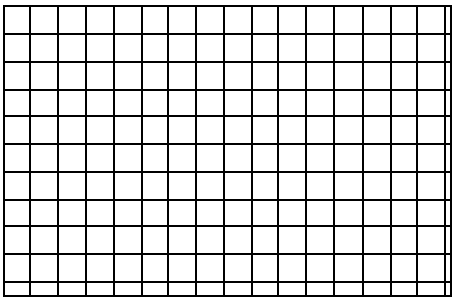
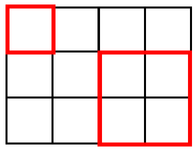
Actividades (Pág) 22

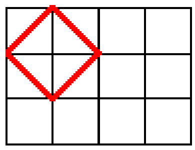
Este es el suelo de la sala del museo anterior:



- *¿Cuántas losetas enteras (sin partir) hay?*
- *Cada loseta mide 40 cm de lado. Si las que acabas de contar las pusieras en fila, una detrás de otra, ¿qué longitud se alcanzaría?*
- *Halla las dimensiones exactas (en centímetros) del suelo, sabiendo que las losetas partidas de la derecha son 1/5 de las enteras, y las de abajo, 1/2.*
- *Halla la superficie del suelo en centímetros cuadrados.*
- *Si intentáramos contar cuántos cuadrados se pueden señalar a partir de las losetas, nos encontraríamos con cantidades inmensas. Vamos a contarlos en un trozo más reducido:*



Hay cuadrados de lado 1 y otros de lado 2, como los que se señalan. También hay algunos de lado 3. ¿Cuántos podríamos encontrar de cada tipo? ¿Cuántos en total? ¿Y si nos fijamos en los rectángulos? ¿Cuántos hay de 2 × 1, de 3 × 1, de 3 × 2…? ¿Cuántos hay en total?



Además de los anteriores, hay otros cuadrados y rectángulos cuyos vértices se apoyan en la trama. ¿Cuántos hay de cada clase?

◈ Hay 10 (*filas*) × 16 (*columnas*) = 160 losetas enteras.

◈ Si las 160 losetas las ponemos en fila, alcanzarían una longitud de: 160 losetas× 40 cm/loseta = 6 400 cm = 64 m.

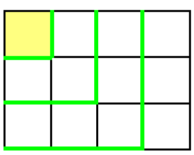
◈ Dimensiones exactas del suelo:

$\frac{1}{2}$ de 40 = 20 cm ⇒ Ancho = 10 × 40 + 20 = 420 cm = 4,2 m

$\frac{1}{5}$ de 40 = 8 cm ⇒ Largo = 16 × 40 + 8 = 648 cm = 6,48 m

Las dimensiones del suelo son 4,2 m de ancho y 6,48 m de largo.

◈ La superficie es : largo x ancho = 420 × 648 = 272 160 cm^2.



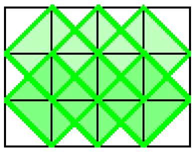
Cuadrado de lado 1 = 4 x 3 = 12.
Cuadrados de lado 2 = 6.
Cuadrados de lado 3 = 2.
TOTAL = 1 2+ 6 + 2 = 20 cuadrados.

Rectángulos 2 x 1 = 17 , Rectángulos de 3 x 1 = 10, Rectángulos 4 x 1 = 3.

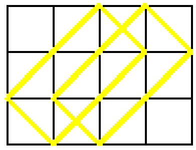
Rectángulos 2 x 3 = 7, Rectángulos 2 x 4 = 2, rectángulos 3 x 4 = 1.

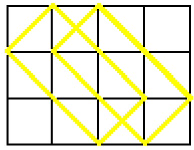
TOTAL = 17 + 10 + 3 + 7 + 2 + 1 = 40.

Cuadrados y rectángulo cuyos vértices se apoyan en la trama



Cuadrados = 6
Rectángulos = 4





Actividades (Pág 23)

① *Calcula:*

a) $3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = (3 \cdot 2 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27\,000$.

b) $(2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$.

c) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

d) $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$.

e) $\sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 3 \cdot 5 = 15$.

f) $\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[6]{10^6} = 10$

② *Hoy es lunes. Mañana será... Dentro de dos días será... Dentro de 25 días será...*

a) *¿Qué día de la semana será dentro de 357 días?*

b) *¿Qué día de la semana será cuando hayan pasado 7a + 3 días, donde a es un número natural cualquiera?*

c) *¿Cómo expresarías, en general, el número de días que han de transcurrir para que sea sábado?*

a) Calculamos la división 357 : 7. Si el resto es 0, será lunes; si es 1, será martes; si es 2, será miércoles; … hasta llegar al domingo con resto 6.

$357 = 7 \times 51 \Rightarrow$ resto 0 luego dentro de 357 días será lunes

b) Pasados 7*a* + 3 días (a ∈ N) será jueves (resto 3).

c) Para que sea sábado han de transcurrir 7*a* + 5 días, siendo *a* un número natural cualquiera.

Actividades (Pág 24)

① *Ordena de menor a mayor: – 4, 19, 7, 0, –6*

– 6 < – 4 < 0 < 7 < 19

② *Calcula:*

a) || –3|| = |3| = 3.

b) |5 + (3 – 11)| = |5 + 3 – 11| = |–3| = 3.

c) |5 + |3 – 11| | =| 5 + |-8|| = |5 + 8| = |13| = 13.

d) | 30 – (–20 – 9)| = |30 + 20 + 9| = |59| = 59.

③ *Calcula:*

a) (1 – 4) – (5 – 3) – (–6) = 1 – 4 – 5 + 3 + 6 = (1 + 3 + 6) – (4 + 5) = 10 – 9 = 1.

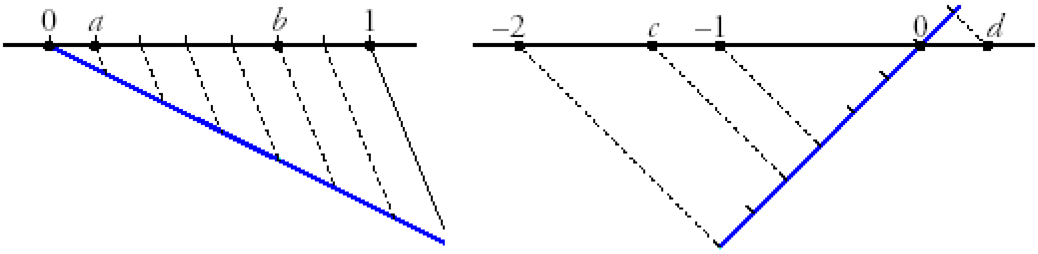
b) –3 · (4 – 2) – 4 · (3 – 8) = –3 · 2 – 4 · (–5) = –6 + 20 = 14.

c) (–2)3 + (–3)4 – 52 = –8 + 81 – 25 = 81 – (25 + 8) = 81 – 33 = 48.

d) 15 – 4 · (3 – 6) – 2 · [4 – 5 · (2 – 3)] = 15 – 4 · (–3) – 2 · [4 – 5 · (–1)] = 15 + 12 – 2 · (4 + 5) =
= 27 – 2 · 9 = 27 – 18 = 9.

Actividades (Pág 25)

① *¿Cuáles son los números racionales a, b, c y d representados en las siguientes construcciones?*



$$a=\frac{1}{7}\quad b=\frac{5}{7}\quad c=-\frac{4}{3}\quad d=\frac{1}{3}$$

Actividades (Pág 26)

① *Compara mentalmente cada pareja de fracciones:*

a) $\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{6}{8}<\frac{7}{8}$ **c)** $1<\frac{6}{5}$ **d)** $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ **e)** $3<\frac{11}{2}$

② *Ordena de menor a mayor:*

Reducimos a índice común, hallando el mínimo común múltiplo:

$$\left\{\begin{array}{l} 4=2^2 \\ 9=3^2 \\ 6=2\cdot3 \\ 12=2^2\cdot3 \\ 18=2\cdot3^2 \end{array}\right. \Rightarrow \text{m.c.m}(4,6,9,12,18)=2^2\cdot3^2=4\cdot9=36$$

$\frac{7}{12}=\frac{21}{36};\quad \frac{4}{6}=\frac{24}{36};\quad \frac{5}{9}=\frac{20}{36};\quad \frac{3}{4}=\frac{27}{36};\quad \frac{13}{18}=\frac{26}{36}$ como 20 < 21 < 24 < 26 < 27 el orden es :

$$\frac{5}{9}<\frac{7}{12}<\frac{4}{6}<\frac{13}{18}<\frac{3}{4}$$

Actividades (Pág 27)

③ *Calcula:*

a) $4-\frac{11}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12-11+7}{3}=\frac{8}{3}$. **b)** $\frac{3}{4}-7+\frac{46}{8}=\frac{6-56+46}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$.

c) $\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)=\frac{7}{3}-\frac{2}{6}-\frac{5}{9}=\frac{42-6-10}{18}=\frac{26}{18}=\frac{13}{9}$.

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}$.

e) $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6-3-2}{6}=\frac{1}{6}$.

f) $\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{2}-1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{30-12+8+3}{12}=\frac{29}{12}$.

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

④ *Calcula:*

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{5}\cdot\frac{5}{-2}=\frac{-2\cdot3\cdot5}{-2\cdot3\cdot5}=1$.

b) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+1}{\frac{3+4}{4}}=\dfrac{\frac{2-3+4}{4}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{3/4}{7/4}=\dfrac{3}{7}$.

c) $\dfrac{(-3)\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}=\dfrac{(-3)\frac{9-5}{15}}{(-2)\frac{20-18}{15}}=\dfrac{(-3)\frac{4}{15}}{(-2)\frac{2}{15}}=\dfrac{-12/15}{-4/15}=\dfrac{12}{4}=3$.

d) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}}{1-\frac{7}{15}}=\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{2}{30}}{\frac{15-7}{15}}=\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{\frac{12-1}{15}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{11/15}{8/15}=\dfrac{11}{8}$.

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

Actividades (Pág 28)

① *Reduce y expresa como potencia:*

a) $\frac{2^7\cdot3^7}{6^5}=\frac{(2\cdot3)^7}{6^5}=\frac{6^7}{6^5}=6^{7-5}=6^2=36$.

b) $\frac{12^3}{6^4}=\frac{(2^2\cdot 3)^3}{(2\cdot 3)^4}=\frac{2^6\cdot 3^3}{2^4\cdot 3^4}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}.$

c) $\frac{\left[(-3)^2\right]^3}{(-3)^6}=\frac{3^6}{3^6}=3^{6-6}=3^0=1.$

② *Calcula:*

a) $\sqrt[5]{a^{15}}=a^{\frac{15}{5}}=a^3.$ **b)** $\left(\sqrt[7]{b}\right)^{14}=b^{\frac{14}{7}}=b^2.$ **c)** $\sqrt[3]{2^{12}}=2^{\frac{12}{3}}=2^4=16.$

d) $\sqrt[6]{3^{18}}=3^{\frac{18}{6}}=3^3=27$ **e)** $\left(\sqrt{a}\right)^{10}=a^{\frac{10}{2}}=a^5.$

Actividades (Pág 29)

③ *Ordena de menor a mayor:*

$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ $2^{-1}=\frac{1}{2}$, $2^0=1$, $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$, luego el orden es: $2^{-4}<2^{-3}<2^{-2}<2^{-1}<2^0$.

④ *Expresa como una potencia de 3:*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+2-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=3^2$$

⑤ *Reduce y expresa como una potencia:*

$$\frac{12^2\cdot 5^{-1}}{15^2\cdot 8^{-1}}=\frac{(2^2\cdot 3)^2\cdot 5^{-1}}{(3\cdot 5)^2\cdot(2^3)^{-1}}=\frac{(2^2)^2\cdot 3^2\cdot 5^{-1}}{3^2\cdot 5^2\cdot 2^{-3}}=\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^{-1}}{3^2\cdot 5^2\cdot 2^{-3}}=2^{4+3}\cdot 3^{2-2}\cdot 5^{-1-2}=2^7\cdot 5^{-3}$$

⑥ *Calcula:*

a) $\sqrt[5]{2^{-10}}=2^{-\frac{10}{5}}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$ **b)** $\left(\sqrt[6]{a}\right)^{-12}=a^{-\frac{12}{6}}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$

c) $\sqrt[7]{3^{-21}} = 3^{-\frac{21}{7}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

****

Ejercicios de la unidad (pág 30)

PRACTICA

Números enteros y racionales

① *Calcula*:

a) 5 + (–3) – (–2) + (4 – 6) – [3 – (6 – 4)] = 7 – 3 + 2 + 4 – 6 – 3 + 6 – 4 = (5 + 2 + 4 + 6) – (3 + 6 + 3 + 4) = 17 – 16 = 1.

b) (3 + 6 – 11) · (4 – 2 – 9) · (–1) = (–2) · (–7) · (–1) = –14.

c) 5 · [8 – (2 + 3)] – (–4) · [6 – (2 + 7)] = 5 · (8 – 5) – (– 4) · (6 – 9) = 5 · 3 – (– 4) · (–3) = 15 – 12 = 3.

d) (–7) · [4 · (3 – 8) – 5 · (8 – 5)] = (–7) · [4 · (–5) – 5 · 3] = (–7) · (–20 – 15) = (–7) · (–35) = 245.

****

② *Calcula mentalmente*:

a) *La mitad de* $\frac{7}{8}$

b) *La tercera parte de* $\frac{9}{5}$

c) *La mitad de la quinta parte de –4*

d) *El triple de la mitad de* $\frac{2}{3}$

****

a) $\frac{1}{2}\text{de}\frac{7}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{16}$

b) $\frac{1}{3}\text{de}\frac{9}{5} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

c) $\frac{1}{2}\text{de}\frac{1}{5}\text{de} - 4 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$.

d) $3\cdot\frac{1}{2}\text{de}\frac{2}{3} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$.

****

③ *Calcula mentalmente*:

a) *Los dos quintos de 400*

b) *El número cuyos dos quintos son 160*

c) *Los tres séptimos de 140*
d) *El número cuyos cinco sextos son 25*

a) $\frac{2}{5}400 = (400:5)x2 = 80x2 = 160$ **b)** $\frac{2}{5}\text{dex} = 160 \Rightarrow x = \frac{160 \cdot 5}{2} = 400$ como sabemos del apartado anterior.

c) $\frac{3}{7}\text{de}140 = \frac{3 \cdot 140}{7} = 3 \cdot 20 = 60$ **d)** $\frac{5}{6}\text{de } x = 25 \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 6}{5} = 5 \cdot 6 = 30$.

4 *Calcula mentalmente:*

a) $\frac{4}{3}$ *de 21* **b)** $\frac{5}{2}$ *de 10* **c)** $\frac{3}{10}$ *de 1 millón* **d)** $\frac{7}{20}$ *de cien mil*

a) $\frac{4}{3}$ de 21 = $\frac{4}{3} \cdot 21 = (21:3) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28.$

b) $\frac{5}{2}$ de 10 = $\frac{5}{2} \cdot 10 = (10:2) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25.$

c) $\frac{3}{10}$ de 1 millón = $\frac{3}{10} \cdot 1000000 = (1\,000\,000 : 10) \cdot 3 = 100\,000 \cdot 3 = 300\,000.$

d) $\frac{7}{20}$ de cien mil = $\frac{7}{20} \cdot 100000 = (100\,000 : 20) \cdot 7 = 5\,000 \cdot 7 = 35\,000.$

5 *Expresa en forma de fracción de hora:*

a) *15 minutos* **b)** *20 minutos* **c)** *10 minutos*
d) *1 minuto* **e)** *120 segundos* **f)** *1 segundo*

Una hora = 60 min = 60·60 s = 3 600 s.

a) $\frac{15\,\text{min}}{60\ \text{min/hr}} = \frac{1}{4}\text{hr}$ **b)** $\frac{20\,\text{min}}{60\ \text{min/hr}} = \frac{1}{3}\text{hr}$ **c)** $\frac{10\,\text{min}}{60\ \text{min/hr}} = \frac{1}{6}\text{hr}$

d) $\frac{1\text{min}}{60\ \text{min/hr}} = \frac{1}{60}\text{hr}$ **e)** $\frac{120\text{s}}{3600\ \text{s/hr}} = \frac{1}{30}\text{hr}$ **f)** $\frac{1\text{s}}{3600\ \text{s/hr}} = \frac{1}{3600}\text{hr}$

❻ *En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?*

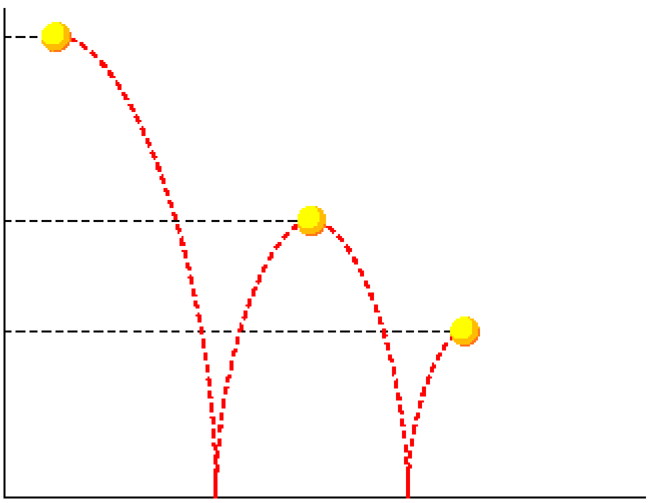
$$\frac{3}{8}\text{de}\frac{5}{6}\text{ de las ventas} = 89€ \Rightarrow \text{Ventas} = \frac{89\cdot 8\cdot 6}{3\cdot 5} = 284{,}8€$$

❼ *En un depósito, el lunes había 3 000 litros de agua y estaba lleno. El martes se gastó 1/6 del depósito. El miércoles se sacaron 1 250 litros. ¿Qué fracción queda?*

$$\text{Lunes} = 3000\text{ l} \to \text{Martes}\begin{cases}\text{Gasto} = \frac{1}{6}3000 = 500\text{ l}\\ \text{Quedan} = \frac{5}{6}3000 = 2500\text{ l} \to \text{Miércoles}\begin{cases}\text{Gasto} = 1250\text{ l}\\ \text{Quedan} = 2500 - 1250 = 1250\text{ l}\end{cases}\end{cases}$$

Fracción que queda = $\frac{1250\text{ l}}{3000\text{ l}} = \frac{5}{12}$ del volumen inicial.

❽ *Una pelota pierde en cada bote* $\frac{2}{5}$ *de la altura a la que llegó en el bote anterior. ¿Qué fracción de la altura inicial, desde la que cayó, alcanzará cuatro botes después?*



Si, en cada bote, pierde $\frac{2}{5}$ de la altura le quedan $\frac{3}{5}$ de la altura, luego, si bota cuatro veces la altura alcanzada será:

$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$ de la altura inicial.

⑨ *Reduce a una sola fracción cada una de estas expresiones:*

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{8-4-2-1}{16}=\frac{1}{16}.$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-1=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+1-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{12-5+20-15+8}{20}=\frac{20}{20}=1$

c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{12+4-9-6+4-3}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{20}=\frac{36+20-60+45-30-20+9}{60}=$

$=\frac{0}{60}=0.$

①⓪ *Calcula:*

a) $\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}=\dfrac{-\frac{3\cdot8}{4\cdot9}}{\frac{5\cdot6}{7\cdot3}}=\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{10}{7}}=-\frac{2}{3}:\frac{10}{7}=-\frac{2\cdot7}{3\cdot10}=-\frac{7}{15}.$

b) $\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}:\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{8+4-1}{8}}{\frac{6-4-1}{8}}:\dfrac{\frac{22}{7}}{\frac{7+3}{14}}=\dfrac{\frac{11}{8}}{\frac{1}{8}}:\dfrac{\frac{22}{7}}{\frac{10}{14}}=11:\frac{22\cdot14}{10\cdot7}=11:\frac{22}{5}=\frac{5\cdot11}{2\cdot11}=\frac{5}{2}$

①① *Expresa en el sistema sexagesimal* $\frac{7}{3}$ *de hora.*

$\frac{7}{3}$ de hora $=\frac{7}{3}$ de 60 min $=(60:3)\cdot7=20\cdot7=140$min $=2$hr 20min

①② *Separa en cada fracción la parte entera, como en el ejemplo:* $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$

a) $\frac{5}{3}=\frac{3+2}{3}=\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}$.

b) $\frac{-7}{3}=\frac{-6-1}{3}=-\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=-2-\frac{1}{3}$.

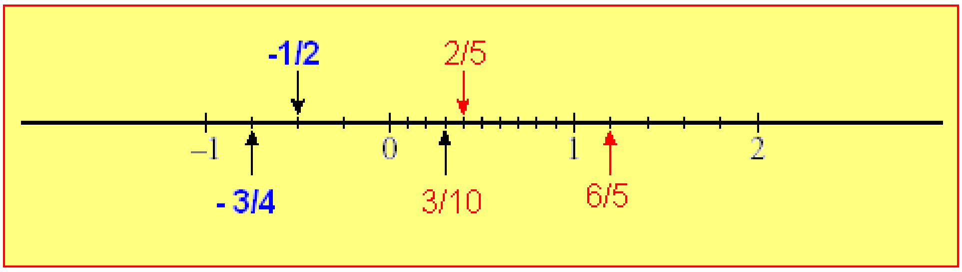
c) $\frac{45}{5}=9$.

d) $-\frac{48}{5}=\frac{-45-3}{5}=-\frac{45}{5}-\frac{3}{5}=-9-\frac{3}{5}$.

e) $\frac{93}{10}=\frac{90+3}{10}=\frac{90}{10}+\frac{3}{10}=9+\frac{3}{10}$.

f) $\frac{2437}{621}=\frac{1863+574}{621}=\frac{1863}{621}+\frac{574}{621}=3+\frac{574}{621}$

①③ *Representa en la recta numérica:*



Potencias

①④ *Elimina paréntesis y simplifica:*

a) $(2\cdot3\cdot5)^4 = 30^4$.   **b)** $(-3)^5:(-3)^3 = (-3)^{5:3} = (-3)^2 = 3^2$.   **c)** $\frac{6^2}{(-3)^4}=\frac{(2\cdot3)^2}{3^4}=\frac{2^2\cdot3^2}{3^4}=\frac{2^2}{3^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

d) $\left[2^4\cdot(-2)^2\right]:(-4)^3=\left[2^4:2^2\right]:\left(-2^2\right)^3=2^{4+2}:(-2^{2\cdot3})=2^6:(-2^6)=-2^{6-6}=-2^0=1$

e) $\frac{a^2\cdot(b\cdot c)^2}{(ab)^3\cdot c}=\frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2}{a^3\cdot b^3\cdot c}=\frac{c^{2-1}}{a^{3-2}\cdot b^{3-2}}=\frac{c}{ab}$.

f) $\frac{(ab)^2-(ab)^3}{(ab)^4}=\frac{a^2b^2-a^3b^3}{a^4b^4}=\frac{a^2b^2(1-ab)}{a^4b^4}=\frac{1-ab}{a^2b^2}$.

15 Calcula:

a) $(-2)^4 = 2^4 = 16$. **b)** $-2^4 = -16$ **c)** $(-2)^3 = -2^3 = -8$. **d)** $-2^3 = -2^3 = -8$

e) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ **f)** $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-2^3} = \frac{1}{-8}$. **g)** $(-1)^{16} = 1^{16} = 1$ **h)** $(-1)^{17} = -1^{17} = -1$

i) $(-1)^{8\,723} = -1^{8\,723} = -1$.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

16 Reduce:

a) $$\frac{-3^2}{(-3)^3} = \frac{-3^2}{-3^3} = \frac{3^2}{3^3} = \frac{1}{3^{3-2}} = \frac{1}{3}.$$

b) $$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2+4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

c) $$\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2^3} : \frac{1}{(2^2)^2} = \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2.$$

d) $$\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1} = \frac{5}{2}.$$

e) $$\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot (3^2)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \frac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \frac{2^{7-3}}{3^{7-2}} = \frac{2^4}{3^5} = \frac{16}{243}.$$

f) $$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \frac{1}{(1/2)^6} = 2^6 = 64.$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

17 Calcula:

a) $$\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6-7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{8^2}{4^3} = -\frac{(2^3)^2}{(2^2)^3} = -\frac{2^6}{2^6} = -1.$$

b)

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(\frac{1-4}{6}\right)^2 - \left(\frac{8-5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2-3}{3}\right)^2 = \left(-\frac{3}{6}\right)^2 - \left(\frac{3}{6}\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}:\frac{1}{9}=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=\frac{1-9}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

c) $$\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4=\left(\frac{6-3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3-7}{9}\right)^{-1}+4=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}+4=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+4=$$
$$=-\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{4}+4=-\frac{16\cdot 9}{4\cdot 9}+4=-4+4=0.$$

d) $$\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}=\left(\frac{3-7}{12}\right)+\left(\frac{5-10}{4}\right)\cdot\left(\frac{1-16}{4}\right)^{-1}=\left(-\frac{4}{12}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)^{-1}=$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

18 *Reduce aplicando las propiedades de las potencias:*

a) $$\frac{2^2\cdot 3^4}{9\cdot 12\cdot 6}=\frac{2^2\cdot 3^4}{3^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}=\frac{2^2\cdot 3^4}{2^{2+1}\cdot 3^{2+1+1}}=\frac{2^2\cdot 3^4}{2^3\cdot 3^4}=\frac{3^{4-4}}{2^{3-2}}=\frac{3^0}{2^1}=\frac{1}{2}.$$

b) $$\frac{4\cdot 45\cdot 24}{3^3\cdot 2^4\cdot 5}=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^3\cdot 3}{3^3\cdot 2^4\cdot 5}=\frac{2^{2+3}\cdot 3^{2+1}\cdot 5}{3^3\cdot 2^4\cdot 5}=\frac{2^5\cdot 3^3\cdot 5}{3^3\cdot 2^4\cdot 5}=2^{5-4}\cdot 3^{3-3}\cdot 5^{1-1}=2\cdot 3^0\cdot 5^0=2.$$

c) $$\frac{8\cdot 27^{-1}}{12^{-1}}=\frac{8\cdot 12}{27}=\frac{2^3\cdot 2^2\cdot 3}{3^3}=\frac{2^{3+2}}{3^{3-1}}=\frac{2^5}{3^2}=\frac{32}{9}.$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

19 *Calcula:*

a) $\sqrt[3]{5^3}=5$

b) $$\sqrt[3]{2^6}=\begin{cases}\sqrt[3]{2^3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}=2\cdot 2=2^2=4\\ 2^{\frac{6}{3}}=2^2=4\end{cases}$$

c) $$\sqrt[4]{3^8}=\begin{cases}3^{\frac{8}{4}}=3^2=9\\ \sqrt[4]{(3^4)^2}=\left(\sqrt[4]{3^4}\right)^2=3^2=9\\ \sqrt[4]{3^4\cdot 3^4}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{3^4}=3\cdot 3=9\end{cases}$$

d) $$\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}=\sqrt[5]{7^{10}}=7^{\frac{10}{5}}=7^2=49$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

20 *Simplifica:*

a) $\sqrt{4a^4} = \sqrt{2^2a^4} = 2^{2/2}\cdot a^{4/2} = 2a^2$.

b) $\left(\sqrt[3]{5a}\right)^9 = \sqrt[3]{(5a)^9} = (5a)^{9/3} = (5a)^3 = 125a^3$

c) $\sqrt[4]{\left(2b^2\right)^8} = \left(2b^2\right)^{8/4} = \left(2b^2\right)^2 = 4b^4$.

****

21 *Expresa el radicando como potencia y calcula:*

a) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$.

b) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$.

c) $\sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{5^5} = 5$.

d) $\sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^{12/6} = 2^2 = 4$.

****

22 *Calcula, sabiendo que estas raíces son exactas:*

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{6/6} = 2$.

b) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2^{8/8} = 2$.

c) $\sqrt[3]{2197} = \sqrt[3]{13^3} = 13$.

d) $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$.

e) $\sqrt[5]{16807} = \sqrt[5]{7^5} = 7^{5/5} = 7$.

f) $\sqrt[4]{81\cdot 10^4} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10^4} = \sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{10^4} = 3\cdot 10 = 30$

****

23 *Simplifica:*

a) $\sqrt[3]{8a^3} = \sqrt[3]{2^3\cdot a^3} = \sqrt[3]{(2a)^3} = (2a)^{3/3} = 2a$.

b) $\sqrt[3]{8a^6} = \sqrt[3]{2^3a^6} = 2^{3/3}\cdot a^{6/3} = 2a^2$.

c) $\sqrt{64a^4} = \sqrt{2^6a^4} = 2^{6/2}a^{4/2} = 2^3a^2 = 8a^2$.

d) $\sqrt[4]{64a^4} = \sqrt[4]{2^6a^4} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2^2a^4} = 2^{4/4}\cdot 2^{2/4}\cdot a^{4/4} = 2\cdot 2^{1/2}a = 2a\sqrt{2}$.

****

Piensa y resuelve

24 Los $\frac{3}{8}$ de un poste están pintados de blanco; los $\frac{3}{5}$ del resto, de azul, y el resto, que mide 1,25 m, de rojo. ¿Cuál es la altura del poste? ¿Cuánto mide la parte pintada de azul?

$$\text{Poste}\begin{cases}\text{Blanco} = \dfrac{3}{8} \\ \text{Resto} = \dfrac{5}{8}\begin{cases}\text{Azul} = \dfrac{3}{5}\text{de}\dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8} \\ \text{Resto} = \dfrac{2}{5}\text{de}\dfrac{5}{8} = \dfrac{2}{8} \rightarrow \text{Rojo} = 1{,}25\text{ m}\end{cases}\end{cases}$$

Como la parte pintada de rojo es $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ del poste y son 1, 25, la longitud del poste será:

Poste = 1,25 · 4 = 5 m.

Parte pintada de azul = $\frac{3}{8}$ de 5 m = 1,875 m.

25 Una canica cae al suelo y se eleva cada vez a los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Después de haber botado tres veces, se ha elevado 2 m de altura. ¿Desde qué altura cayó?

Primer bote = 2/3 de la altura.

Segundo bote = $\frac{2}{3}\text{de}\frac{2}{3}$ de la altura.

Tercer bote = $\frac{2}{3}\text{de}\frac{2}{3}\text{de}\frac{2}{3}$ de la altura = $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ de l altura inicial = 2 m, luego la altura inicial es :

Altura inicial = $2 \cdot \frac{27}{8} = 6{,}75$ m.

26 *Un depósito de agua tiene tres tomas de agua. Si se abren las tres, el depósito se llena en 2 horas. Abriendo las dos primeras, el depósito se llena en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría la tercera en llenar el depósito?*

- Si se abren las tres tomas:

  El depósito se llena en 2 h, luego en 1 h se llena ½ del depósito.

- Si se abren las dos primeras tomas:

  El depósito se llena en 5 h luego en 1 h se llena $\frac{1}{5}$ del depósito.

- Si se abre la tercera toma solamente:

En 1 h se llenaría $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$ del depósito, luego para llenar el depósito necesitaría :

$\frac{10}{3}$ de hora $=\frac{10}{3}$ de 60 min = 200 min = 3 h 20 min.

27 *Una fuente puede llenar un depósito en 3 horas, y un desagüe vaciarlo en 4 horas. Estando $\frac{1}{3}$ del depósito lleno, se abren a la vez la fuente y el desagüe. ¿Al cabo de cuántas horas se llenarán $\frac{3}{4}$ los del depósito?*

Como la fuente llena el depósito en 3 hr, llena $\frac{1}{3}$ del depósito por hora.

Como el desagüe lo vacía en 4 hr, al cabo de 1 hr vacía ¼ del depósito.

Al cabo de una hora de funcionar juntos la fuente y el desagüe llenan:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$$ del depósito por hora.

Como inicialmente había 1/3 y que queremos que se llenen los ¾, habrá que añadir:

$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{9-4}{12}=\frac{5}{12}$ que a $\frac{1}{12}$ por hora se tardará 5 horas en llenar hasta los ¾ de depósito.

28 *Un taxista cambia el aceite de su vehículo cada 3 500 km y le hace una revisión general cada 8 000 km. ¿Cada cuántos kilómetros coinciden ambas operaciones de mantenimiento?*

Deberán coincidir por primera vez en el múltiplo más pequeño de los dos recorridos, es decir m.c.m(3 500, 8 000):

$$\begin{cases} 3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \\ 8000 = 2^6 \cdot 5^3 \end{cases} \Rightarrow \text{m.c.m.}(3500{,}5000) = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 7 = 64 \cdot 125 \cdot 7 = 56\ 000 \text{ km.}$$

Ambas operaciones de mantenimiento(cambiar el aceite y revisión general) coincidirán a los 56 000 km.

29 *De un solar se venden primero los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m² restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?*

$$1^{\text{a}}\text{ venta}\begin{cases} \text{Venden}: \dfrac{2}{3} \\ \text{Quedan}: \dfrac{1}{3} \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ venta}} \begin{cases} \text{Venden}: \dfrac{2}{3}\text{de}\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9} \\ \text{Quedan}: \dfrac{1}{3}\text{de}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} \end{cases} \end{cases}$$

Los 1/9 que quedan después de la segunda venta se corresponde con los 3 200 m² que ocupará el parque público, luego el solar tenía una superficie:

Superficie = 3 200 m² · 9 = 28 800 m².

30 *Un vendedor ambulante lleva una cesta de naranjas. En la primera casa que visita vende la mitad de las naranjas más media. En la segunda casa vende la mitad de las que le quedaban más media. En la tercera y en la cuarta casa, repite la misma operación, con lo que se le agota la mercancía. ¿Cuántas naranjas llevaba?*
NOTA: En ningún momento parte naranjas.

Sea n = número inicial de naranjas

$$n \xrightarrow{1^{a}\text{ casa}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+1}{2} \\ \text{Quedan}: n-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n-1}{2} \xrightarrow{2^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{\frac{n-1}{2}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+1}{4} \\ \text{Quedan}: \dfrac{n-1}{2}-\dfrac{n+1}{4}=\dfrac{n-3}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{3^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{\frac{n-3}{4}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-3}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+1}{8} \\ \text{Quedan}: \dfrac{n-3}{4}-\dfrac{n+1}{8}=\dfrac{n-7}{8} \xrightarrow{4^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{\frac{n-7}{8}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+1}{16} \\ \text{Quedan}: \dfrac{n-7}{8}-\dfrac{n+1}{16}=\dfrac{n-15}{16} \end{cases} \end{cases}$$

Como al final no queda ninguna naranja: $\dfrac{n-15}{16}=0 \Leftrightarrow n-15=0 \Leftrightarrow n=15$ naranjas había al principio, lo comprobamos:

$$15 \xrightarrow{1^{a}\text{ casa}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{15}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{2}=8 \\ \text{Quedan}: 15-8=7 \xrightarrow{2^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ \text{Quedan}: 7-4=3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{3^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ \text{Quedan}: 3-2=1 \xrightarrow{4^{a}} \begin{cases} \text{Vende}: \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ \text{Quedan}: 1-1=0 \end{cases} \end{cases}$$

31 *¿Cuántos números capicúas hay entre el 2 000 y el 5 000?*

Los números capicúas que hay entre 2 000 y 3 000 son de la forma 2nn2, siendo *n* = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luego hay 10 números capicúas entre 2 000 y 3 000.
Análogamente, entre 3 000 y 4 000 y entre 4 000 y 5 000:

3nn3 → 10 capicúas

4nn4 → 10 capicúas

El total de números capicúas entre 2 000 y 5 000 es de 10 · 3 = 30.

32 *Si multiplicas los números naturales de 1 a 50, ambos inclusive, ¿en cuántos ceros termina el resultado?*

Para que termine en cero ha de ser múltiplo de 10 y, por tanto, ha de contener los factores 2 y 5. Es evidente que habrá más dos que cincos luego se trata de contar cuántos 5 hay en los números del 1 al 50 y ese será el número de ceros:
Nº de cincos = múltiplos de 5 + 2(5·5, 5·5·2) = 5 números que terminan en 0(10, 20, 30, 40, 50) + 5 que terminan en 5 (5, 15, 25, 35, 45) + 2 factores duplicados (25 y 50) = 12

Es decir 1 · 2 · 3 · ... · 49 · 50[1], termina en 12 ceros

50! = 30 414 093 201 713 378 043 612 608 166 064 768 844 377 641 568 960 512 **000 000 000 000**.

33 *Observa este cuadrado mágico:*

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

En él se han colocado los números del 1 al 16 de forma que todas las líneas (filas, columnas y diagonales) suman lo mismo.

a) *Construye otro cuadrado mágico con los números del 66 al 81.*

b) *Construye otro con los números 20, 25, 30, 35, ..., 95.*

66	79	80	69
77	72	71	74
73	76	75	70
78	67	68	81

a) Sustituimos 1 por 66, 2 por 67,... y 16 por 81.

La suma de las filas, columnas y diagonales es 294

b) Ahora sustituimos 1 por 20, 2 por 25,... y 16 por 95 y la suma es 230

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

[1] 1·2·3·...·48·49·50 = 50! (50 factorial se lee) ya que 1·2·...·n = n!

③④ a) *Calcula el punto medio entre cada uno de estos pares de números racionales:*

$$0 \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{5}{8}$$

b) *Representa esos valores en la recta numérica.*

c) *¿Es racional el valor medio entre dos racionales? Esto es, ¿se puede expresar como una fracción?*

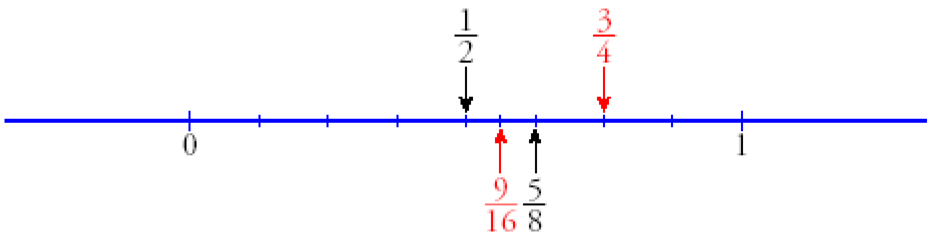
d) *¿Podrías seguir colocando valores medios entre los obtenidos? ¿Cuántos podrías colocar?*

e) *¿Cuántos números racionales hay entre 0 y 1? ¿Cuántos racionales hay entre dos racionales cualesquiera?*

a)

$$\begin{cases} \text{Entre } 0 \text{ y } 1: \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \text{Entre } \dfrac{1}{2} \text{y} 1: \dfrac{\frac{1}{2}+1}{2} = \dfrac{3/2}{2} = \dfrac{3}{4} \\ \text{Entre } \dfrac{1}{2} \text{y} \dfrac{3}{4}: \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{2+3}{4}}{2} = \dfrac{5/4}{2} = \dfrac{5}{8} \\ \text{Entre } \dfrac{1}{2} \text{y} \dfrac{5}{8}: \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{2} = \dfrac{\frac{4+5}{8}}{2} = \dfrac{9/8}{2} = \dfrac{9}{16} \end{cases}$$

b)



c) Sí, el punto medio entre dos racionales también es racional.

d) Entre los valores obtenidos $\frac{1}{2}, \frac{9}{16}, \frac{5}{8}$ y $\frac{3}{4}$ se pueden colocar infinitos valores medios.

e) En general, entre dos números racionales hay infinitos racionales.

35 *Una máquina transforma fracciones de forma que si entra una fracción* F *la convierte en una nueva fracción:* $\frac{1-F}{1+F}$

Por ejemplo, entra $\frac{1}{2}$ *y sale* $\frac{1}{3}$*. Compruébalo.*

Pues bien, supongamos que entra la fracción $\frac{2}{5}$ *y el resultado vuelve a introducirse en la máquina, repitiendo el proceso mil veces. ¿Cuál será la fracción obtenida al final?*

❁ Primero comprobamos que al introducir F = ½ sale 1/3:

$$\frac{1-F}{1+F}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}$$

❁ Ahora estudiamos el comportamiento de la "máquina" al partir de 2/5 en búsqueda de regularidades:

$$F_1=\frac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{3/5}{7/5}=\frac{3}{7} \qquad F_2=\frac{1-\frac{3}{7}}{1+\frac{3}{7}}=\frac{4/7}{10/7}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Luego deducimos que en los procesos de lugar impar el resultado es 3/7 y en los que ocupan un lugar par 2/5, como 1 000 es par el resultado de la máquina será 2/5.