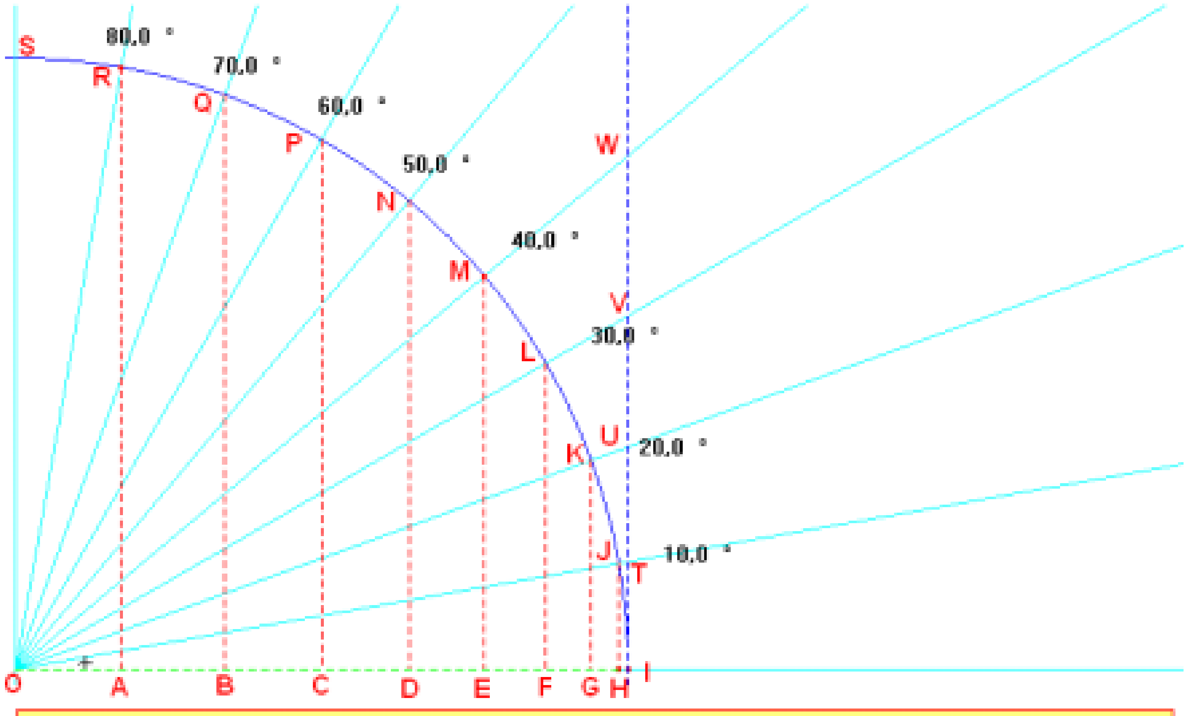
$$\cos 34^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}} = \frac{3{,}36\text{cm}}{4{,}05\text{cm}} = \frac{4{,}97\text{cm}}{6{,}00\text{cm}} = \frac{6{,}61\text{cm}}{7{,}98\text{cm}} = 0{,}828$$

$$\text{tg}34^\circ = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{2{,}26\text{cm}}{3{,}36\text{cm}} = \frac{3{,}35\text{cm}}{4{,}97\text{cm}} = \frac{4{,}46\text{cm}}{6{,}61\text{cm}} = 0{,}674$$

Actividades

Pág 180

② Utilizando el anterior aparato y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° y 80°, y la tangente de aquellos que puedas.



OA = 1,73 cm	OD = 6,42 cm	OG = 9,40 cm	HJ = 1,74 cm	EM = 6,43 cm	BQ = 9,40 cm
OB = 3,42 cm	OE = 7,66 cm	OH = 9,85 cm	GK = 3,42 cm	DN = 7,66 cm	AR = 9,85 cm
OC = 4,99 cm	OF = 8,66 cm	OI = OS = 10 cm	FL = 5,01 cm	CP = 8,66 cm	

Hemos dibujado una circunferencia de radio r = OI = OS = 10 cm, para que el dibujo se visualizase mejor, luego hay que dividir los valores por 10, es decir correr la coma un lugar hacia la izquierda:

Ángulo = α	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º
sen α	HJ = 0,174	GK= 0,342	FL= 0,501	EM= 0,643	DN=0,766	CP= 0,866	BQ= 0,940	AR= 0,985
cos α	OH =0,985	OG = 0,94	OF = 0,866	OE= 0,766	OD =0,642	OC= 0,499	OB= 0,342	OA= 0,173
Tg α	IT=0,176	IU= 0,363	IV= 0,578	IW= 0,839				

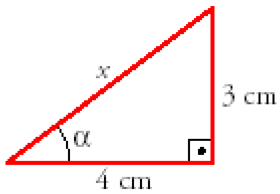
La tangente la hallamos aplicando la fórmula: $tg\alpha = \frac{sem\alpha}{\cos\alpha}$.

Observa que sen 10º = cos 80º, sen 20º = cos 70º, es decir sen α = cos(90º - α) y viceversa.

Actividades

Pág 181

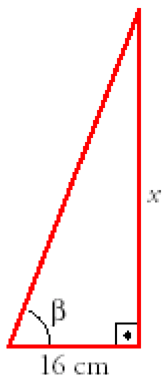
③ Calcula la longitud de la hipotenusa y halla las razones trigonométricas del ángulo α.



Aplicando el teorema de Pitágoras: $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

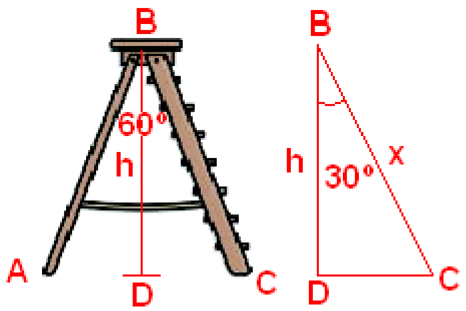
$$sen\alpha = \frac{Cat.op}{Hipo} = \frac{3}{5}; \cos\alpha = \frac{Cat.Ady}{Hipo} = \frac{4}{5}; tg\alpha = \frac{Cat.Op}{Cat.Ady} = \frac{3}{4}$$

④ Calcula la longitud del lado x sabiendo que:
sen β = 0,9
cos β = 0,44
tg β = 2,06
(¿ Cuál de las razones trigonométricas es la que has de utilizar?)



Como sabemos la longitud del cateto contiguo y necesitamos la del cateto opuesto hemos de utilizar la $tg\beta = 2{,}06 = \frac{x}{16cm} \Leftrightarrow x = 16cm \cdot 2{,}06$ = 32,96 cm

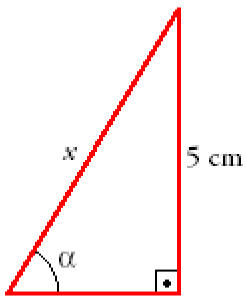
⑤ Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60º . Para que la altura de la escalera, estando abierta, sea de 2 metros, ¿ qué longitud deberá tener cada brazo?



En el triángulo rectángulo BDC (mitad de la escalera), respecto del ángulo B (30º) sabemos el cateto contiguo (h = DB = 2 m) y queremos saber la longitud de la hipotenusa (x = BC), utilizamos el coseno:

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$ m miden los brazos de la escalera.

❻
sen α = 0,77
cos α = 0,64
tg α = 1,19
Calcula x.



Puesto que conocemos el cateto opuesto al ángulo α y nos piden calcular la hipotenusa, usaremos el dato sen α = 0,77.

$$\text{sen}\alpha = 0{,}77 = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Hipo.}} = \frac{5\text{cm}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5\text{cm}}{0{,}77} \approx 6{,}49 \text{ cm}$$

Actividades

Pág 182

➀ sen 37° = 0,6. Calcula cos 37° y tg 37°.

Aplicamos las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 37° + \cos^2 37° = 1 \Leftrightarrow \cos 37° = \sqrt{1-\text{sen}^2 37°} = \sqrt{1-0{,}6^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

$$\text{tg}37° = \frac{\text{sen}37°}{\cos 37°} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$$

➁ tg 28° = 0,53. Calcula sen 28° y cos 28°.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} \text{tg}28° = \dfrac{\text{sen}28°}{\cos 28°} = 0{,}53 \Leftrightarrow \text{sen}28° = 0{,}53\cos 28° \\ \text{sen}^2 28° + \cos^2 28° = 1 \end{cases}$ que sustituimos en la segunda ecuación $(0{,}53\cos 28°)^2 + \cos^2 28° = 1$; $1{,}281\cos^2 28° = 1 \Leftrightarrow \cos 28° = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1{,}281}} = \pm$ 0,88. Luego sen28° = 0,53cos28° = 0,53·0,88 = 0,47

Pág 183

➀ Halla tg76° y cos 38°.

tg 76º	*tan* 76º = 4.010780934
cos 38º	*cos* 38º = 0.788010753

➁ Copia en la calculadora 39° 11' 48". Pasa a º ' " el ángulo 39,19666667°.

39º 11' 48" se introduce 39 [º ' "] 11 [º ' "] 48 [º ' "] 39.19666667

Es la operación inversa 39.19666667 [SHIFT] [º ' "] 39º 11º 48.

③ Halla α y β directamente con la calculadora, sabiendo que cos α = 0,83 y tg β = 2,5.

0.83 SHIFT cos 33.901262 SHIFT º ‘ “ 33º 54º 4.54

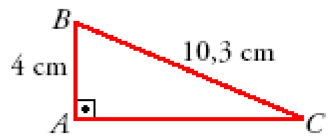
2.5 SHIFT tan 68.19859051 SHIFT º ‘ “ 68º 11º 54.93

④ Si tg β = 0,6924, halla cosβ .

0.6924 SHIFT tan 34.69872863 SHIFT º ‘ “ 34º 41º 55.42 cos 0.822156672

Pág 184

① Resuelve el triángulo ABC:



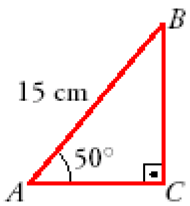
Calculamos el lado AC aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC} = \sqrt{10{,}3^2 - 4^2} \approx 9{,}49 \text{ cm}$$

Calculamos el valor del ángulo C y del ángulo B :

$$sen\ \hat{C} = \frac{4\text{cm}}{10{,}3\text{cm}} \approx 0{,}39 \rightarrow C = 22°\ 51'\ 66\text{”} \text{ luego } B = 90° – C = 67°\ 8'\ 54\text{”}$$

② Halla el ángulo y los lados desconocidos del triángulo ABC:



Ángulo B ; B = 90° – A = 90° – 50° = 40°

Lado AC; $\cos 50° = = \frac{\overline{AC}}{15\text{cm}} \Leftrightarrow AC = 15 \text{ cm} \cdot \cos 50° \approx 9{,}64 \text{ cm}$

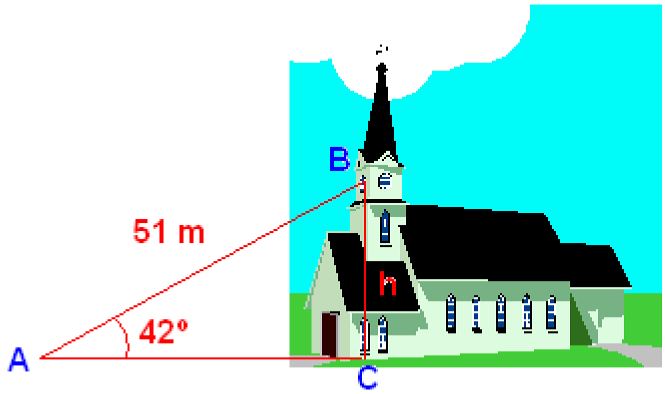
Lado BC ; $\text{sen } 50° = \frac{\overline{BC}}{15\text{cm}} \Leftrightarrow BC = 15 \text{ cm} \cdot \text{sen } 50° \approx 11{,}49 \text{ cm}$

Pág 186

① Víctor y Ramón quieren saber la altura a la que se encuentra el campanario de la iglesia de su pueblo. Para ello, Víctor sube al campanario y lanza el extremo de una cuerda hacia afuera. El pie de la torre no es accesible. Ramón se aleja con la cuerda hasta que queda tensa y la clava en el suelo. Forma un ángulo de 42°. La cuerda mide 51 metros.

a) ¿ A qué altura está el campanario?

b) ¿ A qué distancia se encuentra Ramón de la base del campanario?



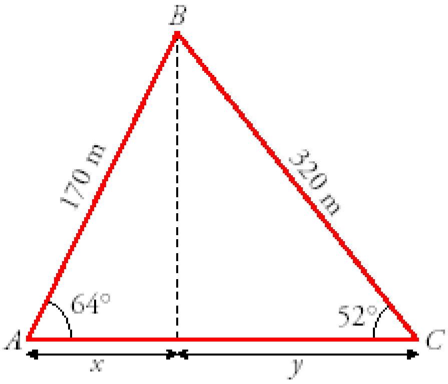
a) En el triángulo rectángulo ABC, conocemos el ángulo A = 42º y queremos conocer el cateto opuesto, sabiendo que la hipotenusa AB mide 51 m, usamos el seno:

$\operatorname{sen}42^{\circ}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC}=\overline{AB}\operatorname{sen}42^{\circ}=51\cdot\operatorname{sen}42^{\circ}=34{,}1$ m es la altura a que está el campanario del suelo.

b) Ahora tenemos varias posibilidades, usar el teorema de Pitágoras, la tangente o el coseno, la que usa datos originales (cometeremos menos errores ya que sólo haremos una aproximación) es la última:

$\cos 42^{\circ}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AC}=\overline{AB}\cdot\cos 42^{\circ}=51\cdot\cos 42^{\circ}=37{,}9$ m es la distancia pedida.

② Para hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles entre sí, A y C, medimos desde el punto B las distancias AB = 170 m y BC = 320 m. Medimos también los ángulos A = 64° y C = 52°. Calcula la distancia AC.



$$\cos 64^{\circ}=\frac{x}{170\text{m}} \Leftrightarrow x=170\text{m}\cdot\cos 64^{\circ}\approx 74{,}5\text{ m}$$

$$\cos 52^{\circ}=\frac{y}{320\text{m}} \Leftrightarrow y=320\text{m}\cdot\cos 52^{\circ}\approx 197\text{ m}$$

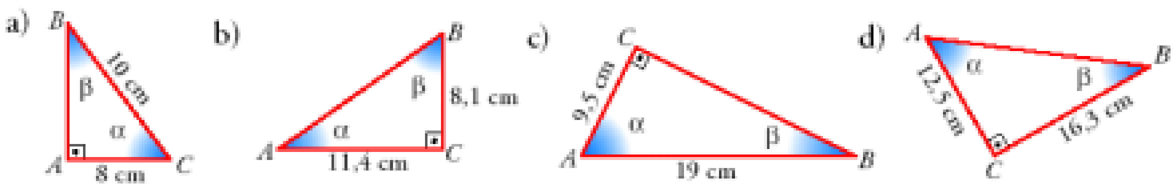
Luego x + y = 74,5 m + 197 m = 271,5 m.

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AA'}}{1}=\overline{AA'} \quad \cos\alpha=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OA'}}{1}=\overline{OA'}$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

PRACTICA

Razones trigonométricas de un ángulo agudo



a) $\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$ cm

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{6cm}{10cm}=0,6;\ \cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{8cm}{10cm}=0,8;\ \text{tg}\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6cm}{8cm}=\frac{3}{4}=0,75$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{6cm}{10cm}=0,6;\ \text{sen}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{8cm}{10cm}=0,8;\ \text{tg}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8cm}{6cm}=\frac{4}{3}$$

b) $\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{11,4^2+8,1^2}=\sqrt{129,96+65,61}=\sqrt{195,57}\approx 14\text{ cm}$

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8,1cm}{14cm}\approx 0,58;\ \cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{11,4cm}{14cm}\approx 0,81;\ \text{tg}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{8,1cm}{11,4cm}\approx 0,71$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8,1cm}{14cm}\approx 0,58;\ \text{sen}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{11,4cm}{14cm}\approx 0,81;\ \text{tg}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{11,4cm}{8,1cm}\approx 1,41$$

c) $\overline{CB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{19^2-9,5^2}=\sqrt{361-90,25}=\sqrt{270,75}\approx 16,45\text{ cm}$

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{16,45cm}{19cm}\approx 0,87;\ \cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{9,5cm}{19cm}=0,5;\ \text{tg}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{16,45cm}{9,5cm}\approx 1,73$$

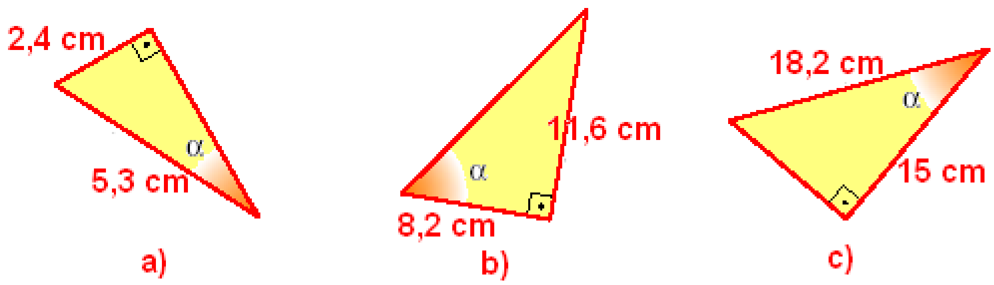
$$\cos\beta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{16,45cm}{19cm}\approx 0,87;\ \text{sen}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{9,5cm}{19cm}=0,5;\ \text{tg}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{9,5cm}{16,45cm}\approx 0,58$$

d) $\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{12,5^2+16,3^2}=\sqrt{156,25+265,69}=\sqrt{421,94}\approx 20,5\text{ cm}$

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{16,3cm}{20,4cm}\approx 0,8;\ \cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{12,5cm}{20,4cm}\approx 0,61;\ \text{tg}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{16,3cm}{12,5cm}\approx 1,3$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{16,3cm}{20,4cm}\approx 0,8;\ \text{sen}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{12,5cm}{20,4cm}\approx 0,61;\ \text{tg}\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{12,5cm}{16,3cm}\approx 0,77$$

② Halla las razones trigonométricas del ángulo a en cada uno de estos triángulos:



a)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} = \frac{2{,}4}{5{,}3} = 0{,}45 \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}45^2} = 0{,}89 \ \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}45}{0{,}89} = 0{,}51$$

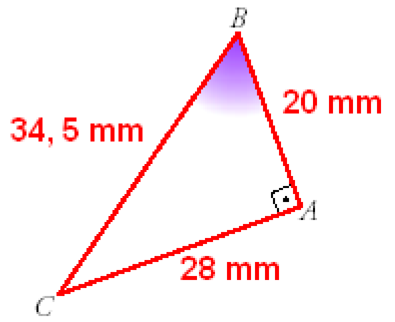
b) Hallamos primero la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{8{,}2^2 + 11{,}6^2} = 14{,}21 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \dfrac{11{,}6}{14{,}21} = 0{,}82 \\ \cos\alpha = \dfrac{\text{cat. cont.}}{\text{hip.}} = \dfrac{8{,}2}{14{,}21} = 0{,}58 \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{cat.op.}}{\text{cat. cont.}} = \dfrac{11{,}6}{8{,}2} = 1{,}41 \end{cases}$$

c)

$$\cos\alpha = \frac{\text{cat.cont.}}{\text{hip.}} = \frac{15}{18{,}2} = 0{,}82 \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}82^2} = 0{,}57 \ \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}57}{0{,}82} = 1{,}06$$

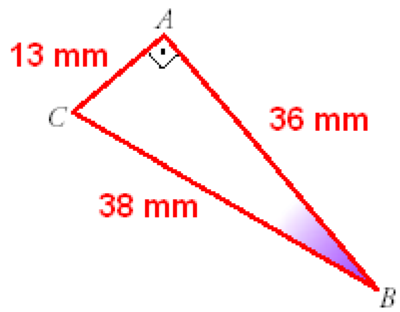
③ Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de β en cada caso:



a) $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{28\text{mm}}{34{,}5\text{mm}} = 0{,}81$

$\cos\hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{20\text{mm}}{34{,}5\text{mm}} = 0{,}58$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.cont.}} = \frac{28\text{mm}}{20\text{mm}} = 1{,}4$

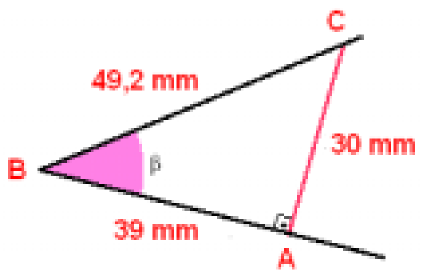


b) $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{13\text{mm}}{38\text{mm}} = 0{,}34$

$\cos\hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{36\text{mm}}{38\text{mm}} = 0{,}95$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.cont.}} = \frac{13\text{mm}}{36\text{mm}} = 0{,}36$

④ Calcula las razones trigonométricas de β:



$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{30\text{mm}}{49{,}2\text{mm}} = 0{,}61$

$\cos\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{39\text{mm}}{49{,}2\text{mm}} = 0{,}79$

$$tg\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{30mm}{39mm} = 0{,}77$$

⑤ Obtén con la calculadora sen, cos y tg de los siguientes ángulos:

a) 19° **b)** 32° **c)** 48° **d)** 64,5° **e)** 70° 30' **f)** 83° 50'

a) sen 19º = 0,325568154 ; cos 19º = 0,945518575 ; tg 19º = 0,344327613.

b) sen 32º = 0,529919264 ; cos 32º = 0,848048096 ; tg 32º = 0,624869351.

c) sen 48º = 0,743144825 ; cos 48º = 0,669130606 ; tg 48º = 1,110612515.

d) sen 64,5º = 0,902585284 ; cos 64,5º = 0,430511096 ; tg 64,5º = 2,097543599.

e) sen 70º 30' = 0,942641491 ; cos 70º 30' = 0,333806859 ; tg 70º 30' = 2,823912886.

f) sen 83º 50' = 0,993571855 ; cos 83º 50' = 0,113203213 ; tg 83º 50' = 8,776887358.

⑥ Utiliza la calculadora para hallar el ángulo en cada caso:

a) sen α = 0,45 **b)** cos α = 0,8 **c)** tg α = 2,5

a) sen α = 0,45, α = arc sen 0,45 = SHIFT SIN 0,45 = 26,74368395 SHIFT º ' " = 26º 44' 37".

b) cos α = 0,8, α = arc cos 0,8 = SHIFT COS 0,8 = 36,86989765 SHIFT º ' " = 36º 52' 12".

c) tg α = 2,5, α = arc tg 2,5 = SHIFT TAN 2,5 = 68,19859051 SHIFT º ' " = 68º 11' 55".

▶ Relaciones fundamentales

⑦ Si sen 67° = 0,92, halla cos 67° y tg 67° utilizando las relaciones fundamentales.

$$\cos 67° = \sqrt{1-\text{sen}^2 67°} = \sqrt{1-0{,}92^2} = \sqrt{0{,}1536} \approx 0{,}39;\ tg67° = \frac{\text{sen}67°}{\cos 67°} = \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$$

⑧ Si sen α = 3/5, calcula cos α y tg α utilizando las relaciones fundamentales (α < 90°).

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};\ tg\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

⑨ Halla el valor exacto (con radicales) de sen α y cos α sabiendo que tg α = 2.

$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2 \quad \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = 2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

que sustituimos en la segunda:

$$(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y entonces sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

10 Completa esta tabla:

	1	2	3	4	5	6
sen α	0,92	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	0,2	$\sqrt{3}/2$
cos α	0,39	0,8	0,12	$2/3$	0,98	1 /2
tg α	2,36	0,75	8,25	$\sqrt{5}/2$	0,2	$\sqrt{3}$

1

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}92^2} = 0{,}39 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$$

2

Resolvemos el sistema : $\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}75 \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos senα de la primera (senα = 0,75 cosα) y sustituimos en la segunda $(0{,}75\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$; $0{,}5625\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1{,}5625\cos^2\alpha = 1$, es decir $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1{,}5625} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1{,}5625}} = 0{,}8$ y, sustituyendo senα = 0,75 ·0,8 = 0,6, que llevamos a la tabla.

3

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}12^2} = 0{,}99 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}25$$

4

Resolvemos el sistema : $\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, primero despejamos senα de la primera (senα = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cosα) y sustituimos en la segunda $\dfrac{5}{4}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\dfrac{9}{4}\cos^2\alpha = 1$; es decir $\cos^2\alpha = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ y, sustituyendo senα = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, que llevamos a la tabla.

5

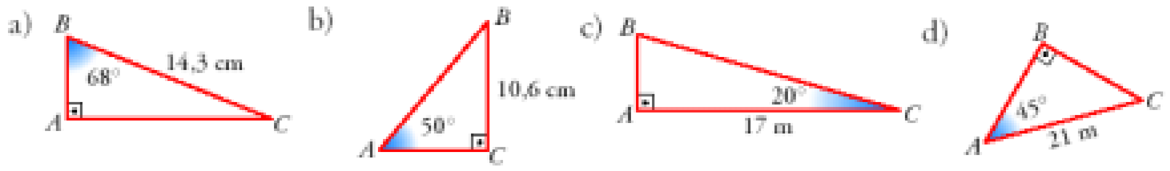
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}39 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$$

6

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \text{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

▶ Resolución de triángulos rectángulos

11 Calcula los lados y el ángulo desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:



a) C = 90° – 68° = 22° sen 68° = $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BC}\cdot \text{sen}68^\circ$ = 14,3cm · sen 68° ≈ 13,26 cm

cos 68° = $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AB}$ = 14,3 · cos 68° ≈ 5,36 m .

b) B = 90° – 50°= 40°

sen 50° = $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC}$ = AB ·sen50º ≈ 13,84 cm; tg 50° = $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\text{tg}50^\circ} = \frac{10{,}6\text{cm}}{\text{tg}50^\circ}$ ≈ 8,89 m.

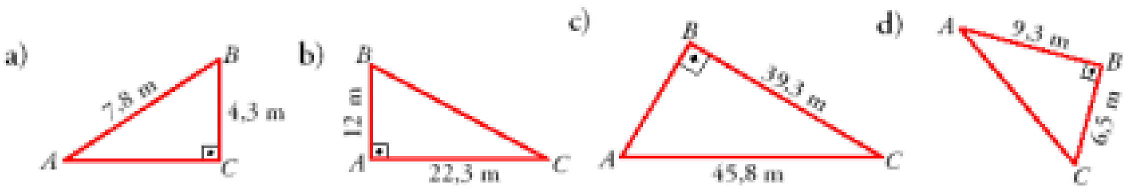
c) B = 90° – 20° = 70°

cos 20° = $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\cos 20^\circ}$ ≈ 18,09 cm; tg 20° = $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB}$ = 17 · tg 20° ≈ 6,19 m.

d) C = 90° – 45° = 45° (Triángulo isósceles)

sen 45° = $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AC}\cdot \text{sen}45^\circ$ = 21cm · sen 45° ≈ 14,85 cm = AB

12 Halla los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos:



a) sen A = $\frac{4{,}3\text{m}}{7{,}8\text{m}}$ ≈ 0,551282051⇒ A = arc sen 0,551282051= 33,45501157°= 33° 27' 18"

B = 90 – A = 90° – 33° 27' 18" = 56° 32' 42".

b) tg C = $\frac{12\text{m}}{22{,}3\text{m}}$ ≈ 0,538116591⇒ C = arc tg 0,538116591 = 28,28543194 = 28°17' 8"

B = 90 – C = 90° – 28°17' 8" = 61° 42' 52"

c) $\cos C = \dfrac{39{,}3m}{45{,}8m} \approx 0{,}858078602 \Rightarrow C = \arccos 0{,}858078602 \approx 30°\ 53'\ 55''$

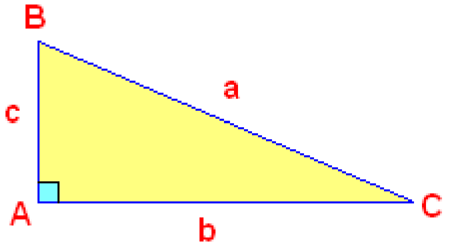
$A = 90 - C = 90° - 30°\ 53'\ 55'' = 59°\ 6'\ 55''$.

d) $\text{tg}\ C = \dfrac{9{,}3m}{6{,}5m} \approx 1{,}430769231 \Rightarrow C \approx \text{arc tg}1{,}430769231 \approx 55°\ 2'\ 58''$

$A = 90 - C = 90° - 55°\ 2'\ 58'' = 34°\ 57'\ 2''$.

13 Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) b = 5 cm c = 12 cm Calcula a, B y C
b) c = 43 m C = 37° Calcula a, b y B
c) b = 7 m C = 49° Calcula a, c y B
d) a = 5 m B = 65° Calcula b, c y C



a) Hallamos la longitud de la hipotenusa a mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{ cm}$$

$$\text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{5cm}{12cm} = 0{,}42 \Rightarrow \hat{B} = \text{arc tg}\frac{5}{12} = 22°37'11{,}51''$$

$$\hat{C} = 90° - \hat{B} = 90° - 22°37'11{,}51'' = 67°22'48{,}49''$$

b) $\text{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \dfrac{43m}{\text{sen}37°} = 71{,}45\text{ m}; \hat{B} = 90° - \hat{C} = 90° - 37° = 53°$

$$\text{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{c}{\text{tg}\hat{C}} = \frac{43m}{\text{tg}37°} = 57{,}1m$$

c) $\cos\hat{C} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{\cos\hat{C}} = \dfrac{7m}{\cos 49°} = 10{,}7\text{ m}; \hat{B} = 90° - \hat{C} = 90° - 49° = 41°$

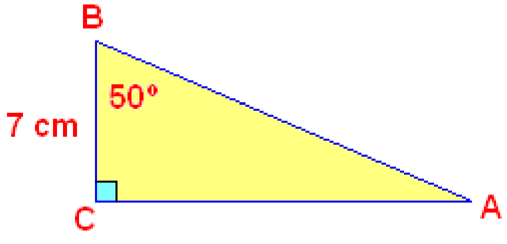
$$\text{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b\text{tg}\hat{C} = 7m\cdot\text{tg}49° = 8{,}1\text{ m}$$

d) $\hat{C} = 90° - \hat{B} = 90° - 65° = 25°; \text{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow b = a\text{sen}\hat{B} = 5m\cdot\text{sen}65° = 4{,}53m$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a\cos\hat{B} = 5m\cdot\cos 65° = 2{,}11\text{ m}$$

14 En un triángulo rectángulo, ABC con el ángulo recto en C conocemos B = 50° y el cateto BC = 7cm . Calcula AB, AC y $\hat{A}$.

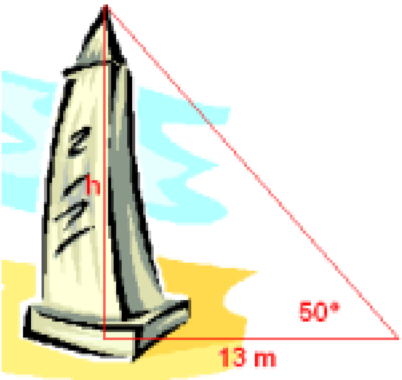
$$\hat{A} = 90° - \hat{B} = 90° - 50° = 40°$$



$$\text{tg}\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BC}\cdot\text{tg}\hat{B} = 7\cdot\text{tg}50° = 8{,}3cm$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\cos\hat{B}} = \frac{7cm}{\cos 50°} = 10{,}9\text{ cm}$$

15 Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.



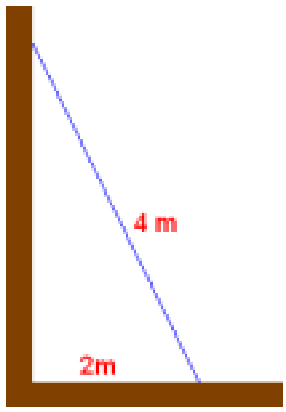
$$\text{tg}50° = \frac{h}{13\text{m}} \Leftrightarrow h = 13\text{m}\cdot\text{tg}50° = 15{,}5\ \text{m}$$

16 De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo mide 45° y uno de sus catetos 5 cm. ¿ Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?

Si es rectángulo y un ángulo mide 45º, el otro también medirá 45º, es isósceles, luego el otro cateto también mide 5 cm y la hipotenusa (h) :

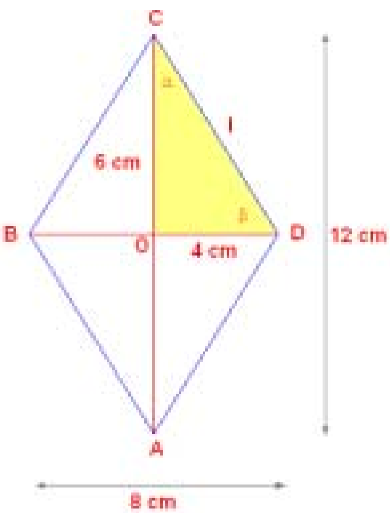
$$h = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2} = 7{,}07\ \text{cm}$$

17 Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿ Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?



$$\cos\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \text{arc}\cos\frac{1}{2} = 60°$$

18 Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿ Cuánto mide el lado del rombo?



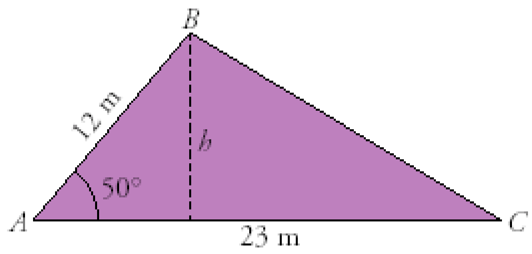
$$l = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21\,\text{cm}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{4\text{cm}}{6\text{cm}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\frac{2}{3} = 33°41'24{,}24''$$

β = 90º - α = 90º- 33º 41’ 24,24” = 56º 18’ 35,76”

19 En el triángulo ABC:

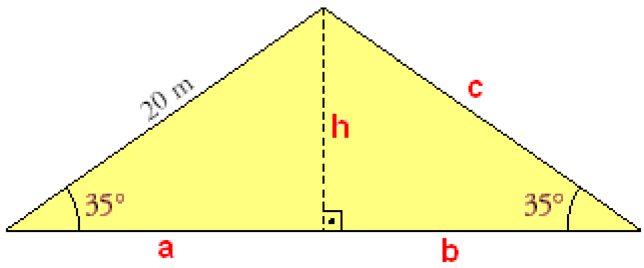
a) Traza la altura sobre AC y halla su longitud.
b) Calcula el área del triángulo.



a) $\text{sen}50^\circ = \dfrac{h}{\overline{AB}} \Leftrightarrow h = \overline{AB}\,\text{sen}50^\circ = 12\text{m}\cdot\text{sen}50^\circ = 9{,}2\text{m}$

b) $A = \dfrac{\overline{AC}\cdot h}{2} = \dfrac{23\text{m}\cdot 9{,}2\text{m}}{2} = 105{,}8\ \text{m}^2$

20 Calcula el área de este triángulo:



$\text{sen}35^\circ = \dfrac{h}{20\text{m}} \Leftrightarrow h = 20\text{m}\cdot\text{sen}35^\circ = 11{,}5\ \text{m}$

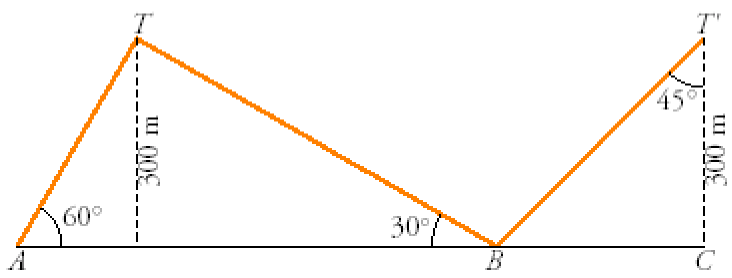
$\cos 35^\circ = \dfrac{a}{20\text{m}} \Leftrightarrow a = 20\text{m}\cdot\cos 35^\circ = 16{,}4\ \text{m}$

Base = a + b = 2a = 2 · 16,4 m = 32,8 m

$$\text{Área} = \frac{\text{Base}\cdot h}{2} = \frac{32{,}8\text{m}\cdot 11{,}5\text{m}}{2} = 188{,}6\ \text{m}^2$$

PIENSA Y RESUELVE

21 Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, T y T'. Este es un plano de la línea:



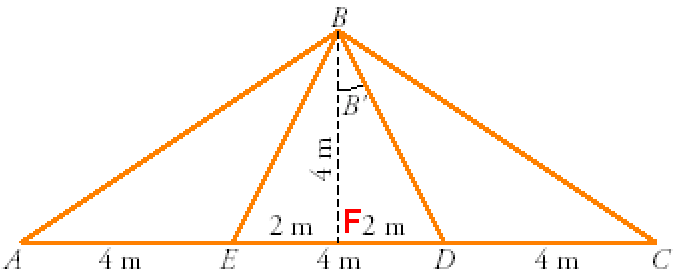
Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.

$\text{sen}60^\circ = \dfrac{300\text{m}}{\overline{AT}} \Rightarrow \overline{AT} = \dfrac{300\text{m}}{\text{sen}60^\circ} = 346{,}1\,\text{m}$

$\text{sen}30^\circ = \dfrac{300\text{m}}{\overline{BT}} \Rightarrow \overline{BT} = \dfrac{300\text{m}}{\text{sen}30^\circ} = 600\ \text{m}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{300\text{m}}{\overline{BT'}} \Rightarrow \overline{BT'} = \dfrac{300\text{m}}{\cos 45^\circ} = 424{,}3\ \text{m}$

22 Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura.



Halla la longitud de los postes AB y BE y la medida de los ángulos A , C , EBD y ABC.

⦿ En el triángulo rectángulo ABF, hallamos la hipotenusa AB :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{(4+2)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21\,\text{m}$$

⦿ En el triángulo rectángulo EFB, hallamos la hipotenusa BE :

$$\overline{EB}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4{,}5\,\text{m}$$

⦿ En el triángulo rectángulo ABF:

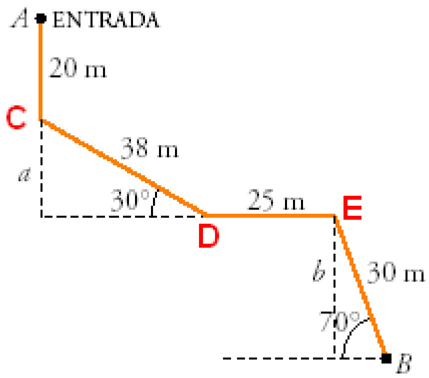
$$\text{tg}\hat{A} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} = \frac{4\text{m}}{6\text{m}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \text{arctg}\frac{2}{3} = 33^\circ\,41'\,24{,}24''\text{, luego } A\hat{B}F = 90^\circ - \hat{A} = 56^\circ\,18'\,35{,}76''$$

y por tanto $A\hat{B}C = 2 \cdot A\hat{B}F = 112^\circ\,37'\,11{,}5''$

⦿ En el triángulo rectángulo FBD: $\text{tg}\hat{B}' = \frac{\overline{FD}}{\overline{FB}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}' = \text{arctg}\frac{1}{2} = 26^\circ\,33'\,4{,}18''$ luego

$E\hat{B}D = 2 \cdot \hat{B}' = 53^\circ\,7'\,48{,}37''$

23 Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.



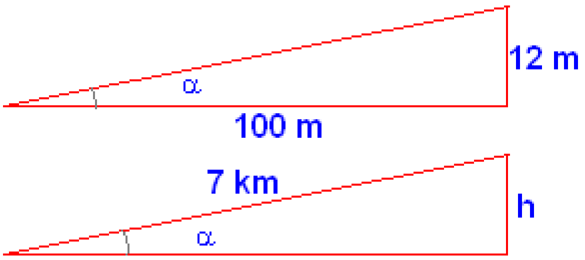
La profundidad a que se halla B es = 20 m + a + b, tenemos que hallar a y b :

$$\text{sen}30^\circ = \frac{a}{\overline{CD}} \Leftrightarrow a = \overline{CD} \cdot \text{sen}30^\circ = 38\text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 19\text{ m}$$

$$\text{sen}70^\circ = \frac{b}{\overline{EB}} \Leftrightarrow b = \overline{EB} \cdot \text{sen}70^\circ = 30\text{ m} \cdot \text{sen}70^\circ = 28{,}2\text{ m}$$

Luego Profundidad = 20 m + 19m + 28,2 = 67,2 m

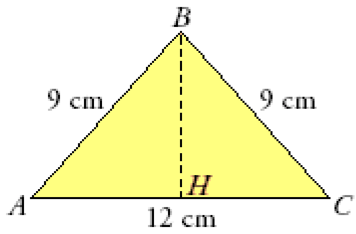
24 Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿ Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿ Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?



$$tg\alpha = \frac{12m}{100m} = 0{,}12 \Rightarrow \alpha = arctg0{,}12 = 6º\ 50'\ 34''$$

$$sen\alpha = \frac{h}{7km} \Leftrightarrow h = 7km \cdot sen\alpha = 0{,}834 = 834m$$

25 En el triángulo isósceles ABC, halla:



a) la altura BH.

b) los ángulos A, B y C

a) Como es isósceles AH = HC = 12cm/2 = 6cm.

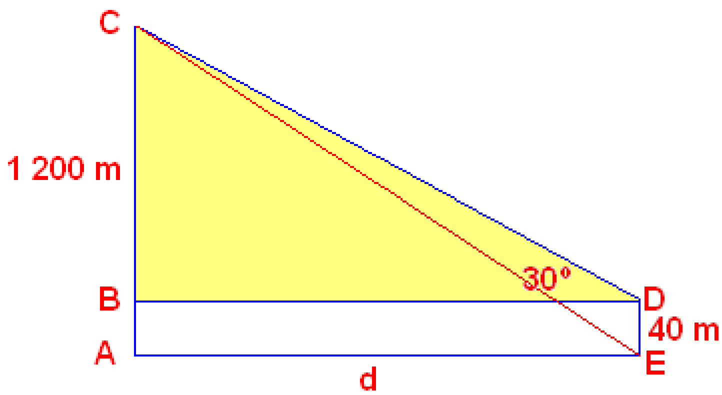
Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABH:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71\,cm.$$

b) $\cos\hat{C} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow \hat{C} = arccos\frac{2}{3} = 48º\ 11'\ 23''$ = A, luego B = 180º - 2A = 180º - 2· (48º 11’ 23”) = 83º 37’ 14”.

26 Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°. ¿ A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?

Se nos pide hallar la longitud de CE, para lo cual hallamos la longitud de BD = d en el triángulo BCD y después aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ACE para hallar la hipotenusa CE.



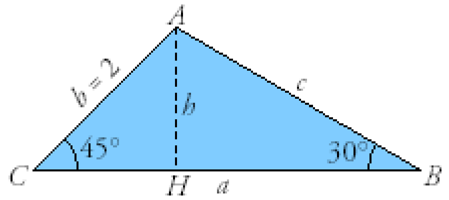
Cálculo de la longitud de BD :

$$tg30º = \frac{1200 - 40}{d} \Leftrightarrow d = \frac{1160}{tg30º} = 2009{,}2\,m$$

Cálculo de la longitud de CE:

$\overline{CE} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{1200^2 + 2009{,}2^2} = 2340{,}3$ m es la distancia del avión al pie de la torre.

27 Resuelve el siguiente triángulo ABC; es decir, averigua las medidas de sus elementos desconocidos. Empieza por trazar la altura AH.



Como C = 45º, CH = h = $\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$.

$\text{sen}30° = \frac{1}{2} = \frac{h}{a} \Leftarrow a = \frac{h}{\text{sen}30°} = 2\sqrt{2}$

luego c = $\sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{8+2} = \sqrt{10}$

y el ángulo A = 180º - C – B = 180º - 30º - 45º = 105º.

28 El diámetro de una moneda de 2 € mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.

El triángulo ABC es rectángulo en B ya que el radio siempre es perpendicular a la tangente en ese punto.

$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}5\text{cm}}{4{,}8\text{cm}} = 0{,}5208\widehat{3}$

luego $\frac{\alpha}{2} = \text{arcsen}0{,}5208\widehat{3} = 31°\ 23'\ 17{,}4''$

$\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot (31°\ 23'\ 17{,}4'') = 62°\ 46'\ 34{,}8''$