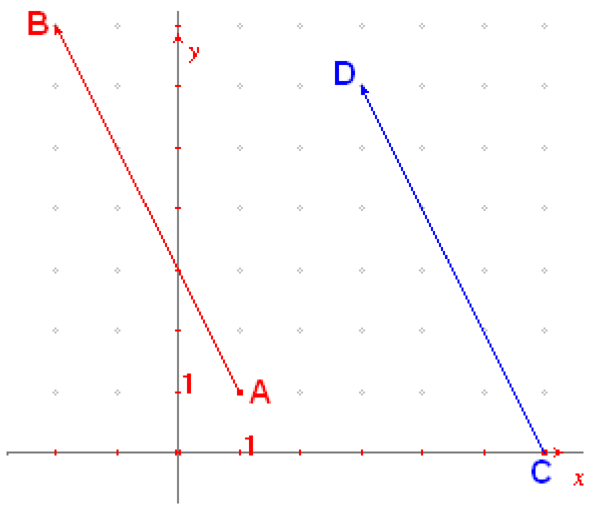
ACTIVIDADES (Página 191)

① Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo A(1, 1), B(-2, 7), C(6, 0), D(3, 6) y observa que son iguales. Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.



$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 7) - (1, 1) = (-3, 6)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (3, 6) - (6, 0) = (-3, 6)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = \left|\overrightarrow{CD}\right|$$

② Tenemos tres puntos de coordenadas: A(3, -1), B(4, 6), C(0, 0)

Halla las coordenadas del punto D para que lo vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.

Si llamamos a D(x, y), para que los dos vectores sean iguales han de tener las mismas componentes, es decir ha de cumplirse :

B – A = D – C, (4, 6) – (3, -1) = (x, y) – (0, 0), (1, 7) = (x, y), x = 1, y = 7, el punto D(1, 7).

ACTIVIDADES (Página 192)

① a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ siendo A(1, 3), B(4, 5), C(6, -2). Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

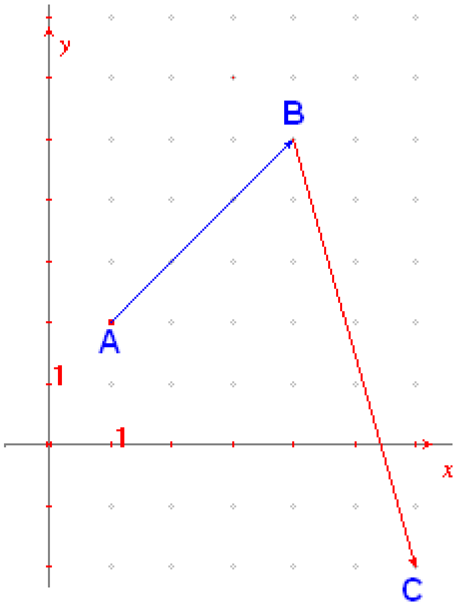
c) Representa $3\vec{u}, -2\vec{v}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

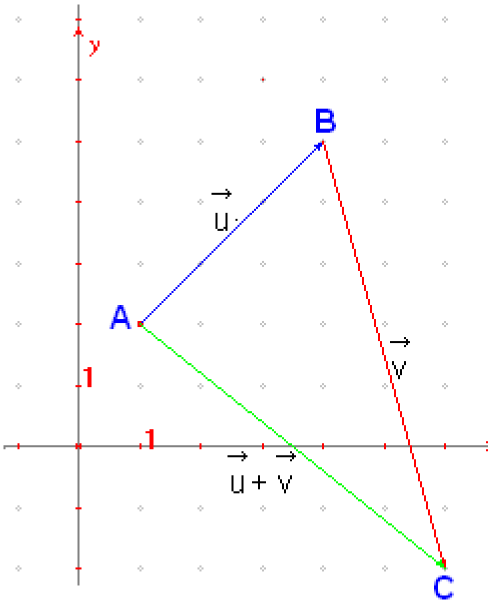
a) Las coordenadas son:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} =$ B – A = (4, 5) – (1, 3) = (3, 2)

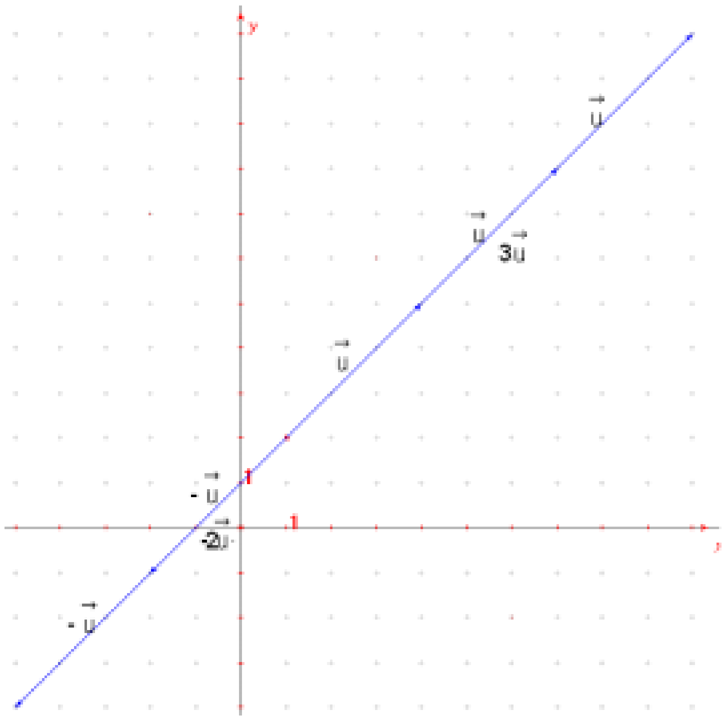
$\vec{v} = \overrightarrow{BC} =$ C – B = (6, -2) – (4, 5) = (2, -7)



b) $\vec{u}+\vec{v}=(3,\ 2) + (2,\ -7) = (5,\ -5)$, por el extremos de $\vec{u}$ dibujamos $\vec{v}$ y uniendo el origen del primero con el extremos del segundo tenemos el vector suma, cuyas componentes obtenemos sumando algebraicamente componente a componente.



c)



$3\vec{u}=3(3,\ 2) = (9,\ 6)$, ponemos 3 veces $\vec{u}$ una a continuación de las otras ya que un producto ni es más que sumar un factor tantas veces como indica el otro.

$-2\vec{u}=-2(3,\ 2) = (-6,\ -4)$, ahora colocamos dos veces el opuesto de $\vec{u}$.

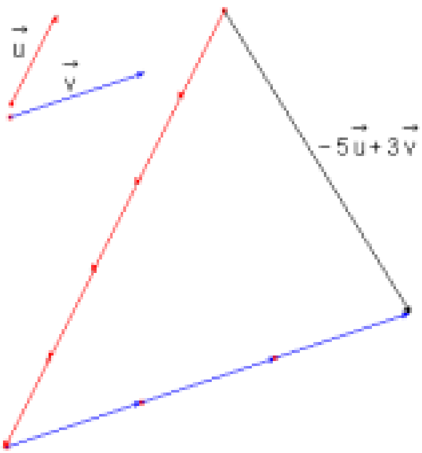
$0\vec{v}=0(2,\ -7) = (0,\ 0)$

d)

$3\vec{u}-4\vec{v}$ = 3(3, 2) – 4(2, -7) = (9, 6) – (8, - 28) = (1, 34), colocamos 3 veces $\vec{u}$ y 4 veces el opuesto de $\vec{v}$ y después unimos el origen con el extremo.

ACTIVIDADES (Página 193)

2 Dibuja en tu cuaderno dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que sean, aproximadamente, como los de la derecha, y obtén gráficamente el vector $-5\vec{u}+3\vec{v}$.



Empezamos poniendo 5 veces el opuesto de $\vec{u}$ y por su extremos 3 veces $\vec{v}$ y tenemos $-5\vec{u}+3\vec{v}$.

3 $\vec{u}(-5, 8)$, $\vec{v}(-41, -10)$, $\vec{w}(3, 6)$.

a) Halla las coordenadas de $3\vec{u}-2v+10\vec{w}$.

b) Averigua el valor de x e y para que se cumpla que $x\vec{u}+y\vec{w}=\vec{v}$.

a) $3\vec{u}-2v+10\vec{w}=3(-5,8)-2(-41,-10)+10(3,6)=(-15,24)+(82,20)+(30,60)=(97,104)$

b) $x\vec{u}+y\vec{w}=\vec{v} \Leftrightarrow x(-5,8)+y(3,6)=(-41,-10) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+3y=-41 \xrightarrow{-2} \\ 8x+6y=-10 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x-6y=82 \\ 8x+6y=-10 \\ \hline 18x=72 \end{cases}$

x = 72/18 = 4, luego $y=\frac{-41+5x}{3}=\frac{-41+20}{3}=7$

ACTIVIDADES (Página 194)

① Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) A(-2, 5), B(4, 1) **b)** P(7, -3), Q(-5, 1) **c)** R(1, 4), S(7, 2) **d)** A(-3, 5), B(4, 0)

Las coordenadas del punto medio de un segmento se hallan haciendo la semisuma de las coordenadas de los extremos:

a) $\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+4}{2}=1 \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+1}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow M(1,3)$.

b) $\begin{cases} x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{7-5}{2}=1 \\ y_M=\frac{y_P+y_Q}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1,-1)$

c) $\begin{cases} x_M=\frac{x_R+x_S}{2}=\frac{1+7}{2}=4 \\ y_M=\frac{y_R+y_S}{2}=\frac{4+2}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow M(4,3)$

d) $\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1,3)$

② Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

a) A(4, -1), P(-7, 2)

b) A(2, 4), P(5, -1)

Si A'(x, y) es el punto simétrico buscado, se cumplirá que P será el punto medio del segmento AA' :

a) $\begin{cases} x_P=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -7=\frac{4+x}{2} \Leftrightarrow -14=4+x \Leftrightarrow x=-18 \\ y_P=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 2=\frac{-1+y}{2} \Leftrightarrow 4=-1+y \Leftrightarrow y=5 \end{cases} \Leftrightarrow A'(-18,5)$

b) $\begin{cases} x_P=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 5=\frac{2+x}{2} \Leftrightarrow 10=2+x \Leftrightarrow x=8 \\ y_P=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \Leftrightarrow -1=\frac{4+y}{2} \Leftrightarrow -2=4+y \Leftrightarrow y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow A'(8,-6)$

ACTIVIDADES (Página 195)

① Comprueba si R(2, 7), S(5, -1) y T(15, -25) están alineados.

Si están alineados $\vec{RS}$ y $\vec{ST}$ han de tener la misma dirección, es decir las componentes proporcionales:

$$\begin{cases} \vec{RS} = S - R = (5,-1) - (2,7) = (3,-8) \\ \vec{ST} = T - S = (15,-25) - (5,-1) = (10,-24) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{10} \neq \frac{-8}{-24} \Rightarrow \text{los puntos R, S y T no están alineados}$$

② Averigua el valor de a para que los puntos R(2, 7), S(5, -1) y Q(a, -25) estén alineados.

Si están alineados $\vec{RS}$ y $\vec{SQ}$ han de tener la misma dirección, es decir las componentes proporcionales:

$$\begin{cases} \vec{RS} = S - R = (5,-1) - (2,7) = (3,-8) \\ \vec{SQ} = Q - S = (a,-25) - (5,-1) = (a-5,-24) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{a-5} = \frac{-8}{-24} \Leftrightarrow -8a + 40 = -72 \Leftrightarrow a = \frac{40+72}{8} = 14$$

Para que R, S y Q estén alineados a = 14.

③ Dados los puntos A(0, 1), B(2, 5), P(x, y), averigua qué relación deben cumplir x e y para que P esté alineado con A y B.

$$\begin{cases} \vec{AB} = B - A = (2,5) - (0,1) = (2,4) \\ \vec{BP} = P - B = (x,y) - (2,5) = (x-2, y-5) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{4}{y-5} \Leftrightarrow 2y - 10 = 4x - 8 \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

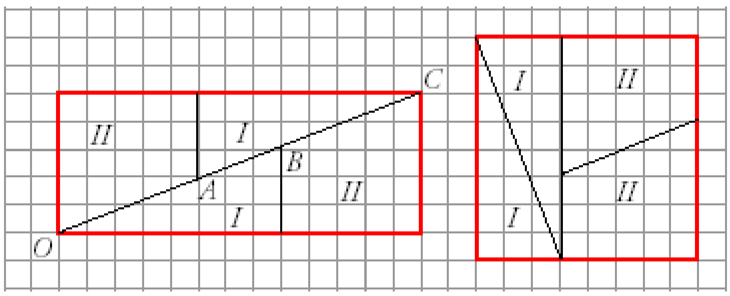
Para que A, B y P estén alineados se debe cumplir que y = 2x +1, por ejemplo, si x = 1, y =3, si x = 0, y = 1, etc.

④ Averigua el valor de t para que A(1, 2), B(7, -11) y C(t, 2t) estén alineados.

$$\begin{cases} \vec{AB} = B - A = (1,2) - (7,-11) = (-6,13) \\ \vec{BC} = C - B = (t,2t) - (7,-11) = (t-7, 2t+11) \end{cases} \Rightarrow \frac{-6}{t-7} = \frac{13}{2t+11} \Leftrightarrow -12t - 66 = 13t - 91 \Leftrightarrow 25t = -25$$

luego $t = \frac{-25}{25} = -1$

⑤ En la figura de la derecha ¿cómo es posible que el rectángulo, que tiene 5 x 13 = 65 cuadritos, se pueda descomponer en los mismos cuatro fragmentos que el cuadrado, que tiene 8 x 8 = 64 cuadritos? El secreto está en que los puntos OABC no están alineados.



Compruébalo tomando O(0, 0), A(5, 2), B(8, 3), C(13, 5) y probando que el vector $\vec{OA}$ no es paralelo al vector $\vec{AB}$.

$$\begin{cases} \vec{OA} = A - O = (5,2) - (0,0) = (5,2) \\ \vec{AB} = B - A = (8,3) - (5,2) = (3,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{3} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{los puntos O, A y B no están alineados}$$

$$\begin{cases} \vec{OC} = C - O = (13,5) - (0,0) = (13,5) \\ \vec{AB} = B - A = (8,3) - (5,2) = (3,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{13}{3} \neq \frac{5}{1} \Rightarrow \text{los puntos O, A, B y C no están alineados}$$

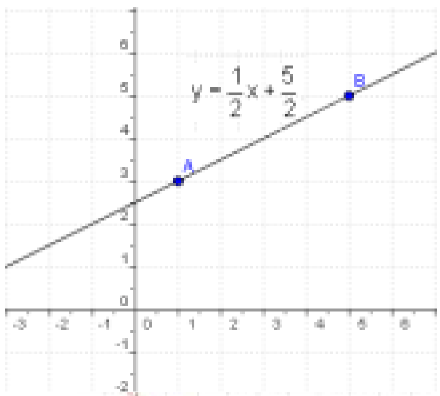
ACTIVIDADES (Página 196)

① Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) A(1, 3), B(5, 5) **b)** A(1, 6), B(8, -2)

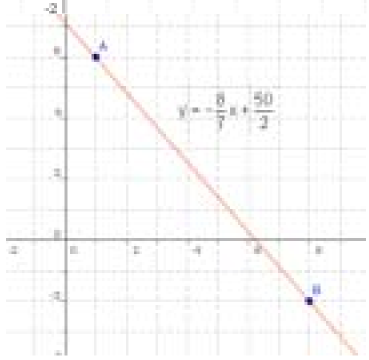
a)

- Hallamos el vector director $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (5,5) - (1,3) = (4,2)$ y la pendiente $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Escribimos la ecuación de la recta, tomando como punto uno de los dos, el A, por ejemplo: $r \equiv y = y_0 + m(x - x_0) \equiv y = 3 + \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

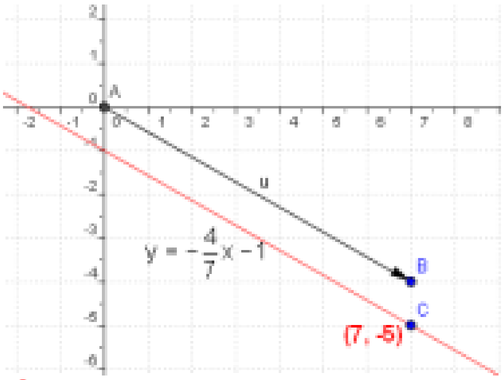


b)

- Hallamos el vector director $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (8,-2) - (1,6) = (7,-8)$ y la pendiente $m = \frac{-8}{7}$
- Escribimos la ecuación de la recta, tomando como punto uno de los dos, el A, por ejemplo: $r \equiv y = y_0 + m(x - x_0) \equiv y = 6 + \frac{-8}{7}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{8}{7}x + \frac{50}{2}$



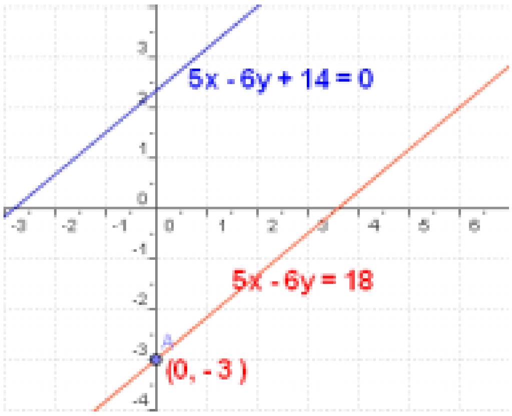
② Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, -5) y tiene por vector dirección (7, -4).



Si el vector de dirección es (7, -4), la pendiente de la recta $m = \frac{-4}{7}$ y la ecuación de la recta pedida:

$$r \equiv y = -5 - \frac{4}{7}(x-7) \equiv -\frac{4}{7}x - 1$$

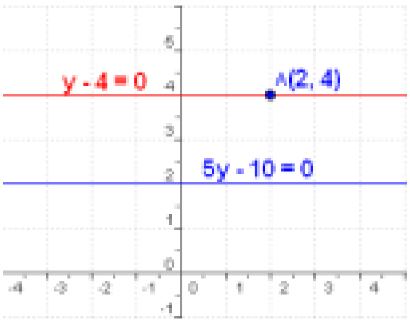
③ Halla la recta paralela a 5x - 6y + 14 = 0 que pasa por (0, -3).



La recta paralela a la dada tendrá de ecuación 5x – 6y + k = 0, en donde desconocemos el término independiente k, lo calculamos sustituyendo el punto por el que pasa, cumple la ecuación de la recta, y despejando k:

5 ·0 – 6·(-3) + k = 0; 18 + k = 0; k = -18, luego la ecuación de la recta pedida es 5x – 6y – 18 = 0

④,Halla la recta paralela a 5y - 10 = 0 que pasa por (2, 4).

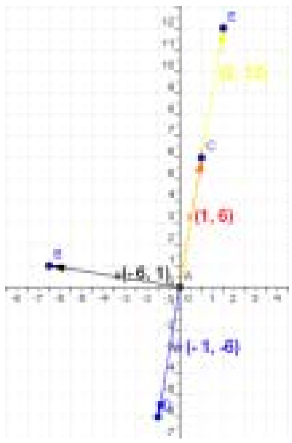


La recta paralela a la dada tendrá de ecuación 5y + k = 0, en donde desconocemos el término independiente k, lo calculamos sustituyendo el punto por el que pasa (2, 4), cumple la ecuación de la recta, y despejando k:

5 ·4 + k = 0; 20 + k = 0; k = -20, luego la ecuación de la recta pedida es 5y – 20 = 0, o su equivalente y – 4 = 0

ACTIVIDADES (Página 197)

⑤ Da tres vectores perpendiculares a (-6, 1).



Un vector perpendicular a otro dado $\vec{u}(a,b)$ es de la forma (-kb, ka), o (kb, -ka) luego los vectores pedidos son:

$$\vec{v}_1 = (1, 6),\ \vec{v}_2 = (-1, -6)\ \text{ y }\ \vec{v}_3 = (2, 12)$$

⑥ Halla la ecuación de la recta que pasa por P (2, -5) y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

Si el vector perpendicular es (5, 7), un vector director es (7, -5) y la pendiente de la recta buscada $m = -\frac{5}{7}$ y la ecuación de la recta $y = -5 - \frac{5}{7}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}x - \frac{25}{7}$

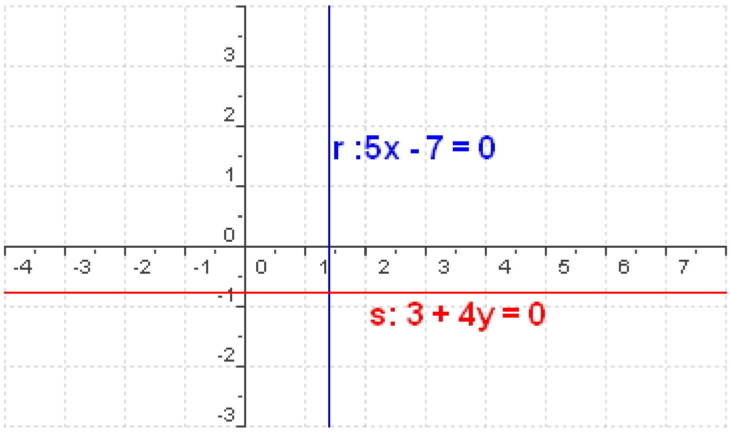
⑦ La recta r pasa por (3, 0) y la recta s, por (-5, 3). Ambas son perpendiculares a 4x + 2y - 7 = 0. Halla sus ecuaciones.

De la recta 4x + 2y – 7 = 0 $\Rightarrow y = \frac{7-4x}{2} = -2x + \frac{7}{2}$, luego la pendiente es m = - 2 y la pendiente de cualquier recta perpendicular será: $m_1 = \frac{1}{2}$ y por lo tanto las ecuaciones de las rectas pedidas será:

$$r \equiv y = 0 + \frac{1}{2}(x-3) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad s \equiv y = 3 + \frac{1}{2}(x+5) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{5}$$

ACTIVIDADES (Página 198)

① Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a ellas: r:5x-7=0 s:3+4y=0



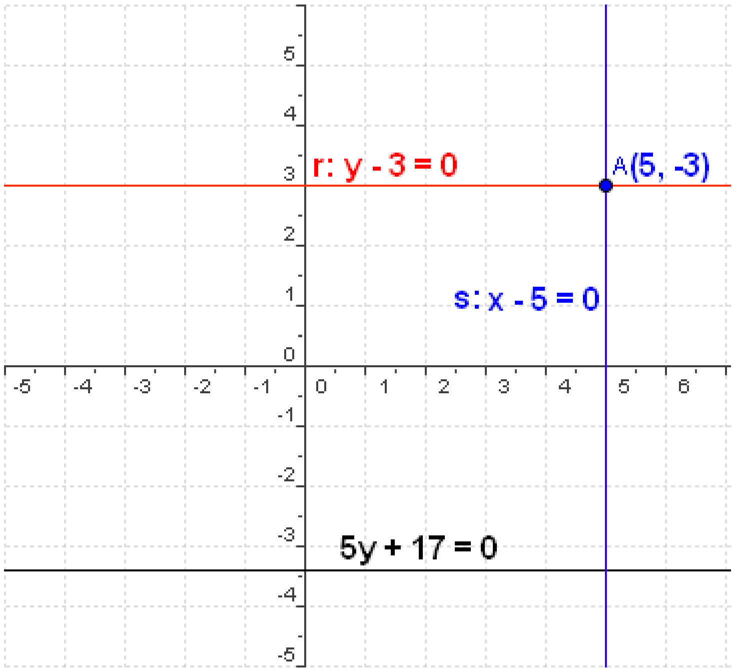
❍ Como r : 5x – 7 = 0, es vertical, vectores paralelos son $\vec{u}_1(0,1), \vec{u}_2(0,2)$ y $\vec{u}_3(0,-1)$ y vectores perpendiculares $\vec{v}_1(1,0), \vec{v}_2(2,0)$ y $\vec{v}_3(-1,0)$.

❍ Como s : 3 + 4y = 0, es horizontal, vectores paralelos son $\vec{s}_1(1,0), \vec{s}_2(2,0)$ y $\vec{s}_3(-1,0)$ y vectores perpendiculares $\vec{w}_1(0,1), \vec{w}_2(0,2)$ y $\vec{w}_3(0,-1)$.

② Las rectas r y s pasan por el punto (5, -3). r es paralela a 5y + 17 = 0, y s es perpendicular a ella. Representa r y s y da sus ecuaciones.

La recta paralela tendrá de ecuación 5y + k = 0, que como pasa por (5, - 3) cumplirá –15 + k = 0, luego k = - 15, y la ecuación 5y – 15 = 0, es decir y – 3 = 0.

La recta perpendicular será vertical y pasa por el punto (5, -3), su ecuación es x = 5, o x – 5 = 0.



ACTIVIDADES (Página 199)

① s: 4x - 6y - 2 = 0, P(5, 2). Halla las ecuaciones de r_1 y r_2 sabiendo que:
r_1 pasa por P y es paralela a s.
r_2 pasa por P y es perpendicular a s.

❑ La recta r_1, al ser paralela a s, tiene la ecuación 4x – 6y + k = 0. Hallamos k sustituyendo las coordenadas del punto P(5, 2), 4 ·5 – 6 ·2 + k = 0, 20 – 12 + k = 0, k = -8, la ecuación es pues r_1: 4x – 6y – 8 = 0, o simplificando r_1: 2x – 3y – 4 = 0.

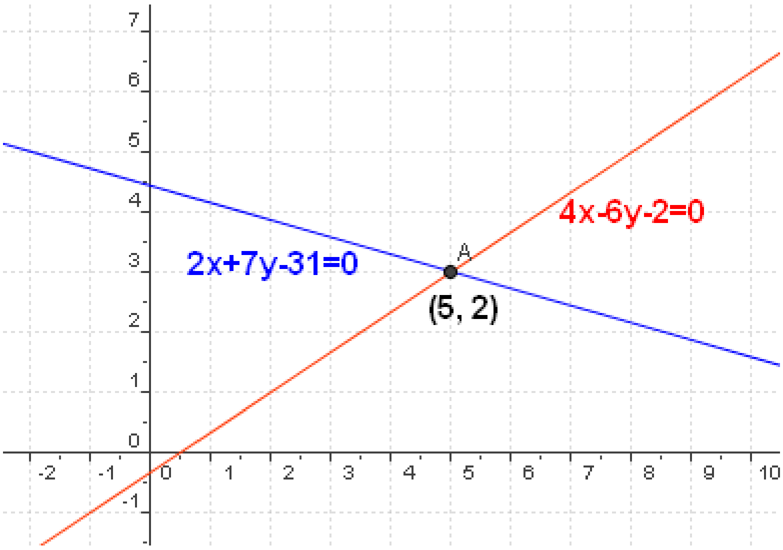
❑ La recta r_2, al ser perpendicular a s, tiene la ecuación 6x + 4y + k = 0. Hallamos k sustituyendo las coordenadas del punto P(5, 2), 6 ·5 + 4 ·2 + k = 0, 30 + 8 + k = 0, k = -38, la ecuación es pues r_2: 6x + 4y – 38 = 0, o simplificando r_2: 3x + 2y – 19 = 0.

② Halla el punto donde se cortan las rectas r y s, y represéntalas:

r: $4x - 6y - 2 = 0$
s: $2x + 7y - 31 = 0$

Para hallar el punto de corte, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x-6y-2=0 \xrightarrow{:-2} \\ 2x+7y-31=0 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} -2x+3y+1=0 \\ 2x+7y-31=0 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 10y-30=0 \end{cases} \quad y=\frac{30}{10}=3 \Rightarrow 2x+21-31=0 \Leftrightarrow x=5$$



ACTIVIDADES (Página 200)

① Calcula, en cada caso, la distancia entre A y B:

a) A(-3, 15), B(2, 3) **b)** A(7, 4), B(11, 7)
c) A(-2, 13), B(10, 1) **d)** A(-2, 15), B(10, -20)

a) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+3)^2 + (3-15)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

b) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(11-7)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

c) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10+2)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288}$

d) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10+2)^2 + (-20-15)^2} = \sqrt{144+1225} = \sqrt{1369} = 37$

② Halla las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices son A(3, -6),B(11, 9) y C(11, 0).

$AB = d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(11-3)^2 + (9+6)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{274} = 17$.

$BC = d(B, C) = |\vec{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(11-11)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{0+81} = \sqrt{81} = 9$.

$AC = d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(11-3)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

③ Calcula y para que la distancia de A(7, y) a B(-5, 1) sea igual a 13.

$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5-7)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{12^2 + (1-y)^2} = 13$, si elevamos al cuadrado ambos miembros: $12^2 + (1-y)^2 = 13^2$; $(1-y)^2 = 169 - 144 = 25$; $1 - y = 5$, es decir $y = -4$ y la otra solución $1 - y = -5$con lo que $y = 6$.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

PRACTICA

▶ Vectores y puntos

① Dados los puntos A(-2, 0), B(0, 4), C(5, 2) y D(3, -4) halla las condenadas de los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{AC}$ y $\vec{BD}$.

$\vec{AB} = B - A = (0, 4) - (-2, 0) = (2, 4)$

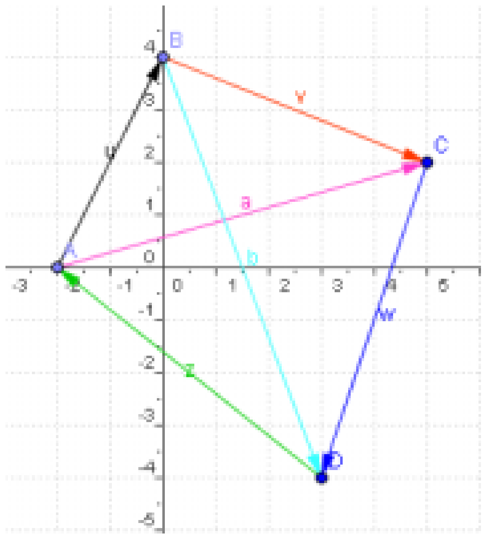
$\vec{BC} = C - B = (5, 2) - (0, 4) = (5, -2)$.

$\vec{CD} = D - C = (3, -4) - (5, 2) = (-2, -6)$.

$\vec{DA} = A - D = (-2, 0) - (5, 2) = (-7, -2)$.

$\vec{AC} = C - A = (5, 2) - (-2, 0) = (7, 2)$

$\vec{BD} = D - B = (3, -4) - (0, 4) = (3, -8)$.

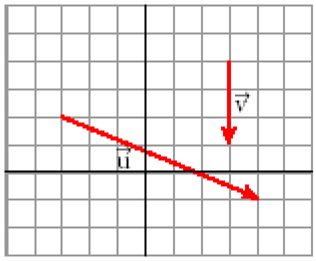


② Las coordenadas del vector AB son (-3, 2). ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son (3, -3)?

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Leftrightarrow (-3, 2) = (x, y) + (3, -3) \Rightarrow \begin{cases} -3 = x + 3 \Leftrightarrow x = -6 \\ 2 = y - 3 \Leftrightarrow y = 5 \end{cases} \text{ luego } B(-6, 5)$$

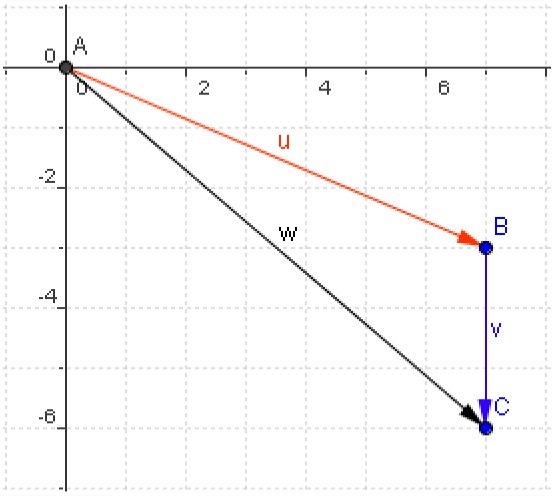
③ a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$? ,

b) Dibuja el vector $\vec{u} + \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.



a) Las coordenadas (componentes) de un vector son las longitudes recorridas desde el punto origen al extremo en horizontal y vertical, como para llegar desde el punto origen al extremos del vector hemos de recorrer 7 hacia la derecha y 3 hacia abajo las componentes de $\vec{u}$ son(7, -3) y las de $\vec{v}$ (0, -3) .

b) $\vec{u} + \vec{v} = (7,-3) + (0,-3) = (7,-6)$

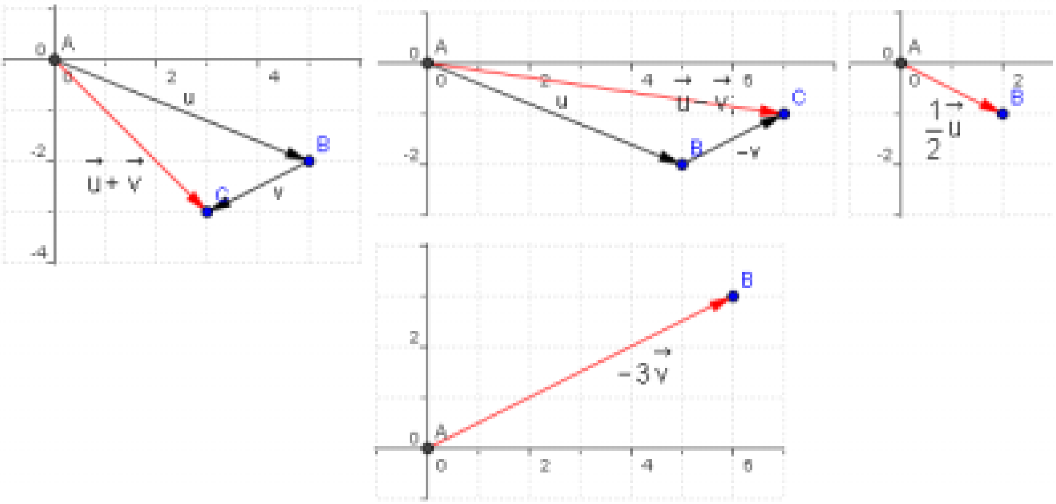


④ Dados los vectores $\vec{u}$ (4, -2) y $\vec{v}$ (-2, -1):

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$?

a)



$\vec{u}+\vec{v}=(4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$, $\vec{u}-\vec{v}=(4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$, $\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}(4,-2)=(2,-1)$

$-3\vec{v}=-3(-2,-1)=(6,3)$

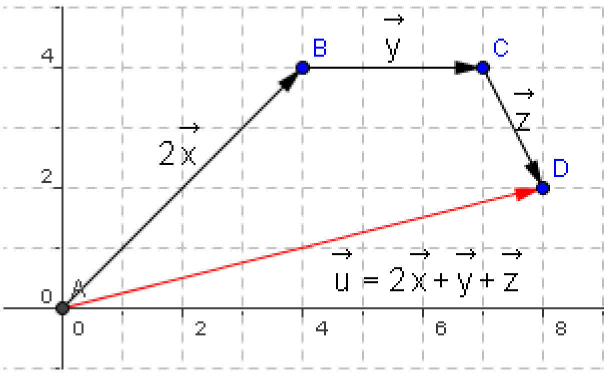
b) $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}=2(4,-2)+3(-2,-1)=(2,-7)$.

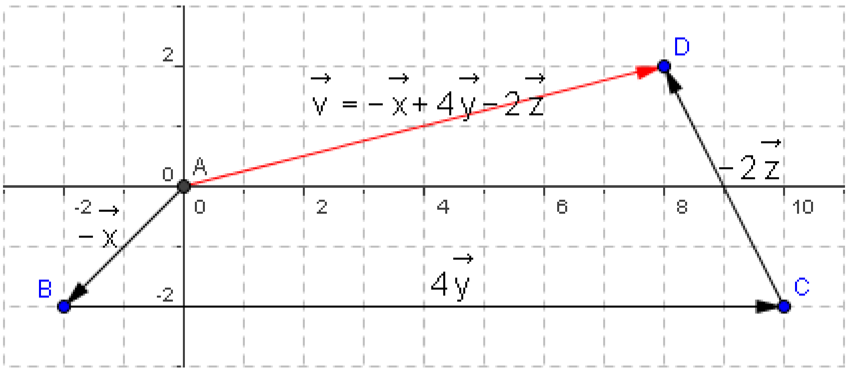
5

a) Representa los vectores $\vec{u}=2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ y $\vec{v}=-\vec{x}+4\vec{y}-2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1,- 2)$.

b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y comprueba si son iguales.

a) $\vec{u}=2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=2(2, 2) + (3, 0) + (1, -2) = (4, 4) + (3, 0) + (1, -2) = (8, 2)$.





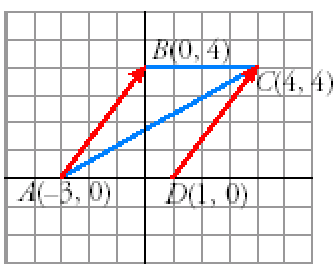
$\vec{v}=-\vec{x}+4\vec{y}-2\vec{z}=$ -(2, 2) + 4(3, 0) – 2(1, -2) = (-2, -2) + (12, 0) + (-2, 4) = (8, 2).

b) Luego $\vec{u}=(8,2)=\vec{v}$

6

a) Halla los puntos medios de los segmentos AC y BD.

b) Halla las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ y comprueba que son iguales.



a) $AC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$

$BD \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, es el mismo punto pues es el punto en donde se cortan las diagonales del cuadrilátero ABCD y punto medio.

b) $\vec{AB} = B - A$ = (0, 4) – (-3, 0) = (3, 4). $\vec{DC} = C - D$ = (4, 4) – (1, 0) = (3, 4).

7 El punto medio de un segmento es M(0, -3) y uno de sus extremos es (7, 2). ¿Cuál es el otro extremo?

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{7+x}{2} \Leftrightarrow 0 = 7 + x \Leftrightarrow x = -7 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow -3 = \dfrac{2+y}{2} \Leftrightarrow -6 = 2 + y \Leftrightarrow y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow B(-7, -8)$$

8 Halla, en cada caso, el punto simétrico de A(-3, -5) respecto de:

a) P(-2, 0) **b)** Q(2, -3) **c)** O(0, 0)

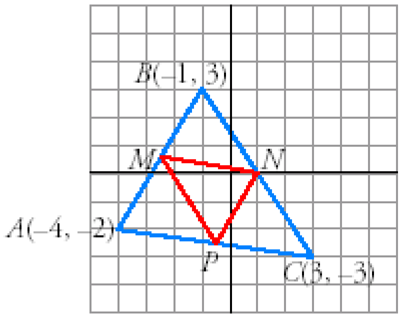
a) $\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -2 = \dfrac{-3+x}{2} \Leftrightarrow -4 = -3 + x \Leftrightarrow x = -1 \\ y_P = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-5+y}{2} \Leftrightarrow 0 = -5 + y \Leftrightarrow y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A'(-1, 5)$

b) $\begin{cases} x_Q = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{-3+x}{2} \Leftrightarrow 4 = -3 + x \Leftrightarrow x = 7 \\ y_Q = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow -3 = \dfrac{-5+y}{2} \Leftrightarrow -6 = -5 + y \Leftrightarrow y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow A'(7, -1)$

c) $\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-3+x}{2} \Leftrightarrow 0 = -3 + x \Leftrightarrow x = 3 \\ y_O = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-5+y}{2} \Leftrightarrow 0 = -5 + y \Leftrightarrow y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A'(3, 5)$

9

a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC



b) Halla las coordenadas de los vectores $\vec{MN}$, $\vec{MP}$ y $\vec{PN}$ y comprueba prueba que :

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{AC};\ \vec{MP}=\frac{1}{2}\vec{BC}\text{ y }\vec{PN}=\frac{1}{2}\vec{AB}$$

a)
$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4+(-1)}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x_N=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ y_N=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{3+(-3)}{2}=0\end{cases}\Rightarrow N(1,0)$$

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{-4+3}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ y_P=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{-2+(-3)}{2}=-\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

b)

$$\vec{MN}=N-M=(1,0)-\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}(C-A)=\frac{1}{2}((3,-3)-(-4,-2))=\frac{1}{2}(7,-1)=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{MP}=P-M=\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=(2,-3)=\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{1}{2}(C-B)=\frac{1}{2}((3,-3)-(-1,3))=\frac{1}{2}(4,-6)=(2,-3)$$

$$\vec{PN}=N-P=(1,0)-\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{AB}=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}((-1,3)-(-4,-2))=\frac{1}{2}(3,5)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

10 Averigua el valor de k para que se cumpla: $\left(\frac{6}{5},-2\right)=k(-3,5)$

$$\left(\frac{6}{5},-2\right)=k(-3,5)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{5}=-3k\Leftrightarrow k=-\dfrac{2}{5} \\ -2=5k\Leftrightarrow k=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

11 Dados los vectores $\vec{u}(3,\ 2)$, $\vec{v}(x,\ 5)$ y' $\vec{w}(8,Y)$, calcula x e y para que se verifique:

$$2\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$$

$$2\vec{u}-\vec{v}=\vec{w} \Leftrightarrow 2(3,2)-(x,5)=(8,y) \Leftrightarrow (6-x,-1)=(8,y) \Rightarrow \begin{cases} 6-x=8 \Leftrightarrow x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

12 Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:

a) A(-1, 3), B$\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, C(-4, -2)

b) A(1, 0), B(-3, -2), C(5, 2)

Para que A, B y C estén alineados $\vec{AB}=k\vec{AC}$

a) $\begin{cases} \vec{AB}=B-A=\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)-(-1,3)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right) \\ \vec{AC}=C-A=(-4,-2)-(-1,3)=(-3,-5) \end{cases} \rightarrow \vec{AC}=(-3,-5)=2\vec{AB}=2\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ Sí están alineados.

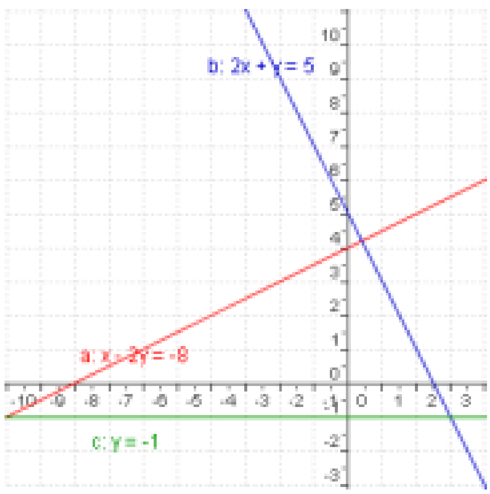
b) $\begin{cases} \vec{AB}=B-A=(-3,-2)-(1,0)=(-4,-2) \\ \vec{AC}=C-A=(5,2)-(1,0)=(4,2) \end{cases} \rightarrow \frac{-4}{4}=-\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow$ A, B y C están alineados.

13 Calcula m para que los puntos R(5, -2), S(-1, 1) y T(2, m) estén alineados.

Para que los tres puntos estén alineados, las componentes de los vectores $\vec{RS}$ y $\vec{RT}$ han de ser proporcionales:

$$\begin{cases} \vec{RS}=S-R=(-1,1)-(5,-2)=(-6,3) \\ \vec{RT}=T-R=(2,m)-(5,-2)=(-3,m+2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-6}{-3}=\frac{3}{m+2} \Leftrightarrow 2m+4=3 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

Rectas



14 Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por (-4, 2) y su pendiente es $1/2$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es -2.

c) Pasa por (5, -1) y su pendiente es 0.16

Utilizamos la ecuación de la recta en forma punto(x_0, y_0)-pendiente(m):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

a) $y - 2 = (1/2)(x + 4)$; $2y - 4 = x + 4$; $y = \frac{1}{2}x + 4$, $x - 2y + 8 = 0$.

b) $y - 3 = -2(x - 1)$; $y - 3 = -2x + 2$; $y = -2x + 5$; $2x + y - 5 = 0$.

c) $y + 1 = 0(x - 1)$; $y + 1 = 0$; $y = -1$; $y + 1 = 0$.

15 Da un vector dirección y la pendiente de la recta que pasa por A y B en los siguientes casos:

a) A(-1, 0) B(0, 3)
b) A(0, -2) B(5, -2)
c) A(-2, 3) B(4, -1)

Un vector director de la recta que pasa por dos puntos A y B es $\vec{v} = k\vec{AB}$.

a) $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (0,3) - (-1,0) = (1,3)$, cualquier vector de la forma(k, 3k), con k = nº real, será un vector director de la recta que pasa por A y B y por supuesto el (1, 3) que se obtiene para k = 1.

b) $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (5, -2) - (0, -2) = (5, 0)$, recta horizontal.

c) $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (4, -1) - (-2, 3) = (6, -4)$.

16 Halla la ecuación de cada una de las rectas del ejercicio anterior. Escríbela en forma general.

Dado un vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$ y un punto $A(x_A, y_A)$, hallamos la ecuación de la recta mediante la ecuación "punto-pendiente": $y = y_A + m(x - x_A)$, en donde la pendiente $m = v_2/v_1$

a) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = 0 + \frac{3}{1}(x+1) = 3x + 3 \Leftrightarrow 3x - y + 3 = 0$

b) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = -2 + \frac{0}{5}x = -2 + 0 \cdot x = -2 \Leftrightarrow y + 2 = 0$

c) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = 3 + \frac{-4}{6}(x+2) = 3 - \frac{2}{3}(x+2) \Leftrightarrow 2x + 3y - 5 = 0$

17 Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por (1, 3) y tiene por vector dirección $\vec{d}(2, -1)$.

b) Pasa por (-2, 1) y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, -3)$.

c) Pasa por (3, -2) y tiene por vector dirección $\vec{d}(2, 0)$.

Usamos el mismo procedimiento del ejercicio anterior y que se nos da un punto y un vector director:

a) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = 3 + \frac{-1}{2}(x-1) = 3 - \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

b) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = 1 + \frac{-3}{-1}(x+2) = 1 + 3(x+2) = 3x + 7 \Leftrightarrow 3x - y + 7 = 0$

c) $y = y_A + \frac{v_2}{v_1}(x - x_A) \Rightarrow y = -2 + \frac{0}{2}(x-3) = -2 + 0(x-3) = -2 \Leftrightarrow y + 2 = 0$

18 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a y = -2x + 3 y pasa por (4, 5).
b) Paralela a 2x - 4y + 3 = 0 y pasa por (4, 0).
c) Paralela a 3x + 2y - 6 = 0 y pasa por (0, -3).

Si una recta es paralela a otro dada r: AX + By + C = 0, su ecuación será de la forma Ax + By + K = 0, ya que al ser paralelas tienen el mismo vector director (misma pendiente = mismo ángulo con el eje horizontal).

a) y = - 2x + k; si sustituimos el punto (4, 5), podemos hallar k: 5 = -2·4 + k; k = 13 y la recta pedida es y = - 2x + 13, o sea 2x + y – 13 = 0.

b) 2x – 4y + k = 0; si sustituimos el punto (4, 0), podemos hallar k: 2·4 – 4·0+ k= 0; k = -8 y la recta pedida es 2x - 4y – 8 = 0, y dividiendo por 2 la ecuación queda x – 2y – 4 =0.

c) 3x +2y + k = 0; si sustituimos el punto (0, -3), podemos hallar k: 3·0 + 2·(-3)+ k= 0; k = 6 y la recta pedida es 3x +2y + 6 = 0.

19 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al vector v, en los siguientes casos:

a) P(-7, 2) $\vec{v}(2, 1)$

b) P(4, -3) $\vec{v}(-5, 4)$

c) P(5, 1) $\vec{v}(-l,-3)$

Si el vector perpendicular a una recta es $\vec{v}(v_1, v_2)$, el vector director será (- v_2, v_1) y por tanto la ecuación de la recta pedida será de la forma v_1x + v_2y + k = 0, en donde, para hallar el valor de k sustituimos el punto por el que pasa.

a) 2x + y + k = 0; 2·(-7) + 2 + k = 0; k = 12, luego la ecuación es 2x + y + 12 = 0.

b) -5x + 4y + k = 0; -5·4 + 4·(-3) + k = 0; k = 32, luego la ecuación es -5x + 4y + 32 = 0

c) -x - 3y + k = 0; -5 - 3 + k = 0; k = 8, luego la ecuación es -x -3y + 8 = 0

20 Calcula la pendiente y un vector dirección de una recta perpendicular a la que pasa por A(3, 1) y B(-5, -1).

Si pasa por A y B, un vector director será $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (-5, -1) - (3, 1) = (-8, -2) \equiv (4, 1)$ y la pendiente m = $\frac{1}{4}$, luego de su perpendicular, el vector director será $\vec{w}(-1, 4)$ y su pendiente m' = -4.

21 Escribe la ecuación de la recta que pasa por (-3, 0) y es perpendicular a 3x -y + 6 = 0.

Si es perpendicular a 3x – y + 6 = 0, su ecuación será x + 3y + k = 0 y, como sabemos que pasa por (-,3 0), sustituyendo hallamos k:

- 3 + 3·0 + k = 0; - 3 + k = 0; k = 3, y la ecuación es x + 3y + 3 = 0

22 Dados los puntos A(-3, 2) y B(5, 0) halla las ecuaciones de las rectas siguientes:

r: pasa por A y es perpendicular a $\vec{AB}$.

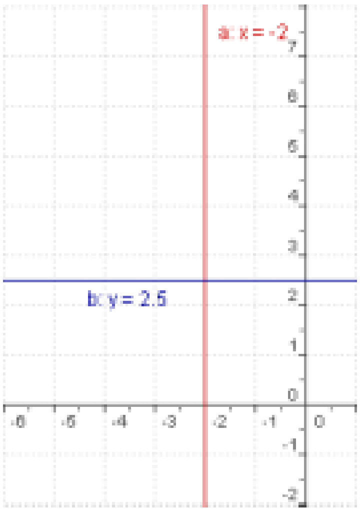
s: pasa por B y es perpendicular a $\vec{AB}$.

El vector $\vec{AB} = B - A = (5, 0) - (- 3, 2) = (8, 2) \equiv (4, -1)$ es perpendicular a las dos rectas, luego:

- r : 4x - y + k = 0; y sustituyendo A(-3, 2), 4·(-3) - 2 + k = 0, - 14 + k = 0; k = 14, y por tanto r: 4x - y +14 = 0.

- s : 4x - y + h = 0; y sustituyendo B(5, 0), 4·5 - 0 + h = 0, 20 + h = 0; h = -20, y por tanto s: 4x - y -20 = 0.

23 Representa las rectas 3x + 6 = 0 y 2y - 5 = 0 y halla su punto de intersección.



El punto de corte es el punto común entre amabas rectas, que se obtiene resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones de las rectas, en este caso concreto, es más sencillo pues cada recta sólo depende de una variable, la primera es vertical y la segunda horizontal, despejando tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{3} = -2 \\ 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$ el punto es (-2, 5/2)

24 Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por (4, -3) en los siguientes casos:

a) r: $2x+7=0$

b) s: $y+4=0$

a) r es vertical, luego su perpendicular será horizontal, de la forma $y + k = 0$, como tiene que pasar por (4, - 3), $-3 + k = 0$, $k = 3$, su ecuación es $y + 3 = 0$.

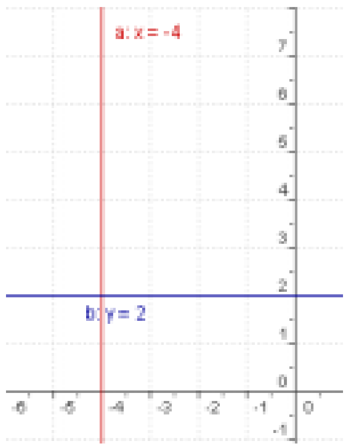
b) s es horizontal y su perpendicular vertical, de la forma $x + h = 0$, como ha de pasar por (4, -3), $4 + h = 0$, $h = - 4$, su ecuación será $x – 4 = 0$.

25 Las rectas r y s pasan por el punto (-4, 2); r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.

Como r es $\parallel$ a $3x – 12 = 0$, su ecuación será de la forma $x + k = 0$ y si pasa por (- 4, 2), $-4 + k = 0$, $k = 4$, luego r : $x + 4 = 0$.

Si s ha de ser $\perp$ a $3x – 12 = 0$, su ecuación será de la forma $y + h = 0$ y como pasa por (-4, 2), $2 + h = 0$, $h = -2$, luego s : $y – 2 = 0$.

Su representación gráfica es:



26 La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.

Como r es $\parallel$ a $5x – 4y + 3 = 0$, su ecuación será de la forma $5x – 4y + k = 0$ y si pasa por (1, 3), $5\cdot1-4\cdot3 + k = 0$, $k = 7$, luego r : $5x – 4y + 7 = 0$.

Si s ha de ser $\perp$ a$5x – 4y + 3 = 0$, su ecuación será de la forma $4x + 5y + h = 0$ y como pasa por (1, 3), $4\cdot1 + 5\cdot3 + h = 0$, $h = -19$, luego s : $4x + 5y -19 = 0$.

27 Determina el punto de corte de las rectas:
r: $5x+4y+3=0$
s: $-4x+2y-5=0$

El punto de corte será el que provenga de la solución del sistema formado por las dos ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{cases} 5x+4y+3=0 \\ -4x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+4y+3=0 \\ 8x-4y+10=0 \\ \hline 13x+13=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{13}{13}=-1 \Rightarrow y=\frac{-3-5x}{4}=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

El punto de corte es (-1, ½).

Distancias

28 Calcula la distancia entre P y Q:
a) P(3, 5), Q(3, -7)
b) P(-8, 3), Q(-6, 1)
c) P(0, -3), Q(-5, 1)
d) P(-3, 0), Q(15, 0)

a) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} = \sqrt{(3-3)^2+(-7-5)^2} = \sqrt{0+144} = 12$

b) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} = \sqrt{(-6+8)^2+(1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} = \sqrt{(-5-0)^2+(1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} = \sqrt{(15+3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

29
a) Halla el punto medio del segmento de extremos A(-2, 0), B(6, 4).
b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) Si llamamos al punto medio $M(x_M, y_M)$:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2+6}{2}=2 \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{0+4}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow M(2, 2)$$

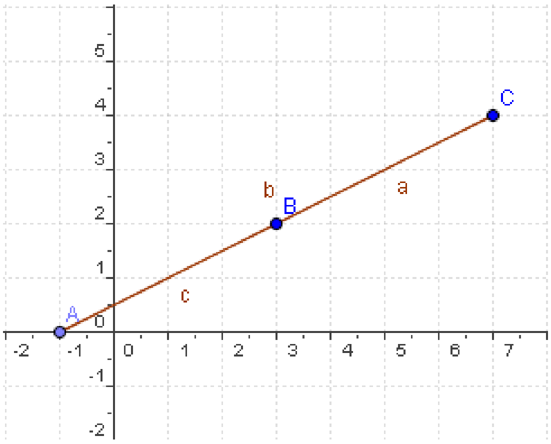
b) $d(A, M) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$d(B, M) = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2} = \sqrt{(2-6)^2+(2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

luego d(A, M) = d(B, M).

30 Comprueba que el triángulo de vértices A(-1, 0), B(3, 2), C(7, 4) es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

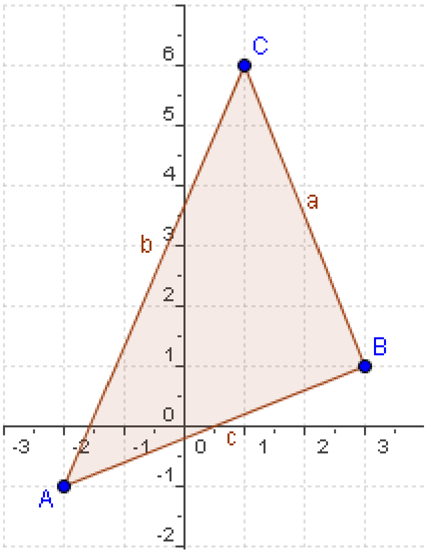
Si representamos los tres puntos tenemos la figura adjunta en la que da la impresión que los puntos A, B y C están alineados (no forman triángulo), pero ¿lo están?, lo comprobamos:



$$\begin{cases} \vec{AB} = B - A = (3,2) - (-1,0) = (4,2) \\ \vec{AC} = C - A = (7,4) - (-1,0) = (8,4) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \text{ luego}$$

efectivamente están alineados, no forman triángulo, pero si es cierto que AB = BC ya que AC = 2AB

31 Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices A(-2, -1), B(3, 1), C(l, 6) es rectángulo.



Hallamos las longitudes de los tres lados:

$c = d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(3+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$b = d(A,C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(1+2)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$a = d(C,B) = |\vec{CB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

Si es rectángulo ha de cumplir el teorema de Pitágoras:

$b^2 = a^2 + c^2$; $\left(\sqrt{58}\right)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{29}\right)^2 \Leftrightarrow 58 = 29 + 29$, luego sí es un triángulo rectángulo (e isósceles además ya que los dos catetos tienen la misma longitud, a = c).

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

PIENSA Y RESUELVE

32 Calcula m y n para que se verifique $\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v}$ siendo $\vec{x}(8, 2)$, $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(2, -4)$.

$$\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow (8,2) = m(-3,2) + n(2,-4) \Rightarrow \begin{cases} 8 = -3m + 2n \\ 2 = 2m - 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 = -6m + 4n \\ 2 = 2m - 4n \\ \hline 18 = -4m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \\ n = \frac{8+3m}{2} = -\frac{11}{4} \end{matrix}$$

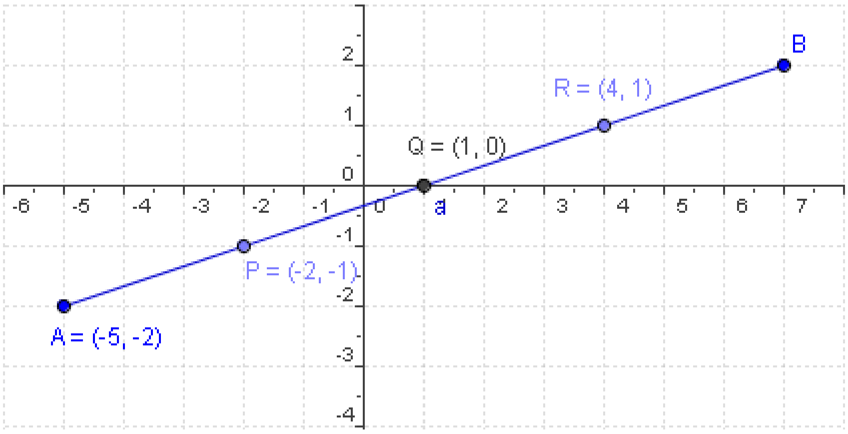
33 Determina los puntos que dividen al segmento de extremos A(-5, -2), B(7, 2) en cuatro partes iguales.

Para dividir el segmento AB en cuatro partes iguales hay que fijar tres puntos (P, Q, y R) que cumplan:

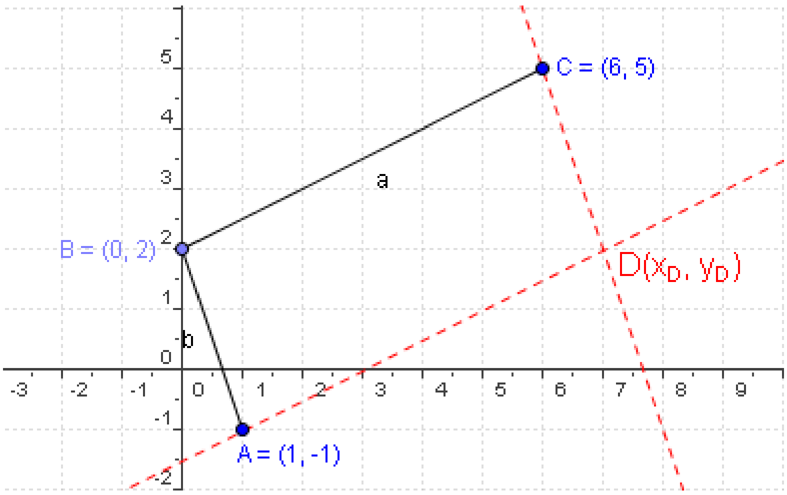
$$\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow P = A + \frac{1}{4}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{1}{4}(12,4) = (-5,-2) + (3,1) = (-2,-1)$$

$$\vec{AQ} = \frac{2}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow Q = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{1}{2}(12,4) = (-5,-2) + (6,2) = (1,0)$$

$$\vec{AR} = \frac{3}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow R = A + \frac{3}{4}\vec{AB} = (-5,-2) + \frac{3}{4}(12,4) = (-5,-2) + (9,3) = (4,1)$$



34 Halla las coordenadas del punto D, de modo que ABCD sea un paralelogramo, siendo A(1, -1), B(0, 2) y C(6, 5).



Si llamamos al punto buscado D(x_D, y_D), como ABCD ha de ser un paralelogramo, se cumplirá que los lados sean paralelos y por tanto sus vectores iguales dos a dos:

$\vec{AD} = \vec{BC}$ (fíjate en el orden Origen-Extremo)

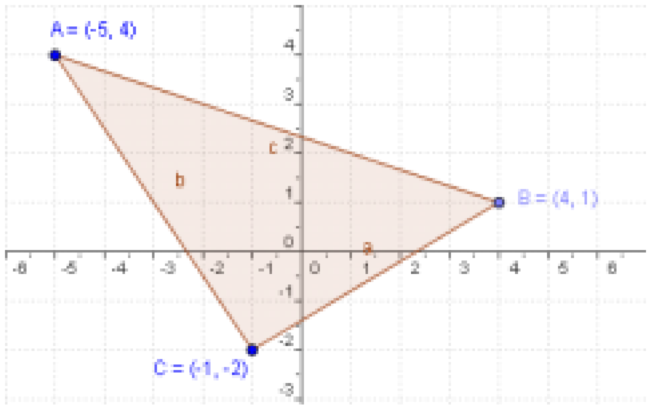
luego D – A = C – B, o sea

D = C – B + A, sustituyendo

(x_D, y_D) = (6, 5) – (0, 2) + (1, -1) = (7, 2)

35 Dado el triángulo de vértices A(-5, 4), B(4, 1), C(-1, -2) halla:

a) Las ecuaciones de los tres lados.
b) El punto medio del lado AC.
c) La ecuación de la mediana del vértice B.



a)

Ecuación del lado AB

El vector director es $\vec{AB} = B - A =$ (4, 1) – (-5, 4) = (9, -3), su pendiente m = -3/9 = -1/3 y un punto el A(-5, 4), luego su ecuación es :

$$y = 4 - \frac{1}{3}(x+5) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0$$

Ecuación del lado BC

El vector director es $\vec{BC} = C - B =$ (-1,-2) – (4, 1) = (-5, -3), su pendiente m = 3/5 y un punto el B(4, 1), luego su ecuación es :

$$y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5} \Leftrightarrow 3x - 5y - 7 = 0$$

Ecuación del lado CA

El vector director es $\vec{AC} = C - A =$ (-1,-2) – (-5, 4) = (4, -6), su pendiente m = -6/4=-3/2 y un punto el A(-5, 4), luego su ecuación es :

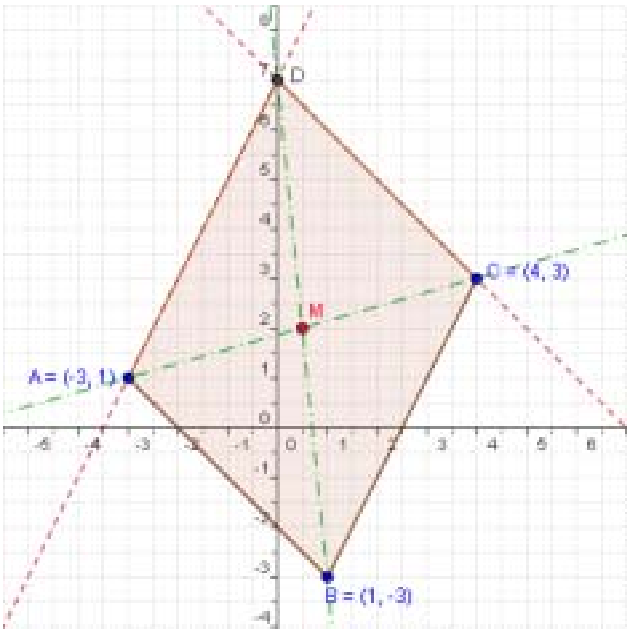
$$y = 4 - \frac{3}{2}(x+5) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

b) Punto medio de AC, M(x_M, y_M): $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$ M(-3, 1).

c) La mediana del vértice B pasa por B(4, 1) y el punto medio del lado opuesto AC, M(-3,1) que hemos hallado en el apartado anterior:

El vector director es $\vec{BM} = M - B =$ (3, 1) – (4, 1) = (-1, 0), su pendiente m = 0/(-1)= 0 (es horizontal y un punto el B(4, 1), luego su ecuación es y = 1; y – 1 = 0.

36 Los puntos A(-3, 1), B(1, -3) y C(4, 3) son tres vértices de un paralelogramo. Halla:



a) El vértice D opuesto a B.

b) El punto M donde se cortan las diagonales.

c) Comprueba que M es el punto medio de las dos diagonales.

a) Para que ADCB sea un paralelogramo ha de ser $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, es decir A – B = D – C, de donde despejando D = A – B + C = (-3, 1) – (1, -3) + (4, 3) = (0, 7).

b) Hallamos las ecuaciones de las dos diagonales:

Diagonal AC

El vector director es $\overrightarrow{AC} = C - A =$ (4, 3) – (-3, 1) = (7, 2), su pendiente m = 2/7 y un punto el A(-3, 1), luego su ecuación es :

$$y = 1 + \frac{2}{7}(x+3) = \frac{2}{7}x + \frac{13}{7} \Leftrightarrow 2x - 7y + 13 = 0$$

Diagonal BD

El vector director es $\overrightarrow{BD} = D - B =$ (0, 7) – (1, -3) = (-1, 10), su pendiente m = -10 y un punto el D(0, 7), luego su ecuación es :

$$y = 7 - 10x \Leftrightarrow 10x + y - 7 = 0$$

Si resolvemos el sistema tenemos el punto de corte de ambas diagonales:

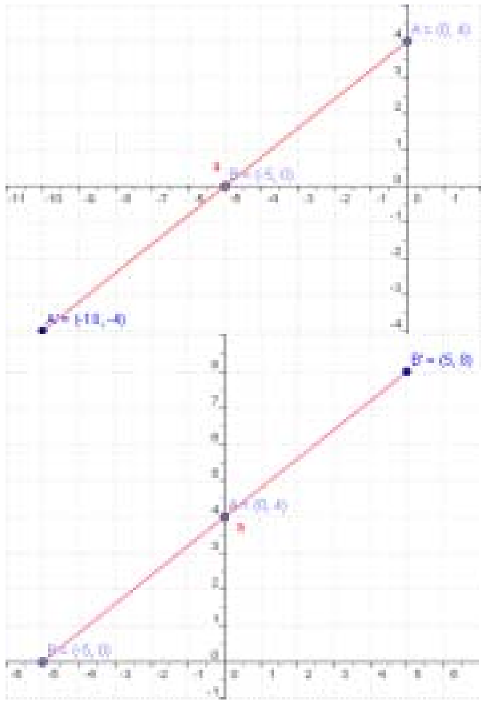
$$\begin{cases} 2x - 7y + 13 = 0 \longrightarrow 2x - 7y + 13 = 0 \\ 10x + y - 7 = 0 \xrightarrow{7} 70x + 7y - 49 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 72x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{36}{72} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 7 - 10x = 7 - 5 = 2$$

El punto M es (1/2, 2).

c) El punto M(x_M, y_M) ha de ser punto medio de AC o de BD:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

37 Dados los puntos A(0, 4) y B(-5, 0), halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.



Si llamamos al punto simétrico de A(x_A, y_A) respecto de B(x_B, y_B), A'(x, y), se debe cumplir que B sea el punto medio del segmento AA' :

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x}{2} \Leftrightarrow x = 2x_B - x_A = 2\cdot(-5) - 0 = -10 \\ y_B = \dfrac{y_A + y}{2} \Leftrightarrow y = 2y_B - y_A = 2\cdot 0 - 4 = -4 \end{cases} \Rightarrow A'(-10,-4)$$

Si llamamos al punto simétrico de B(x_B, y_B) respecto de A(x_A, y_A), B'(x, y), se debe cumplir que A sea el punto medio del segmento BB' :

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_B + x}{2} \Leftrightarrow x = 2x_A - x_B = 2\cdot 0 - (-5) = 5 \\ y_A = \dfrac{y_B + y}{2} \Leftrightarrow y = 2y_A - y_B = 2\cdot 4 - 0 = 8 \end{cases} \Rightarrow B'(5,8)$$

38 Dados los puntos A(-1, 1) y B(3, 4), halla:

a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB.

b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela aleje X.

c) El punto de corte de r y s.

a) Si ha de ser perpendicular a AB(4, 3), su vector director $\vec{v}$ es el (-3, 4) y su pendiente m = -4/3, como pasa por A(-1, 1) la ecuación de la recta r será:

$$y = 1 - \frac{4}{3}(x+1) = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x + 3y + 1 = 0$$

b) Si ha de ser paralela al eje X (horizontal) su ecuación será de la forma y = k (pendiente m = 0) y como tiene que pasar por el B(3, 4), será y = 4 o sea y - 4 = 0.

c) El punto de corte es el punto común a ambas rectas es decir que cumple las dos ecuaciones a la vez y por tanto es la solución del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} r \equiv 4x + 3y + 1 = 0 \xrightarrow{2)} x = \dfrac{-1-3y}{4} = \dfrac{-1-3\cdot 4}{4} = -\dfrac{13}{4} \Rightarrow \\ s \equiv y - 4 = 0 \xrightarrow{1)} y = 4 \end{cases}$$

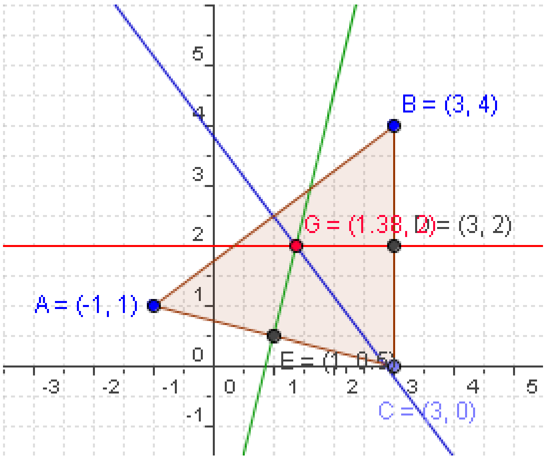
Punto de corte (-13/4, 4).

46 En el triángulo de vértices A(-1, 1), B(3, 4), y C(3, 0), halla:

a) La ecuación de la mediatriz de BC

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).



Mediatriz de un segmento: Recta perpendicular en el punto medio del segmento. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos. Las de un triángulo se cortan en el circuncentro (G).

a) La mediatriz de BC que llamaremos m_1 será una recta que pasa por el punto medio de BC (que llamamos D) y es perpendicular a BC:

❍ **Vector director**: el perpendicular a $\overrightarrow{BC} = C - B = (3,0)$ – (3, 4) = (0, - 4), cuyas componentes son (4, 0) es decir es una recta horizontal.

❍ **Pasa** por el punto medio de BC (que llamamos D): $\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3 \\ y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow D(3, 2).$

La ecuación de m_1 es y = 2 + 0·(x-3)= 2; es decir y – 2 = 0.

b) La mediatriz de AC que llamaremos m_2 será una recta que pasa por el punto medio de AC (que llamamos E) y es perpendicular a AC:

❍ **Vector director**: el perpendicular a $\overrightarrow{AC} = C - A = (3,0)$ – (-1, 1) = (4, - 1), cuyas componentes son (1, 4), por tanto su pendiente m = 4.

❍ **Pasa** por el punto medio de AC (que llamamos E): $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow E(1, 1/2).$

La ecuación de m_2 es y = 1/2 + 4·(x - 1)= 4x – 7/2; es decir 8x - 2y – 7 = 0.

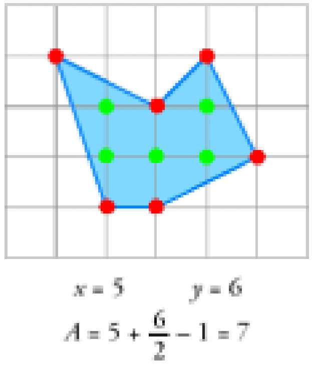
c) El circuncentro(G) es el punto solución de las dos mediatrices halladas (la tercera, que no hemos calculado también pasará por G):

$$\begin{cases} m_1 \equiv y = 2 \\ m_2 \equiv 8x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2; x = \frac{2y+7}{8} = \frac{2 \cdot 2 + 7}{8} = \frac{11}{8} \Rightarrow G\left(\frac{11}{8}, 2\right)$$

P R O B L E M A S   D E   E S T R A T E G I A

➀. ¿Sabías que...?

Hay una curiosa forma de calcular el área de un polígono cuyos vértices coinciden con los de una cuadrícula:

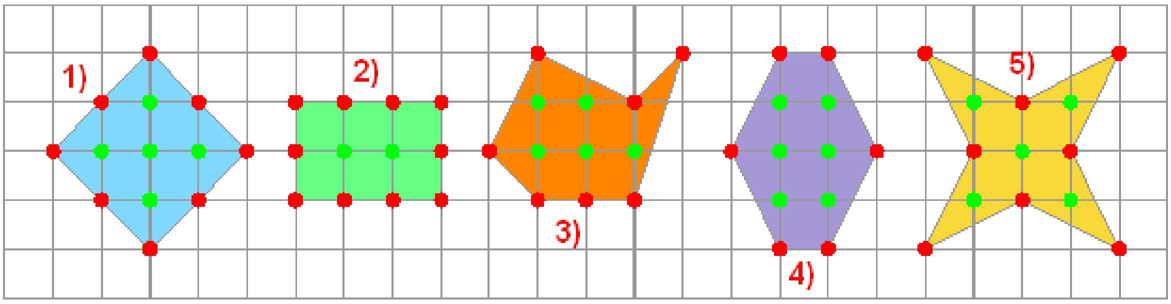


- ❑ Cuentas el número de puntos que hay dentro del polígono (x).
- ❑ Cuentas el número de puntos que hay sobre el borde (y).

Entonces, el área (A), medida en unidades de la cuadrícula, es:

$A = x + \frac{y}{2} - 1$ (teorema de Pick)

Comprueba la relación anterior con estos polígonos:



Polígono 1) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 8 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$

Polígono 2) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 2 \\ \text{Perímetro} = y = 10 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$

Polígono 3) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 7 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{7}{2} - 1 = 7{,}5$

Polígono 4) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 6 \\ \text{Perímetro} = y = 6 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$

Polígono 5) $\begin{cases} \text{Dentro} = x = 5 \\ \text{Perímetro} = y = 8 \end{cases}$ $A = x + \frac{y}{2} - 1 = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$