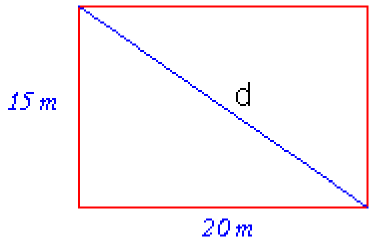
10 *En un jardín rectangular de 15 x 20 m de lado se traza un camino según una diagonal, ¿qué longitud tiene el camino?*



Usamos el teorema de Pitágoras:

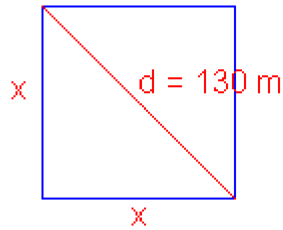
$$d^2 = 15^2 + 20^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25 \text{ m}.$$

11 *¿Cuánto mide el perímetro de una finca cuadrada cuya diagonal mide 130 m?*

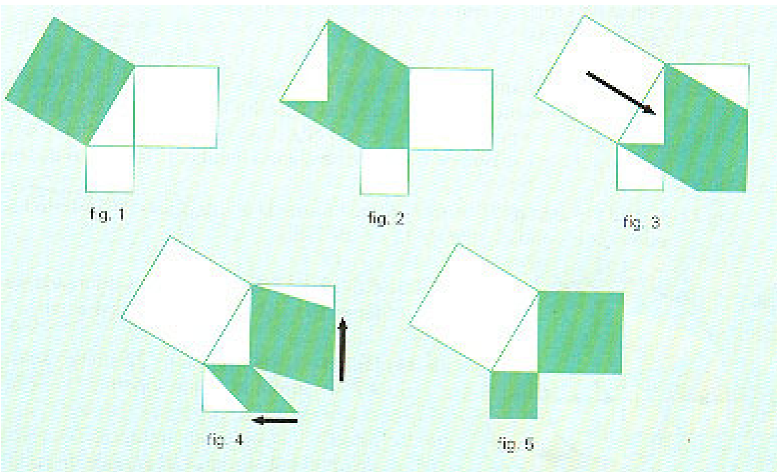
Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$x^2 + x^2 = d^2 \Leftrightarrow 2x^2 = d^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{130^2}{2}} = \sqrt{8450} = 91{,}9 \text{ m}$$

Luego, el perímetro es p = 4x = 4 · 91,9 = 367,6 m

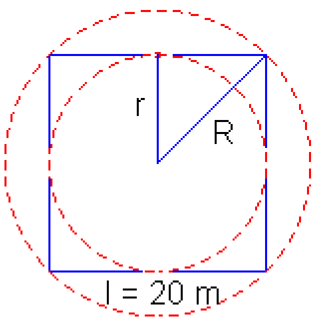


12 *Comenta la siguiente demostración dinámica del teorema de Pitágoras publicada en 1945 por el matemático americano Beravalle.*



La superficie del cuadrado sobre la hipotenusa, va cambiando de forma hasta adaptarse a las superficies de los cuadrados construidos sobre los catetos.

13 *El lado de un cuadrado mide 20 cm. Halla la superficie de la corona circular limitada por las circunferencias inscrita y circunscrita al mismo.*



El radio de la circunferencia circunscrita es

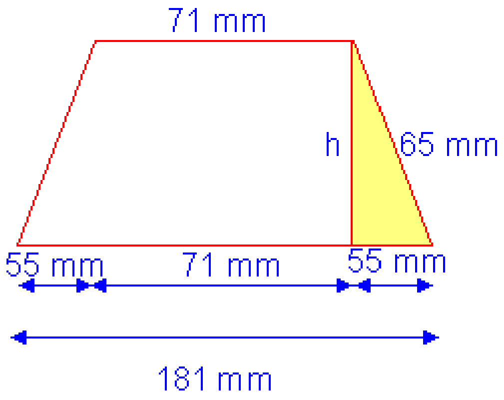
$$R = \sqrt{2\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ cm}$$

El radio de la circunferencia inscrita es r = l/2 = 10 cm.

El área de la corona circular es:

$$A = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi(\,200 - 100) = 100\pi\ c^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$$

14 *Las bases mayor y menor de un trapecio isósceles miden 181 y 71 mm respectivamente y cada uno de los lados iguales del trapecio 65 mm. Halla el área de este trapecio en cm².*



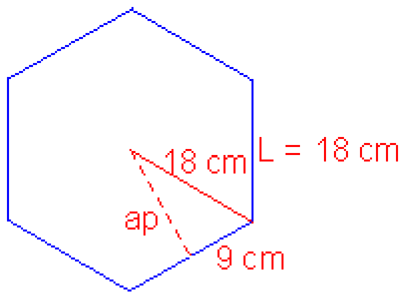
Como $A_{Trapecio} = \frac{B+b}{2}h$, necesitamos saber lo que mide la altura h, que hallamos aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{65^2 - 55^2} = \sqrt{1200} = 34{,}64 \text{ mm}$$

luego:

$$A = \frac{181+71}{2} \cdot 34{,}64 = 4364{,}64 \text{ mm}^2 = 43{,}6464 \text{ cm}^2$$

15 *Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado.*



Como el área de un polígono viene dada por:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

Perímetro = p = 6·L = 6 ·18 cm = 108 cm

$$ap = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 15{,}59 \text{ cm.}$$

$$A = \frac{108 \cdot 15{,}59}{2} = 841{,}78 \text{ cm}^2$$

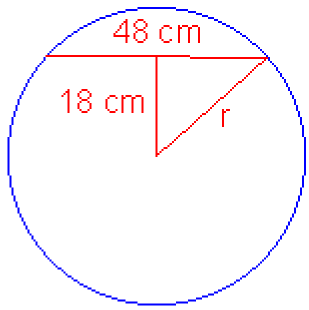
16 *En una circunferencia, una cuerda de 48 cm de longitud dista 18 cm del centro. Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo.*

Necesitamos conocer el radio (r), que hallamos con el teorema de Pitágoras:

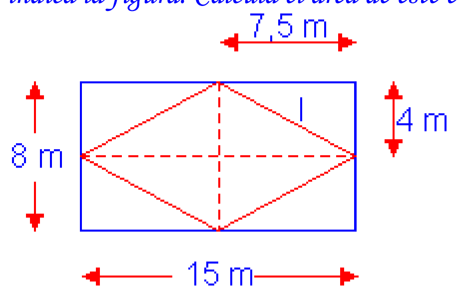
$$r = \sqrt{\left(\frac{48}{2}\right)^2 + 18^2} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$$

Longitud de la circunferencia: L = 2π r = 2π·30 = 60π cm

Área del círculo = $\pi r^2 = \pi \cdot 30^2 = 900\pi$ cm²



17 *En un jardín rectangular de dimensiones 15 x 8 m se desea construir un estanque con forma de rombo, como indica la figura. Calcula el área de este estanque y la longitud de la valla que es necesaria para rodearlo.*



La diagonal mayor mide D = 15 m y la menor d = 8 m, luego el área del estanque es:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{15 \cdot 8}{4} = 30 \text{ m}^2$$

Para saber el perímetro necesitamos conocer el lado, que hallamos por Pitágoras:

$$l = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2} = 8{,}5\,m$$, luego el perímetro = 4 · 8,5 = 34 m.

18 *La planta de un teatro tiene forma trapezoidal y sus bases miden 20 y 12 m. Estamos interesados en conocer la longitud de su altura, pero esto resulta difícil pues las butacas nos impiden medirla. Lo que sí sabemos es que el área es de 480 m2. Descubre con estos datos la longitud de la altura.*

B = 20 m
b = 12 m
A = 480 m^2

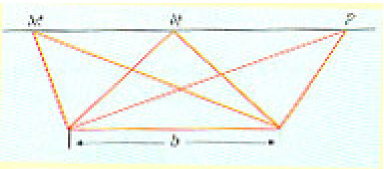
De la fórmula del área del trapecio despejamos la altura:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{2A}{B+b} = \frac{2 \cdot 480}{20+12} = 30 \text{ m}$$

19 *Una persona desea construir una casa en un solar rectangular de medidas 11 x 18 m. A la hora de construir, cambia de idea y prefiere que la planta sea cuadrada, en vez de rectangular pero con la misma superficie. ¿Cuánto medirá el lado de esta nueva planta?*

$$A_{rectángulo} = A_{cuadrado};\ a \cdot b = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{11 \cdot 18} = 14{,}07\,m$$

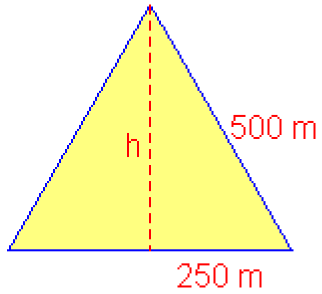
20 *Construimos varios triángulos entre dos rectas paralelas, todos ellos con la misma base b contenida en una de las rectas y con vértices M, N, P en la otra recta. ¿Cómo son entre sí las áreas de estos triángulos?*



Son iguales ya que tienen la misma base (b) y la altura es la misma, la distancia entre las dos rectas paralelas.

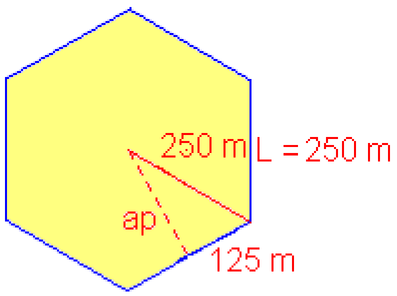
21 *El faraón Tutankamon, contento con el trabajo de sus dos constructores, les dio una cuerda de 1 500 m de longitud y les dijo que les regalaba la superficie de la parcela de tierra con forma geométrica que pudieran rodear con ella. Uno de ellos rodeó una parcela en forma de triángulo equilátero, el otro en forma de hexágono regular. ¿Cuál de los dos fue más listo y por qué?*

El que rodeó un triángulo equilátero, cada lado del triángulo tenía 1500 m/ 3 = 500 m. Ahora hallamos la altura del triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{500^2 - 250^2} = 433{,}01 \text{ m}$$, luego el área que rodeó fue:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{500 \cdot 433{,}01}{2} = 108253{,}18 \text{ m}^2$$

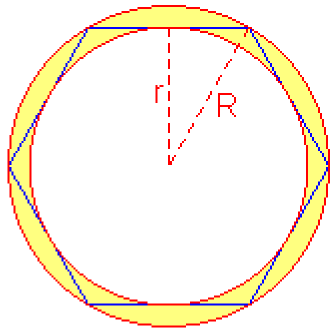


El lado del hexágono mide L = 1500/ 6 = 250 m. Hallamos la apotema (ap): $ap = \sqrt{250^2 - 125^2} = 216{,}51\,m$

El área $A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 250 \cdot 216{,}51}{2} = 162379{,}76 \text{ m}^2$

Fue más listo el segundo.

22 *Calcula el área de la corona circular formada al inscribir y circunscribir sendas circunferencias en un hexágono regular de 12 cm de lado.*



El radio (R) de la circunferencia circunscrita mide lo mismo que el lado del hexágono = 12 cm.

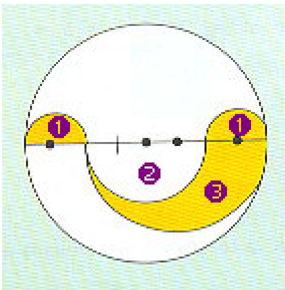
El radio (r) de la circunferencia inscrita es la apotema del hexágono cuya medida hallamos mediante el teorema de Pitágoras:

$$r = ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10{,}39\ \text{cm}$$

El área de la corona circular será:

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(144 - 108) = 36\pi\ \text{cm}^2$$

23 *Calcula el área de la zona sombreada sabiendo que la circunferencia mayor tiene 16 m de diámetro.*



El área de zona sombreada es :

$$2A_{\text{semicírculo 1}} + A_{\text{semicírculo 3}} - A_{\text{semicírculo 2}}$$

Como los radios son r_1 = 2 m, r_2 = 4m y r_3 = 6 m, la superficie pedida es:

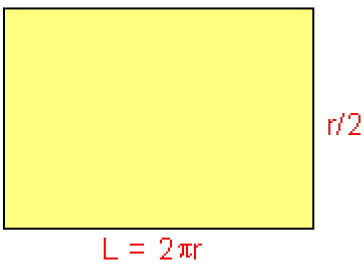
$$\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_3^2 - \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \pi 2^2 + \frac{1}{2}\pi 6^2 - \frac{1}{2}\pi 4^2 = 4\pi + 18\pi - 8\pi = 14\pi\ \text{m}^2$$

24 *De una chapa circular de 22 cm de radio cortamos un sector de 45º de amplitud. ¿Qué superficie tiene la chapa restante?*

Si la amplitud del sector que cortamos es de 45º, la amplitud del sector que queda será de 360º - 45º = 315º y e su área:

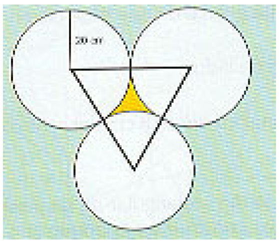
$$A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 22^2 \cdot 315^\circ}{360^\circ} = 1330{,}46\ \text{cm}^2.$$

25 *Estudia si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «El área de un círculo es igual al área de un rectángulo cuya base tiene por longitud la longitud de fa circunferencia asociada al círculo anterior y su altura mide la mitad del radio del círculo"*



Área del rectángulo = $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$ = $\pi\ r^2$ = área del círculo. Luego es verdadero

26 *Determina el área de las figuras sombreadas que aparecen a continuación:*

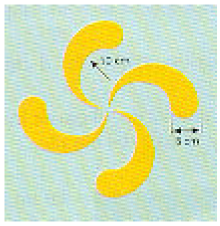


$A_{sombreada} = A_{triángulo} - 3A_{sector\ de\ 60^{o}} = A_{triángulo} - A_{semicírculo}$

Para hallar el área del triángulo equilátero necesitamos la altura que calculamos aplicando el teorema de Pitágoras a la mitad:

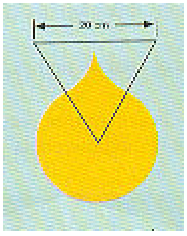
$$h = \sqrt{40^2 - 20^2} = 20\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$$A_{sombreada} = \frac{40 \cdot 20\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\pi 20^2 = 64{,}50\ \text{cm}^2$$



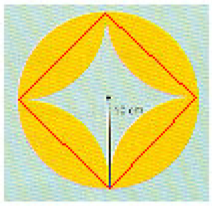
$A_{sombreada} = 4 \cdot (A_{semicírculo\ grande} + A_{semicírculo\ pequeño} - A_{semicírculo\ mediano})$ ya que hay cuatro lóbulos iguales

$$A_{sombreada} = 4 \cdot \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10^2\right) = 4 \cdot 98{,}17\ \text{cm}^2 = 392{,}7\ \text{cm}^2$$



$A_{coloreada} = A_{círculo} + A_{la\ primera\ figura\ (\ radio\ la\ mitad)}$

$$A_{coloreada} = \pi 10^2 + \frac{20 \cdot 10\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\pi 10^2 = 330,\ 28\ \text{cm}^2$$



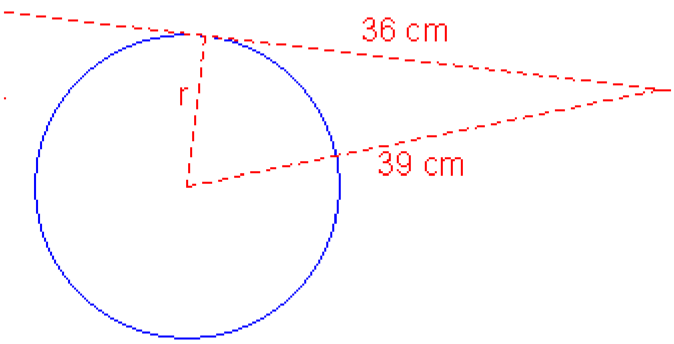
$A_{sombreada} = 2(A_{circulo} - A_{cuadrado})$

Para hallar el área del cuadrado necesitamos saber la longitud del lado:

$$L = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}\ \text{cm}$$

$$A_{sombreada} = 2(A_{circulo} - A_{cuadrado}) = 2\left(\pi 10^2 - \left(\sqrt{200}\right)^2\right) = 228{,}32\ \text{cm}^2$$

27 *Desde un punto exterior a una circunferencia y a una distancia de 39 cm de su centro trazamos una tangente a la misma que mide 36 cm. Calcula la longitud de la circunferencia.*

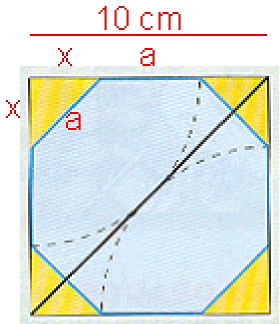


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el radio de la circunferencia:

$$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15\ \text{cm}$$

$$\text{Longitud}_{circunferencia} = 2\pi \cdot 15 = 30\pi = 94{,}25\ \text{cm}^2$$

✎ **28** *La siguiente figura muestra la construcción de un octógono regular a partir de un cuadrado. Sabiendo que el cuadrado tiene 10 cm de lado, calcula el lado del octógono.*



El lado del octógono a = 10 – 2x, como se ve en la figura, además en el triángulo rectángulo de la esquina, aplicando el teorema de Pitágoras:

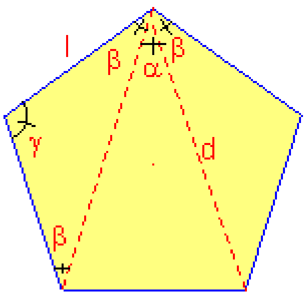
$a^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow (10-2x)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 100 - 40x + 4x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 100 = 0$

si resolvemos la ecuación equivalente $x^2 - 20x + 50 = 0$, tenemos:

$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot 50}}{2} = \frac{20 \pm 10\sqrt{2}}{2} = \begin{matrix} 10+5\sqrt{2} \\ 10-5\sqrt{2} \end{matrix}$, la primera, que es mayor que 10 no nos vale, tomamos la segunda.

El lado del octógono es $a = 10 - 2x = 10 - 2\cdot\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 4{,}14$ cm

✐ **29** *Demuestra que el ángulo que forman dos diagonales que parten de un mismo vértice de un pentágono regular mide 36°.*

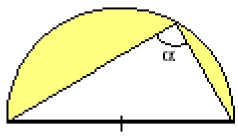


Sabemos que el ángulo interior $\gamma = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$, luego se cumple α + 2β = γ y además 2β + γ = 180º, luego 2β = 180º - γ = 180º - 108º = 72º, es decir β = 36º y por tanto el ángulo buscado:

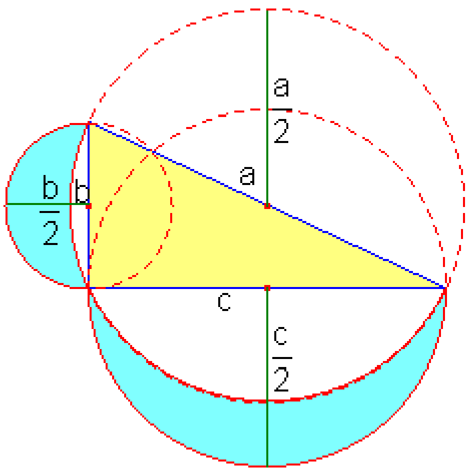
α = γ - 2β = 108º - 2·36º = 108º - 72º = 36º QED

✎ **30** *Demuestra que cualquier triángulo inscrito en una semicircunferencia, tal que uno de sus lados sea el diámetro, es siempre rectángulo.*

El ángulo α es inscrito y abarca 180º, luego su valor será la mitad es decir α = 90º, es decir el triángulo es rectángulo.



✎ **31** *En cada una de estas figuras demuestra que la suma de áreas de las zonas sombreadas (lúnulas) es igual al área de la rayada. El primer matemático que hizo esta demostración fue Hipócrates de Quios en el siglo v a. C.*



$A_{rayada} = \frac{b\cdot c}{2}$ ya que es un triángulo rectángulo.

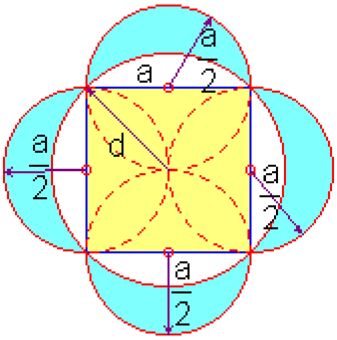
Área de las dos lúnulas = suma de las áreas de los semicírculos de radios b/2 y c/2 – área de los sectores circulares que se forman entre las lúnulas y el triángulo.

La suma de las áreas de los sectores circulares entre las lúnulas y el triángulo(A_s) la hallamos restando al área del semicírculo de radio a/2, el área del triángulo rectángulo:

$$A_s = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{bc}{2}$$

El área de las lúnulas será:

$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{bc}{2}\right] = \frac{\pi}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + \frac{bc}{2} = \frac{bc}{2}$, ya que según el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ y por tanto $b^2 + c^2 - a^2 = 0$.



El área de las lúnulas es la suma de los cuatro semicírculos de radio a/2, dos veces el área del círculo, menos la suma de los cuatro sectores comprendidos entre la circunferencia de radio la diagonal del cuadrado (d) y el cuadrado.

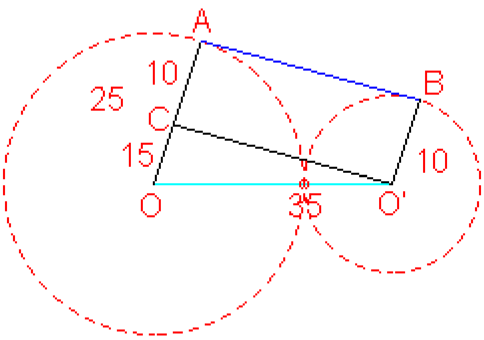
Hallamos el área de los cuatro sectores, para lo cual necesitamos conocer primero la medida de la diagonal d:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

A_S = área del círculo (r = d) – área del cuadrado = $\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - a^2 = \pi\frac{a^2}{2} - a^2$

$A_{\text{lúnulas}} = 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\pi\frac{a^2}{2} - a^2\right) = \pi\frac{a^2}{2} - \pi\frac{a^2}{2} + a^2 = a^2$ = área del cuadrado. QED.

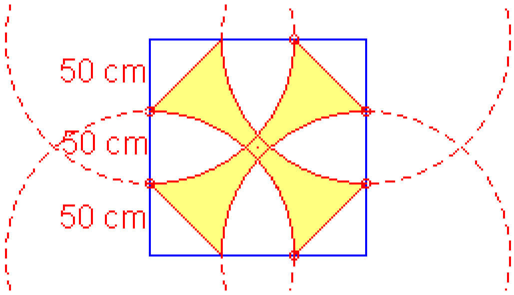
➾ **32** *Calcula la longitud de la tangente AB común a las poleas de la figura.*



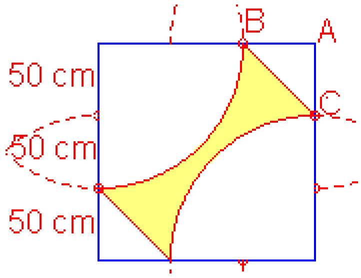
Como AB y O'C son paralelos tendrán la misma longitud. Para hallar la longitud de la cuerda común AB, hallamos O'C en el triángulo rectángulo OCO':

AB = $\overline{O'C} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{35^2 - 15^2} = 10\sqrt{10}$ cm = 31, 6228 cm^2

33 *Calcula el área de la cruz de la figura adjunta.*



Hallamos primero el área de una de las dos aspas, que como se aprecia en la figura adjunta es:



A_{aspa} = Área del cuadrado (l = 3·50 = 150 cm) – área del semicírculo (r = 2· 50 = 100 cm) – 2· (área del triángulo rectángulo ABC) =

$$= 150^2 - \frac{\pi 100^2}{2} - 2\frac{50 \cdot 50}{2} = 4\,292{,}04 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la cruz será el doble:

$$A_{cruz} = 2 \cdot 4\,292{,}04 = 8\,584{,}07 \text{ cm}^2$$

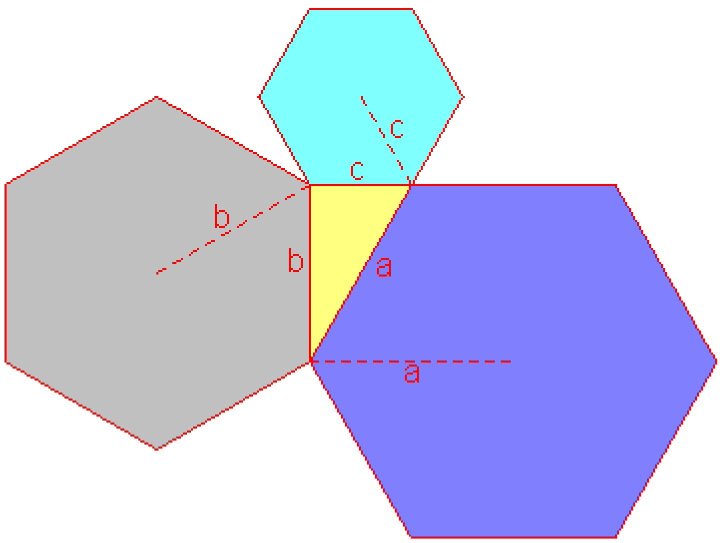
34 *Demuestra que en un polígono regular el ángulo exterior y el central tienen el mismo valor.*

El ángulo central de un polígono regular viene dado : $\alpha_{central} = \frac{360^\circ}{n}$

El ángulo exterior = 180º - ángulo interior:

$$\alpha_{exterior} = 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{180^\circ n}{n} + \frac{2 \cdot 180^\circ}{n} = 180^\circ - 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

35 *Demuestra la validez de la extensión del teorema de Pitágoras cuando construimos sobre los lados del triángulo rectángulo sendos hexágonos regulares.*



El área de hexágono de lado l es:

$$A_{hexágono} = \frac{pxap}{2} = \frac{6l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$

Ya que la apotema ap es:

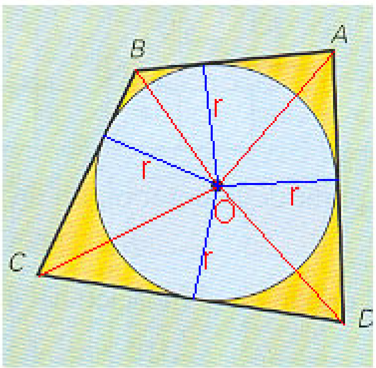
$$ap = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Suma de las áreas de los hexágonos construidos sobre los catetos (b y c) del triángulo rectángulo : $\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ que es el área del hexágono construido sobre la hipotenusa como queríamos demostrar.

✎ 36 *Cuando circunscribimos un polígono a cualquier circunferencia se verifica que:*

$Área_{polígono}$ =(perímetro del polígono · radio) /2

Prueba que esta igualdad es verdadera.

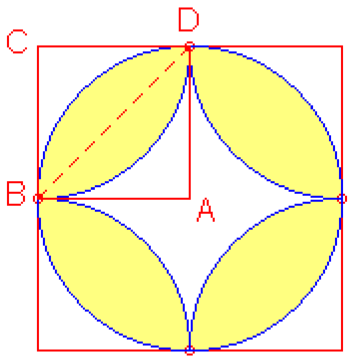


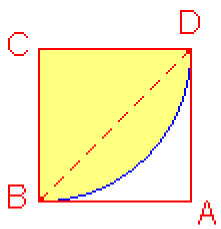
Si descomponemos el polígono (cuadrilátero en este caso) en triángulos, los cuatro triángulos tienen por altura el radio de la circunferencia, luego:

$A_{polígono} = A_{triángulo\ AOB} + A_{triángulo\ AOD} + A_{triángulo\ DOC} + A_{triángulo\ COB} =$

$$=\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}+\frac{\overline{AD}\cdot r}{2}+\frac{\overline{DC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{CB}\cdot r}{2}=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}\right)r}{2}=\frac{p\cdot r}{2} \text{ QED.}$$

✐ 37 *Calcula el área de la flor de la figura sabiendo que el lado del cuadrado mide 22 cm.*





Hallamos primero el área de uno de los lóbulos tomando el cuadrado cuarta parte del original.

A_{blanca} = área del cuadrado – área del círculo/4

$= 11^2 - \frac{1}{4}\pi 11^2$

$A_{lóbulo}$ = Área cuadrado – 2 área parte blanca =

$$= 11^2-2\left(11^2-\frac{1}{4}\pi 11^2\right)=\frac{\pi}{2}11^2-11^2=11^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi-2}{2}11^2$$

$$Área_{sombreada} = 4A_{lóbulo} = 4\,\frac{\pi-2}{2}11^2 = 2(\pi - 2)\,11^2 = 276{,}27\text{ cm}^2$$