ACTIVIDADES INICIALES

① *¿Qué entiendes par perímetro y área de una figura plana?*

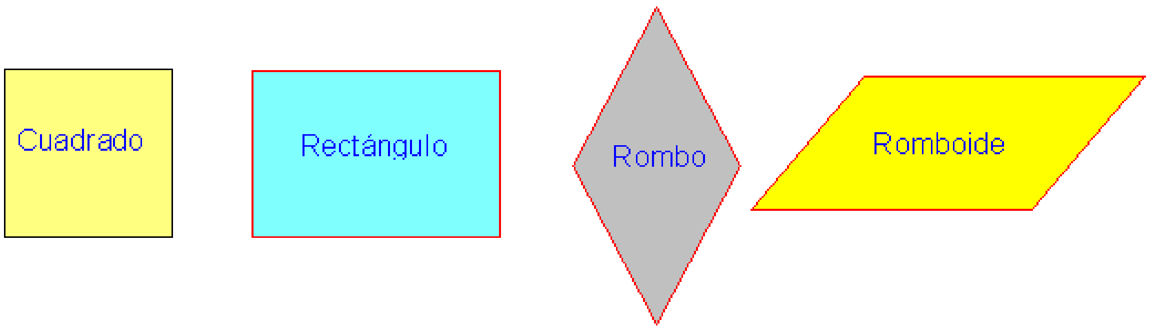
❁ **Perímetro**: La longitud de la línea que define su contorno que se calcula mediante suma de las longitudes de todos los lados que forman la figura plana.

❁ **Área** : La superficie que encierra la figura plana.

② *Define un paralelogramo. ¿:Cuántos tipos de paralelogramos conoces? Explica en qué se parecen y en qué se diferencian los diferentes paralelogramos.*

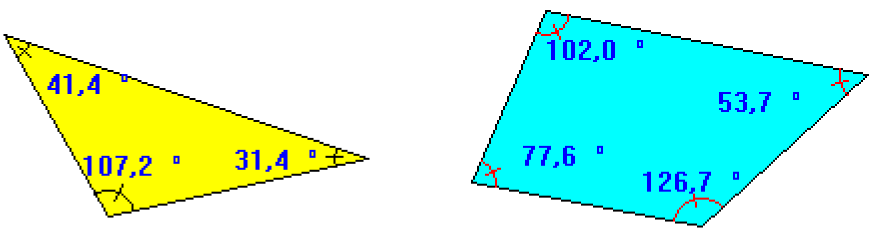
Paralelogramo: Cuadrilátero de lados paralelos dos a dos.

$$\begin{cases} \text{Los 4 lados iguales} \begin{cases} \text{Los 4 ángulo iguales} \Rightarrow \text{Cuadrado} \\ \text{Ángulos iguales dos a dos} \Rightarrow \text{Rombo} \end{cases} \\ \text{Lados iguales dos a dos} \begin{cases} \text{Los 4 ángulo iguales} \Rightarrow \text{Rectángulo} \\ \text{Ángulos iguales dos a dos} \Rightarrow \text{Romboide} \end{cases} \end{cases}$$



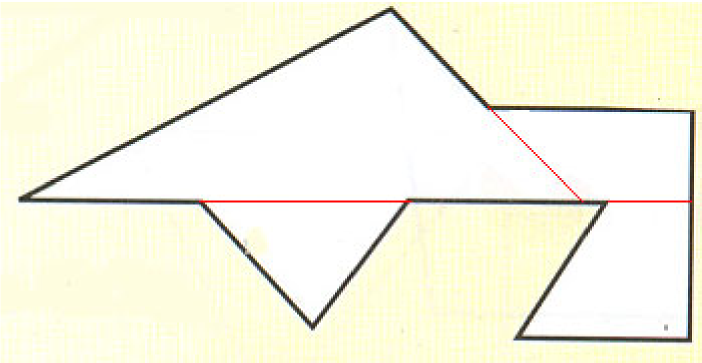
③ *¿Cuanto suman los ángulos interiores de un triángulo? ¿ Y los de un cuadrilátero?*

Los de un cuadrado y un rectángulo suman 4 ·90º = 360º, luego los de cualquier cuadrilátero también. Como uniendo dos triángulos iguales siempre se forma un cuadrilátero, los ángulos interiores de un triángulo sumarán la mitad de los del cuadrilátero, es decir 180º.



4 Explica, con tus propias palabras, cómo calcularías el área de esta figura.

Una de las muchas posibilidades sería hallar las superficies de los dos triángulo y los dos trapecios de la figura:



5 El perímetro de la rueda de tu bicicleta es de 2,20 m. Hemos hecho una excursión en bici de 20 km. ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una de las ruedas?

$$\text{Nº de vueltas} = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Longitud de una vuelta}} = \frac{20000\text{m}}{2{,}20\text{m}} = 9090{,}90 \quad \text{vueltas}$$

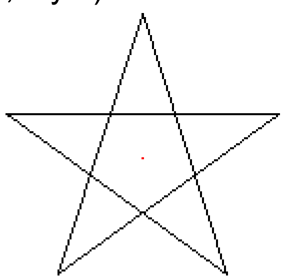
ACTIVIDADES PARA RESOLVER

PÁGINA • 93

1 ¿Cuantos polígonos regulares estrellados de 3,4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 vértices podemos obtener?En cada caso denótalos mediante la notación n | s.

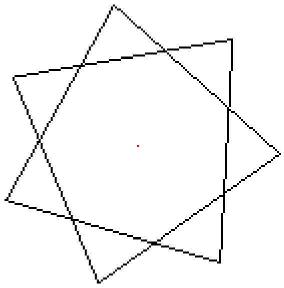
El número de polígonos estrellados que se pueden obtener uniendo los vértices de un polígono regular de *n* lados es la cantidad de números primos con *n* y menores que *n/2*.

- n = 3, no hay números primos con 3 menores que 1,5 = 3/2.
- n = 4, los primos con 4 (3) no son menores que 2 = 4/2.
- n = 5, de los primos con 5 (2, 3 y 4) sólo el 2 < 2,5 = 5/2, luego sólo existe el 5 | 2

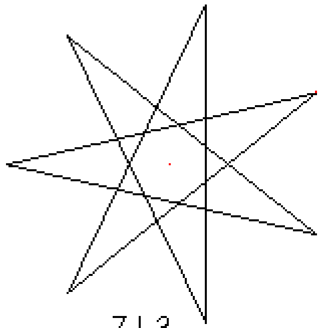


- n = 6, de los primos con 6 (5) ninguno es menor que 3 = 6/2.

n = 7, de los primos con 7 (2, 3, 4, 5, 6) sólo el 2 y 3 son menores que 3,5=7/2, luego se pueden construir los polígonos estrellados: 7 | 2 y el 7 | 3.

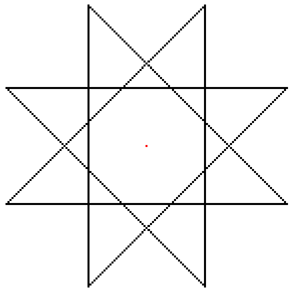


7 | 2

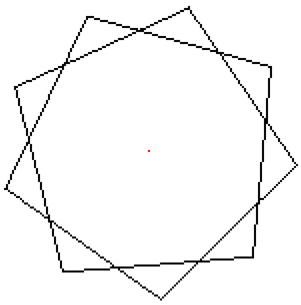


7 | 3

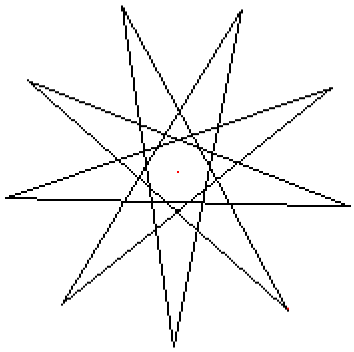
n = 8, de los primos con 8 (3, 7) sólo el 3 < 4 = 8/2, luego se pueden construir el 8 | 3.



n = 9, de los primos con 9 (2, 4, 5, 7 y 8) sólo el 2 y 4 son menores que 4,5 = 9/2, luego se pueden construir los polígonos estrellados: 9 | 2 y el 9 | 4..

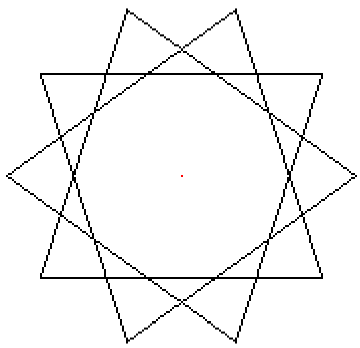


9 | 2

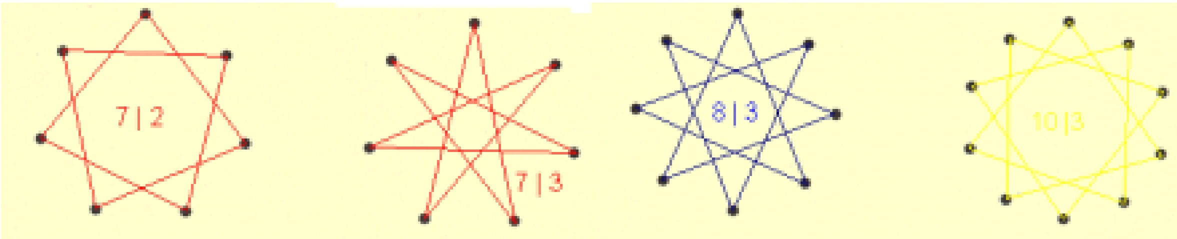


9 | 4

n = 10, de los primos con 10 (3, 7, y 9) sólo el 3 < 5 = 10/3, luego se pueden construir el 10 | 3

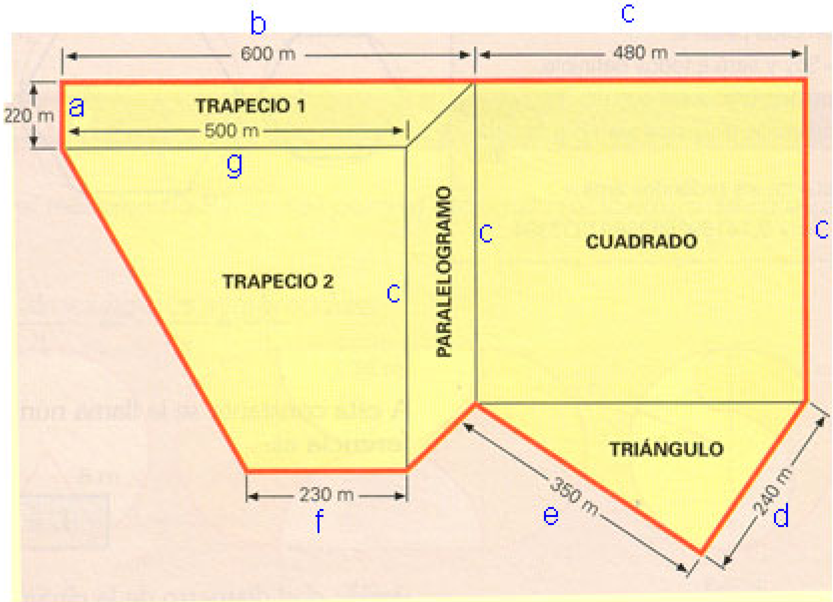


② *Construye los polígonos regulares estrellados de 7, 8 y 10 lados o vértices.*



PÁGINA • 97

① *La figura representa una finca. Para calcular el área de la misma la dividimos en parcelas como podemos ver en el dibujo. Calcula el área, en hectáreas, de la finca y su valor sabiendo que una hectárea vale 425 000 pesetas.*



Hallamos el área de cada una de las figuras por separado:

❀ $A_{Trapecio1} = \dfrac{Base + base}{2} \cdot altura = \dfrac{b+g}{2} \cdot a = \dfrac{600+500}{2} \cdot 220 = 121000 \quad m^2$

❀ $A_{Trapecio2} = \dfrac{Base + base}{2} \cdot altura = \dfrac{f+g}{2} \cdot a = \dfrac{230+500}{2} \cdot 480 = 175200 \quad m^2$

❀ $A_{Paralelogramo}$ = base x altura = c ·(b – g) = 480 · (600 – 500) = 480 · 100 = 48 000 m^2

❀ $A_{Triángulo} = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)} = \sqrt{535(535-480)(535-240)(535-350)} = 40073{,}3 m^2$, en donde hemos usado la fórmula de Herón, siendo p = semiperímetro

❀ $A_{Cuadrado} = Lado^2 = c^2 = 480^2 = 230\ 400\ m^2$

$A_{TOTAL} = A_{Trapecio1} + A_{Trapecio2} + A_{Paralelogramo} + A_{Triángulo} + A_{Cuadrado}$ = 121 000 + 175 200 + 48 000 + 40 073,3 + 230 400 = 614 473,3 m^2 = 61,5 Ha.
Valor = 61,5 · 425 000 = 26 137 500 ptas.

① *Comprueba 1a extensión del teorema de Pitágoras para e1triángu1o rectángulo de catetos a = 12 cm y b = 16 cm.*

El área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos.

Hallamos la hipotenusa c = $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20$ cm

Extensión del teorema de Pitágoras:

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2$ que es el teorema de Pitágoras, en nuestro caso concreto: $10^2 = 6^2 + 8^2$.

② *Ca1cu1a e1 área de 1as siguientes figuras sombreadas.*

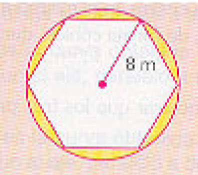


fig. a

$$A_{sombreada} = A_{círculo} - A_{hexágono} = \pi\cdot 8^2-\frac{6\cdot 8\cdot 6{,}93}{2}=34{,}74\ \text{m}^2$$

$$\text{Apotema del hexágono} = Ap = \sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=6{,}93\ \text{m}$$

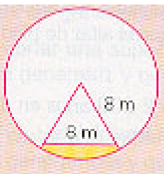


fig. b

$$A_{sector}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot\alpha}{360^o}=\frac{\pi\cdot 8^2\cdot 60^o}{360^o}=33{,}5\ \text{m}^2$$

$$A_{Triángulo}=\frac{\text{Base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{8\cdot 6{,}93}{2}=27{,}72\ \text{m}^2$$

$$A_{sombreada} = A_{segmento} = A_{sector} - A_{triángulo} = 33{,}5 - 27{,}72 = 5{,}78\ \text{m}^2$$

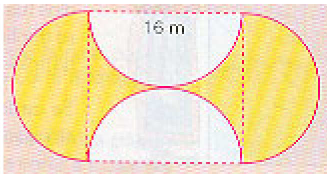


fig. c

Los dos semicírculos de los lados rellenan la parte que le falta al cuadrado, luego:
$A_{sombreada} = A_{cuadrado} = l^2 = 16^2 = 256\ \text{m}^2$.

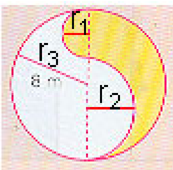


fig. d

$A_{sombreada} = A_{semicírculo\ grande} - A_{semicírculo\ mediano} + A_{semicírculo\ pequeño}$
Necesitamos conocer, pues, los tres radios:
$2r_1 + 2r_2 = 2r_3$ y además $r_2 = 2r_1$, sistema que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} r_1+r_2=8 \\ r_2=2r_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow r_1+2r_1=8\Leftrightarrow 3r_1=8\Leftrightarrow r_1=\frac{8}{3}\Rightarrow r_2=\frac{16}{3}$$

$$A_{sombreada}=\frac{1}{2}\pi r_3^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2+\frac{1}{2}\pi r_1^2=\frac{1}{2}\pi\left(r_3^2-r_3^2+r_1^2\right)=\frac{1}{2}\pi\left(8^2-\left(\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2\right)=67{,}02\ \text{m}^2$$

PÁGINA • 104

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

① *Calcula la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos convexos:*
a) *cuadrilátero* **b)** *pentágono* **c)** *hexágono* **d)** *heptágono* **e)** *decágono.*

La suma de los ángulos interiores de un polígono viene dada por la fórmula 180º(n – 2), en donde n = número de lados.

a) Suma = 180º(4 – 2) = 360º.

b) Suma = 180º(5 – 2) = 540º.

c) Suma = 180º(6 – 2) = 720º.

d) Suma = 180º(7 – 2) = 900º.

e) Suma = 180º(10 – 2) = 1 440º.

② *Calcula el valor de los ángulos central, interior y exterior de los siguientes polígonos regulares:*
a) *triángulo* **b)** *cuadrado* **c)** *pentágono* **d)** *hexágono* **e)** *octógono.*

Polígono	Lados (n)	Ángulo Central = $\frac{360^\circ}{n}$	Ángulo interior = $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$	Ángulo exterior
Triángulo	3	360º/3 = 120º	$\frac{180^\circ(3-2)}{3} = 60^\circ$	120º
Cuadrado	4	360º/4 = 90º	$\frac{180^\circ(4-2)}{4} = 90^\circ$	90º
Pentágono	5	360º/5 = 72º	$\frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$	72º
Hexágono	6	360º/6 = 60º	$\frac{180^\circ(6-2)}{6} = 120^\circ$	60º
Octógono	8	360º/8 = 45º	$\frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$	45º

③ *Indica en cada uno de los siguientes casos a que polígono regular corresponde el ángulo dado:*
a) *Ángulo central: C = 36°*
b) *Ángulo interior: I= 140°*
c) *Ángulo exterior: E = 60°*
d) *Ángulo interior: I= 108°*
e) *Ángulo exterior: E = 120°*
f) *Ángulo central C = 45°*

a) $\frac{360^\circ}{n} = 36^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$, decágono.

b) $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 140^\circ \Leftrightarrow 180^\circ n - 360^\circ = 140^\circ n \Leftrightarrow 180^\circ n - 140^\circ n = 360^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{40^\circ} = 9$, nonágono.

c) $\frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$, hexágono.

d) $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 108^\circ \Leftrightarrow 180^\circ n - 360^\circ = 108^\circ n \Leftrightarrow 180^\circ n - 108^\circ n = 360^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$, pentágono.

e) $\frac{360^\circ}{n} = 120^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$, triángulo equilátero.

f) $\frac{360^\circ}{n} = 45^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$, octógono.

④ *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es 1 260°. ¿Cuántos vértices tiene el polígono?*

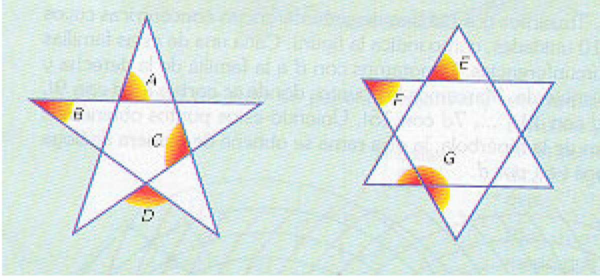
Suma = 180°(n –2) = 1 260°; n – 2 = $\frac{1260^\circ}{180^\circ} = 7$; n = 7 + 2 = 9 vértices.

⑤ *¿Cuantas diagonales se pueden trazar en un cuadrilátero convexo? ¿Y en un pentágono convexo? ¿Y en un hexágono convexo? ¿Y en un octógono convexo? ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de 15 lados?*

El número de diagonales viene dado por la fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$

- Cuadrilátero (n = 4) = $\frac{4(4-3)}{2} = 2$ diagonales.
- Pentágono (n = 5) = $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ diagonales.
- Hexágono (n = 6) = $\frac{6(6-3)}{2} = 9$ diagonales.
- Octógono (n = 8) = $\frac{8(8-3)}{2} = 20$ diagonales.
- Polígono de 15 lados (n = 15) = $\frac{15(15-3)}{2} = 90$ diagonales.

⑥ *Calcula los ángulos que se indican en la estrella pitagórica y en la estrella de David.*



Estrella Pitagórica

El ángulo C es un ángulo interior de un pentágono, luego su amplitud es:

$$\hat{C} = \frac{180^{\circ}(n-2)}{n} = \frac{180^{\circ}(5-2)}{5} = 108^{\circ} = \hat{D}$$

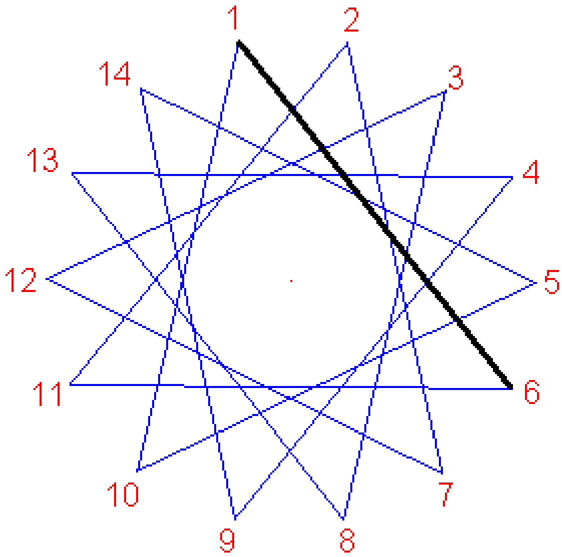
El ángulo A es suplementario con D, luego su amplitud es 180º - 108 = 72º.

En cuanto a B se cumple $2\hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = \frac{180^{\circ} - \hat{C}}{2} = \frac{180-108}{2} = 36^{\circ}$

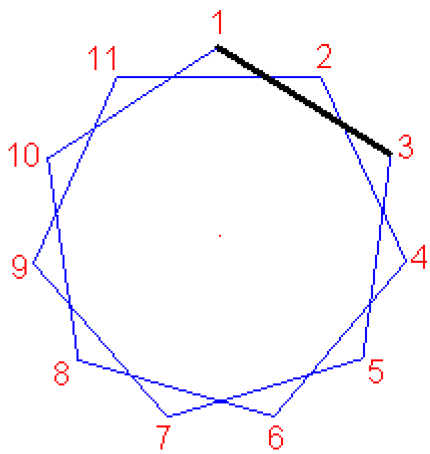
Estrella de David

$\hat{E} = \hat{F} =$ 60º y $\hat{G}$ = 2·60º + 120º = 240º

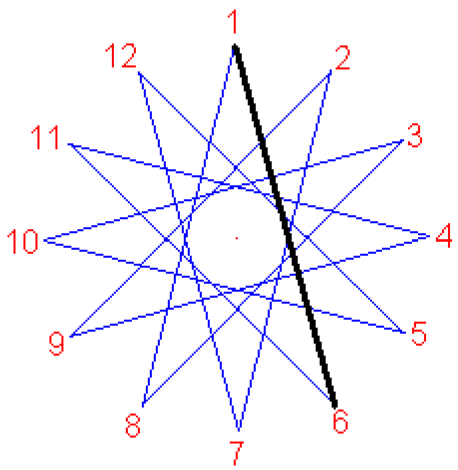
⑦ *Clarifica 105 siguientes polígonos estrellados utilizando la notaci6n n/s.*



Tenemos 14 vértices y el 1 se une con el 6 (línea negra de trazo más grueso) luego saltamos 5, es decir es el polígono 14 | 5

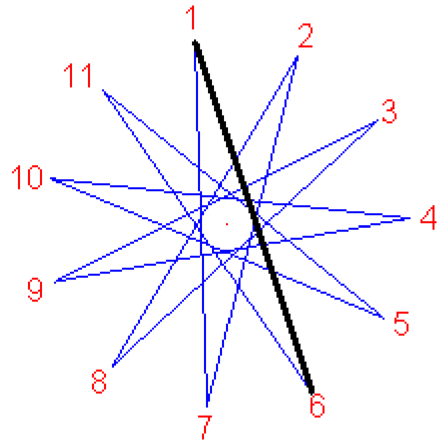


Vértices 11 y se unen cada 2, luego se trata del 11 | 2



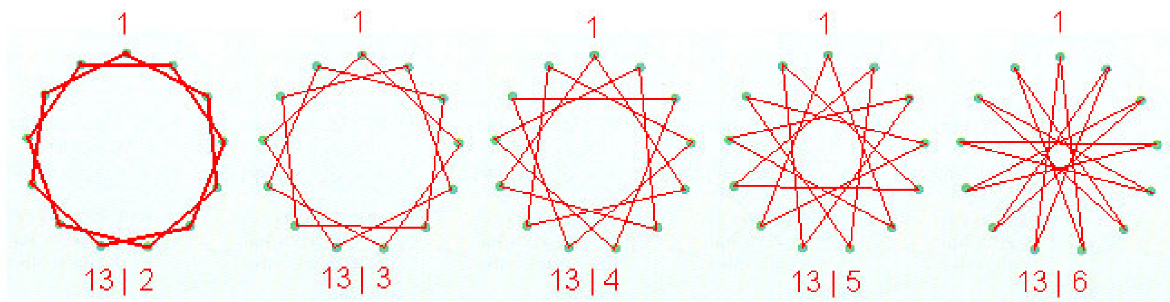
12 | 5

Es el 11 | 5

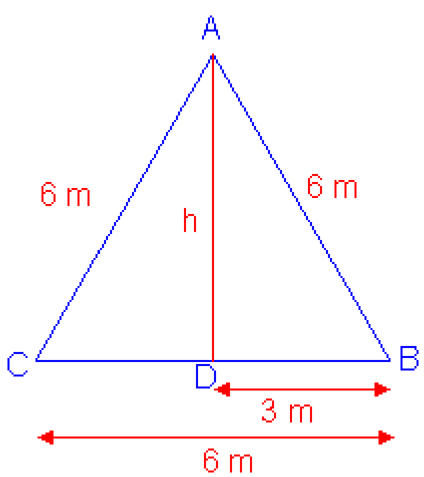


⑧ *A partir de los vértices de un polígono regular de 13 lados construye todos los polígonos regulares estrellados de 13 lados que puedan formarse.*

Los primos con 13 y menores que 6,5 = 13/2, son { 2, 3, 4, 5 y 6} luego pueden formarse 5 polígonos estrellados de 13 vértices:



⑨ *Calcula el área de un triángulo equilátero de 18 m de perímetro.*



Si el perímetro es 18 m, su lado medirá 18/ 3 = 6 m

Como el triángulo ADB es rectángulo (AD es una altura) podemos utilizar el teorema de Pitágoras para hallar lo que mide la altura h:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \Rightarrow 6^2 = h^2 + 3^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} \approx 5{,}2$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{\text{Basexaltura}}{2} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{\overline{CB} \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}59 \text{ m}^2$$