PÁGINA • 49

ACTIVIDADES INICIALES

1 Encuentra los valores numéricos de las siguientes expresiones para los valores que se indican:

a) $x^2 - 4$; $x = -2$
b) $3x^2y - 5$; $x = -1$, $y = 2$
c) $(x - 2)^2$; $x = 5$
d) $x^2 - 4x + 4$; $x = 5$

Sustituimos la variable x por su valor:

a) $(-2)^2 – 4 = 4 – 4 = 0$.
b) $3·(-1)^2·2 – 5 = 6 – 5 = 1$.
c) $(5 – 2)^2 = 3^2 = 9$.
d) $5^2 – 4·5 + 4 = 25 – 20 + 4 = 9$.

2 Un amigo me dijo: «Piensa un número. Añádele 15. Multiplica por tres el resultado. A lo que te dé, réstale 9. Divide por 3. Resta 8. ¿Cuál es el número que obtienes?» Yo le dije: «32». Mi amigo me respondió instantáneamente: «El número que pensaste fue 28». ¿Cómo consigue mi amigo averiguarlo tan deprisa?

Sea x el número pensado.

Las instrucciones traducidas a lenguaje algebraico son:

Añade 15 al número = $x + 15$.
Multiplica por 3 el resultado = $3 · (x + 15) = 3x + 45$.
Resta nueve = $3x + 45 – 9 = 3x + 36$.
Divide por 3 = $\frac{3x+36}{3} = x + 12$.
Resta 8 = $x + 12 – 8 = x + 4$.

Como el resultado final es siempre 4 más que el número, si te dan el resultado final (32 en nuestro caso), basta restar 4 para saber el número elegido (32 – 4 = 28).

PÁGINA • 51

ACTIVIDAD PARA RESOLVER

1 Asocia cada uno de los siguientes enunciados con su expresión algebraica correspondiente:

1. El doble de la suma de dos números.	**a)** $(a + b + c)^2$
2. El duplo de un número menos 5.	**b)** $2(a + b)$
3. La media aritmética de dos números.	**c)** n, n + 1

4. El duplo de la suma de dos números menos cuatro. **d)** $a = 3(b + c)$

5. Un número es el triple de la suma de otros dos. **e)** $a^2 + b^2$

6. Dos números enteros consecutivos. **f)** $2a - 5$

7. Al doble de mi edad le suman seis. **g)** $(a+b)/2$

8. El cuadrado de la suma de tres números. **h)** $2x + 6$

9. La suma de los cuadrados de dos números. **i)** $2(a + b) - 4$

Los emparejamientos son :

1. *b)* 2. *f)* 3.*g)* 4. *i)* 5. *d)* 6. *c)* 7. *h)*
8. *a)* 9. *e)*

② Calcula los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las variables que se indican:

a) $a^2+2ab+b^2$; para a = 1 y b = 2
b) $\sqrt{a^2+b^2}$; para b = 12 y c = 5

a) $1^2 + 2·1·2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$.
b) $\sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

PÁGINA • 54

ACTIVIDAD PARA RESOLVER

① Escribe dos polinomios en cada uno de los siguientes apartados:

a) Trinomio de grado 3 ordenado. **b)** Polinomio completo y ordenado.

c) Binomio de grado 2. **d)** Polinomio de grado 5 no ordenado y completo.

a) $2x^3 – 2x + 5$. Tres términos (trinomio) y el de mayor grado de tercer grado.
b) $–x^5 + 2x^4 – x^3 + 5x^2 +6x – 1$. Grado 5, ordenado y todos los grados.
c) $–x^2 +5x$. Dos términos y el de mayor grado, de segundo grado
d) $–x + 7 + 3x^2 –2x^4 + x^5 + 5x^3$. Seis término desde grardo 5 a grado 0 (término independiente) pero sin orden.

PÁGINA • 55

ACTIVIDAD PARA RESOLVER

① Dados los polinomios $A(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$, $B(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x$ y $C(x) = - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, calcula:

a) $A(x) - [B(x) + C(x)]$

b) $A(x) - B(x) + C(x)$

c) $A(x) - B(x) - C(x)$

a) Hacemos primero sumas y restas colocando los términos en disposición vertical y haciendo coincidir los de igual grado:

$$\begin{array}{r} \mathbf{B(x)} = 2x^4 - x^3 + x^2 - x \\ \mathbf{C(x)} = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline \mathbf{B(x) + C(x)} = x^4 \qquad\qquad\qquad - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{A(x)} = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \\ \mathbf{-[B(x) + C(x)]} = - x^4 \qquad\qquad + 1 \\ \hline \mathbf{A(x) - [B(x) + C(x)]} = 2x^4 + 2x^2 - x + 2 \end{array}$$

Ahora disponemos las operaciones en horizontal, reduciendo términos semejantes:

$\mathbf{A(x) - [B(x) + C(x)]} = \mathbf{A(x) - B(x) - C(x)} = (3x^4 + 2x^2 - x + 1) - (2x^4 - x^3 + x^2 - x) - (-x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (3x^4 - 2x^4 + x^4) + (x^3 - x^3) + (2x^2 - x^2 + x^2) + (-x + x - x) + (1 + 1) = 2x^4 + 2x^2 - x + 2.$

b) $\mathbf{A(x) - B(x) + C(x)} = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 -(2x^4 - x^3 + x^2 - x) -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 2x^3 + x$.

c) $\mathbf{A(x) - B(x) - C(x)} = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 -(2x^4 - x^3 + x^2 - x)- (-x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 2x^4 + 2x^2 - x + 2$

PÁGINA • 57

ACTIVIDAD PARA RESOLVER

① Realiza las potencias indicadas:

a) $(3x + 2)^2$ **b)** $(2x^2 + 6x)^2$ **c)** $(2x^3 - 6)^2$ **d)** $(2x^2 + 6x)^3$
e) $(3x + 2)^3$ **f)** $(2x^2 - 6x)^3$ **g)** $(3x - 2)^3$ **h)** $(x^2 + x - 1)^2$
i) $(x^2 + x - 1)^3$

a) $(3x + 2)^2 = (3x + 2)\cdot(3x + 2) =${*propiedad distributiva del producto respecto de la suma*}$= 3x(3x + 2) + 2(3x + 2) = 3\cdot3\cdot x\cdot x + 3\cdot2\cdot x + 2\cdot3\cdot x + 2\cdot2 = 9x^2 + 6x + 6x + 4 =${*reduciendo términos semejantes*}$= 9x^2 + 12x + 4$

b) $(2x^2 + 6x)^2 = (2x^2 + 6x)\cdot(2x^2 + 6x) = 2x^2(2x^2 + 6x) + 6x(2x^2 + 6x) = 2\cdot2\cdot x^2\cdot x^2 + 2\cdot6\cdot x^2\cdot x + 6\cdot2\cdot x\cdot x^2 + 6\cdot6\cdot x\cdot x = 4x^4 + 12x^3 + 12x^3 + 36x^2 = 4x^4 + 24x^3 + 36x^2$

c) $(2x^3 – 6)^2 = (2x^3 – 6)\cdot(2x^3 – 6) = 2x^3(2x^3 – 6) - 6(2x^3 – 6) = 4x^6 – 12x^3 – 12x^3 + 36 = 4x^6 – 24x^3 + 36$.

d) $(2x^2 + 6x)^3 = (2x^2 + 6x)\cdot(2x^2 + 6x)\cdot(2x^2 + 6x) = (2x^2 + 6x)\cdot[2x^2(2x^2 + 6x) + 6x(2x^2 + 6x)] = (2x^2 + 6x)\cdot[4x^4 + 24x^3 + 36x^2] = 2x^2(4x^4 + 24x^3 + 36x^2) + 6x(4x^4 + 24x^3 + 36x^2) = 8x^6 + 48x^5 + 72x^4 + 24x^5 + 144x^4 + 216x^3 = 8x^6 + 72x^5 + 216x^4 + 216x^3$

e) $(3x + 2)^3 = (3x + 2)\cdot(3x + 2)\cdot(3x + 2) = (3x + 2)\cdot[3x\cdot(3x + 2) + 2(3x + 2)] = (3x + 2)\cdot[9x^2 + 6x + 6x + 4] = (3x + 2)[9x^2 + 12x + 4] = 3x\cdot(9x^2 + 12x + 4) + 2\cdot(9x^2 + 12x + 4) = 27x^3 + 36x^2 + 12x + 18x^2 + 24x + 8 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$.

f) $(2x^2 – 6x)^3 = (2x^2 – 6x)\cdot(2x^2 – 6x)\cdot(2x^2 – 6x) = (2x^2 – 6x)\cdot[2x^2\cdot(2x^2 – 6x) – 6x(2x^2 – 6x)] = (2x^2 – 6x)\cdot[4x^4 – 12x^3 – 12x^3 + 36x^2] = (2x^2 – 6x)\cdot(4x^4 - 24x^3 + 36x^2) = 2x^2\cdot(4x^4 - 24x^3 + 36x^2) – 6x\cdot(4x^4 - 24x^3 + 36x^2) = 8x^6 – 48x^5 + 72x^4 – 24x^5 + 144x^4 – 216x^3 = 8x^6 – 72x^5 + 216x^4 – 216x^3$.

g) $(3x – 2)^3 = (3x – 2)\cdot(3x – 2)\cdot(3x – 2) = (3x – 2)\cdot[3x(3x – 2) - 2(3x – 2)] = (3x – 2)\cdot[9x^2 – 6x – 6x + 4] = (3x – 2)\cdot(9x^2 – 12x + 4) = 3x\cdot(9x^2 – 12x + 4) - 2(9x^2 – 12x + 4) = 27x^3 – 36x^2 + 12x – 18x^2 + 24x – 8 = 27x^3 – 54x^2 + 36x – 8$.

h) $(x^2 + x – 1)^2 = (x^2 + x – 1)\cdot(x^2 + x – 1) = x^2\cdot(x^2 + x – 1) + x(x^2 + x – 1) - (x^2 + x – 1) = x^4 + x^3 – x^2 + x^3 + x^2 – x – x^2 – x + 1 = x^4 + 2x^3 – x^2 – 2x + 1$.

i) $(x^2 + x – 1)^3 = (x^2 + x – 1)\cdot(x^2 + x – 1)^2 = (x^2 + x – 1)\cdot(x^4 + 2x^3 – x^2 – 2x + 1) = x^2\cdot(x^4 + 2x^3 – x^2 – 2x + 1) + x(x^4 + 2x^3 – x^2 – 2x + 1) - (x^4 + 2x^3 – x^2 – 2x + 1) = x^6 + 2x^5 – x^4 – 2x^3 + x^2 + x^5 + 2x^4 – x^3 – 2x^2 + x – x^4 – 2x^3 + x^2 + 2x – 1 = x^6 + 3x^5 – 5x^3 – 3x + 1$.

❷ Dados los polinomios $A(x) = 3x^2 + 2$; $B(x) = 2x - 3$ y $C(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3$, efectúa:

a) $A(x)\,[B(x) + C(x)]$
b) $B(x)\,[A(x) + C(x)]$
c) $C(x)\,[A(x) + B(x)]$
d) $A(x)\,[B(x) - C(x)]$

a) 9x6 + 12x4 + 6x3 – 14x2 + 4x – 12
b) 6x5 – 9x4 + 10x3 – 15x2 – 2x + 3
c) 9x6 + 6x5 + 3x4 + 4x3 – 11x2 – 6x + 3
d) –9x6 – 12x4 + 6x3 – 4x2 + 4x

❸ Dados los polinomios $A(x) = 2x^2 + 3x – 1$; $B(x) = 3x + 7$ y $C(x) = 4x^3 – 5x + 2$

a) Calcula los valores numéricos de los polinomios cuando $x = 2$, es decir $A(2)$, $B(2)$ y $C(2)$.

b) Calcula A(x)· B(x); A(x) ·C(x); B(x)· C(x); A(2) · B(2); A(2) · C(2) y B(2)· C(2) y compara los resultados con A(2), B(2) y C(2).

a) Para hallar el valor numérico de un polinomio P(x) cuando x = a, que simbolizamos por P(a), se sustituye la variable x por a y se realizan las operaciones, luego :

- $A(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 2 \cdot 4 + 6 - 1 = 8 + 6 - 1 = 13.$
- $B(2) = 3 \cdot 2 + 7 = 6 + 7 = 13$
- $C(2) = 4 \cdot 23 - 5 \cdot 2 + 2 = 24$

b)

- Hallamos primero los productos

$A(x) \cdot B(x) = 6x^3 + 23x^2 + 18x - 7$
$A(x) \cdot C(x) = 8x^5 + 12x^4 - 14x^3 - 11x^2 + 11x - 2$
$B(x) \cdot C(x) = 12x^4 + 28x^3 - 15x^2 - 29x + 14$

- Ahora los valores numéricos de los productos sustituyendo x por 2 y comprobamos que el resultado es el mismo que al multiplicar los valores numéricos correspondientes:

$A(2) \cdot B(2) = 6 \cdot 2^3 + 23 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 7 = 169 = 13 \cdot 13$
$A(2) \cdot C(2) = 8 \cdot 2^5 + 12 \cdot 2^4 - 14 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 + + 11 \cdot 2 - 2 = 312 = 13 \cdot 24$
$B(2) \cdot C(2) = 12 \cdot 2^4 + 28 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 - 29 \cdot 2 + 14 = 312 = 13 \cdot 24$

PÁGINA • 59

1 Efectúa las siguientes operaciones utilizando las igualdades notables:

a) $(x - 3)^2$ **b)** $(x + 3)(x - 3)$ **c)** $(x + 3)^2$ **d)** $(3x + 2)^2$ **e)** $(2x^3 - 6)^2$ **f)** $(x + 2)^3$
g) $(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)$ **h)** $(2x - 3)^3$ **i)** $(2x^2 + 6x)^2$

Igualdades notables:

Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Suma por diferencia : $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Cubo de un binomio : $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$

a) $\mathbf{(x - 3)^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9.$

b) $\mathbf{(x + 3) \cdot (x - 3)} = x^2 - 3^2 = x^2 - 9.$

c) $\mathbf{(x + 3)^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$

d) $\mathbf{(3x + 2)^2} = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$

e) $\mathbf{(2x^3 - 6)^2} = (2x^3)^2 + 2 \cdot (2x^3) \cdot (-6) + (-6)^2 = 4x^6 - 24x^3 + 36.$

f) $(x + 2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 2 + 3\cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$

g) $(2x^2 + 3) \cdot (2x^2 – 3) = (2x^2)^2 – 3^2 = 4x^4 – 9$.

h) $(2x – 3)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2 \cdot(-3) + 3 \cdot (2x) \cdot (-3)^2 + (-3)^3 = 8x^3 – 36x^2 + 54x – 27.$

i) $(2x^2 + 6x)^2 = (2x^2)^2 +2\cdot(2x^2)\cdot(6x) + (6x)^2 = 2^2 (x^2)^2+ 2\cdot2\cdot6\cdot x^2\cdot x + 6^2x^2 = 4x^4 + 24x^3+36x^2.$

② Completa los huecos en las igualdades siguientes:

a) $(3x + \square)^2 = 9x^2 + 24x + 16$ **b)** $(\square - 5)^2 = 4x^2 - \square + 25$

c) $16 - \square = (4 - \square) . (\square + 5x)$ **d)** $3a \cdot (5a^2 - \square) = \square - 3a$

a) $9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2\cdot3x\cdot4 + 4^2 = (3x + 4)^2$

b) $4x^2 - \square + 25 = (2x)^2 – 2 \cdot(2x)\cdot5 + 5^2 = (2x)^2 – 20x + 5^2 = (2x – 5)^2$

c) $16 – 25x^2 = (4 – 5x) . (4 + 5x)$

d) $3a \cdot (5a^2 - 1) = 15a^3 - 3a$

③ Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

a) $15x^4 - 6x^2$ **b)** $25 + 10x + x^2$ **c)** $12ax^2 - 12ax + 3a$ **d)** $x^4 - 1$

a) $15x^4 - 6x^2 = 3\cdot5x^4 – 2\cdot3x^2 =$ {*extraemos factores comunes*} $= 3x^2 (5x^2 – 2)$.

b) $25 + 10x + x^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot5 + 5^2 = \{ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2\} = (x + 5)^2$

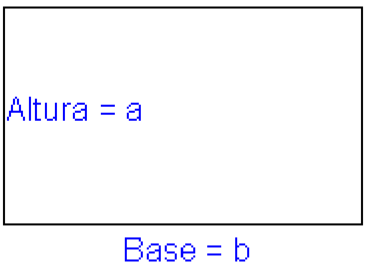
c) $12ax^2 - 12ax + 3a = 2^2\cdot3ax^2 – 2^2\cdot3ax + 3a =$ { *extrayendo factores comunes*} $= 3a(2^2x^2 – 2^2x + 1) =$ { *producto notable*} $= 3a(2x – 1)^2$

d) $x^4 – 1 = (x^2)^2 – 1^2 =$ {*diferencia de cuadrados = suma por diferencia*} $= (x^2 + 1) (x^2 –1) =$ { *$x^2 – 1$ vuelve a ser una diferencia de cuadrados* } $= (x^2 + 1) (x + 1)(x –1)$.

PÁGINA • 60

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

① Expresa en lenguaje algebraico, las siguientes expresiones referidas a la base, b, y la altura a, de un rectángulo:



a) La base es doble que la altura.
b) La altura es a la base como 7 es a 3.

c) La base y la altura difieren en 8 unidades.
d) La base es 3/5 de la altura.
e) La altura excede en 7 unidades a la base.
f) El área del rectángulo es 26 cm^2.

Expresa, en cada uno de los casos, el perímetro del rectángulo.

a) Base = Doble(altura), sustituyendo cada variable por su símbolo: b = 2a.

b) $\frac{\text{Altura}}{\text{Base}} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow a = \frac{7}{3}b \Leftrightarrow 3a = 7b$.

c) Base – Altura = 8; b – a = 8, b = a + 8 y a = b - 8.

d) $\text{Base} = \frac{3}{5}\text{Altura} \Rightarrow b = \frac{3}{5}a \Leftrightarrow 5b = 3a$.

e) Altura = base + 7; a = b + 7.

f) Área = b · a; 26 = ab $\Rightarrow b = \frac{26}{a}$.

Como el perímetro es P = 2a + 2b, tenemos en cada caso:

a) P = 2a + 2b = 2a + 2(2a) = 2a + 4a = 6a, y en función de b:

$P = 2a + 2b = 2\frac{b}{2} + 2b = b + 2b = 3b$

b) $P = 2a + 2b = 2a + 2\frac{3}{7}a = 2a + \frac{6}{7}a = \frac{14a + 6a}{7} = \frac{20}{7}a$.

$P = 2a + 2b = 2\frac{7}{3}b + 2b = \frac{14}{3}b + 2b = \frac{20}{3}b$.

c) P = 2a + 2b = 2a + 2(a +8) = 2a + 2a + 16 = 4a + 16 = 4(a + 4).
P = 2a + 2b = 2(b – 8) + 2b = 2b – 16 + 2b = 4b – 16 = 4(b – 4).

d) $P = 2a + 2b = 2a + 2\frac{3}{5}a = 2a + \frac{6}{5}a = \frac{10a + 6a}{5} = \frac{16}{5}a$.

$P = 2a + 2b = 2\frac{5}{3}b + 2b = \frac{10}{3}b + 2b = \frac{10b + 6b}{3} = \frac{16}{3}b.$.

e) P = 2a + 2b = 2a + 2(a - 7) = 2a + 2a - 14 = 4a – 14 = 2(2a – 7).
P = 2a + 2b = 2(b + 7) + 2b = 2b + 14 + 2b = 4b + 14 = 2(2b + 7).

f) $P = 2a + 2b = 2a + 2\frac{26}{a} = 2a + \frac{52}{a} = \frac{2a^2 + 52}{a}$.

$P = 2a + 2b = 2\frac{26}{b} + 2b = \frac{52}{b} + 2b = \frac{2b^2 + 52}{b}$.

② Calcula los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas para x= 2 y x= 4:

a) $(x^2+x)/2$ **b)** $4 - 5x^2$ **c)** $x^3 - 2x^2+1$

Se sustituye la variable x para hallar los valores numéricos

a) $P(2) = \frac{2^2 + 2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$; $P(4) = \frac{4^2 + 4}{2} = \frac{16 + 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

b) $P(2) = 4 – 5·2^2 = 4 – 5 ·4 = 4 – 20 = -16$; $P(4) = 4 – 5·4^2 = 4 – 5 · 16 = 4 – 80 = -76$.

c) $P(2) = 2^3 – 2·2^2 + 1 = 8 – 8 + 1 = 1$; $P(4) = 4^3 – 2·4^2 + 1 = 64 – 32 + 1 = 33$.

③ Expresa en lenguaje algebraico o simbólico los siguientes enunciados:

a) Un hotel tiene doble número de habitaciones dobles que de sencillas.

b) El cuadrado de la suma de tres números consecutivos.

c) La suma de tres números naturales consecutivos.

d) El área de un triángulo es base por altura dividido por dos.

e) La diferencia de dos números dividida por 5.

f) El doble del producto de dos números.

a) Sea y = nº de habitaciones dobles y x = nº de habitaciones sencillas
Como habitaciones dobles = Doble(habitaciones sencillas), y = 2x.

b) Sea n = número menor, el primero, el segundo será = n +1 y el tercero = (n +1) + 1 = n + 2 ya que son consecutivos.
Como $(\text{primero} + \text{segundo} + \text{tercero})^2 = (n + n + 1 + n + 2)^2 = (3n + 3)^2 = 3^2(n +1)^2 = 9(n^2 + 2n + 1) = 9n^2 + 18n + 9$.

c) Es válida la nomenclatura del ejercicio anterior, luego la suma es n + n+ 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3 (n + 1).

d) Nominamos: Base = x y altura = y, luego Área = Base · altura /2 = x · y/2 = $\frac{xy}{2}$.

e) Sea : el número menor = x, el mayor = y, luego su diferencia dividida por 5es (y –x)/5.

f) Doble del producto de dos números = 2 xy.

④ Determina los valores numéricos de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican:

a) $a^2 – b^2$; a = 1, b = -1

b) $x/2 + y + z^2$; x = - 4, y = 2, z = - 2

c) $(2x^2 + xy – 1)/(2x +y)$; x = -1, y = 4

d) $2^a + \sqrt{4bc}$; a = -1, b = 2, c = 18

Sustituimos las variables por sus valores:

a) $1^1 – (-1)^1 = 1- 1 = 0$

b) $\frac{-4}{2} + 2 + (-2)^2 = -2 + 2 + 4 = 4$.

c) $\frac{2(-1)^2 + (-1)·4 - 1}{2(-1) + 4} = \frac{2 - 4 - 1}{-2 + 4} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$.

d) $2^{-1} + \sqrt{4{\cdot}2{\cdot}18} = \frac{1}{2} + \sqrt{2^4{\cdot}3^2} = \frac{1}{2} + 2^2{\cdot}3 = \frac{1}{2} + 12 = \frac{1+24}{2} = \frac{25}{2}$.

⑤ Asocia cada expresión algebraica con su enunciado correspondiente:

a) $x^2 - y^2$
b) $3x + 4$
c) $10x + y$
d) $2x + (2x + 2) + (2x + 4)$
e) $(x - y)^2$
f) $3 \cdot (x + 4)$
g) $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5)$

1) El triple de la suma de un número más cuatro.
2) Suma de tres pares naturales consecutivos.
3) La diferencia de los cuadrados de dos números.
4) Un número de dos cifras.
5) La suma de tres impares naturales consecutivos.
6) El cuadrado de la diferencia de dos números.
7) El triple de un número más cuatro.

⑥ Escribe un monomio en la indeterminada x que cumpla las condiciones que se expresan en cada uno de los siguientes casos:

a) De grado 2 y coeficiente - 4.
b) De grado cero y coeficiente 1.
c) Semejante a $4x^3$ y de coeficiente 3.
d) De grado 3 y coeficiente 1/3.

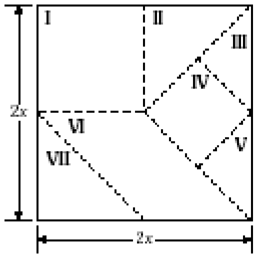
a) $-4x^2$ **b)** $1x^0 = 1$ **c)** $3x^3$ **d)** $\frac{1}{3}x^3$.

⑦ Efectúa las operaciones siguientes con los monomios dados:

A(x)	B(x)	Suma A(x) + B(x)	Diferencia A(x) – B(x)	Producto A(x) · B(x)	Cociente A(x) : B(x)
$3x$	$-7x$	$3x - 7x = -4x$	$3x - (-7x) = 3x + 7x = 10x$	$(3x)\cdot(-7x) = -21x^2$	$\frac{3x}{-7x} = -\frac{3}{7}$
$-12x^3$	$4x^3$	$-12x^3 + 4x^3 = -8x^3$	$-12x^3 - 4x^3 = -16x^3$	$(-12x^3)\cdot(4x^3) = -48x^6$	$\frac{-12x^3}{4x^3} = -3$
$\frac{1}{3}x^4$	$\frac{3}{2}x^4$	$\frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^4 = \frac{11}{6}x^4$	$\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^4 = -\frac{7}{6}x^4$	$\frac{1}{3}x^4 \cdot \frac{3}{2}x^4 = \frac{1}{2}x^8$	$\frac{\frac{1}{3}x^4}{\frac{3}{2}x^4} = \frac{2}{9}$
$-\frac{5}{2}x^2$	$2x$	$-\frac{5}{2}x^2 + 2x$	$-\frac{5}{2}x^2 - 2x$	$-\frac{5}{2}x^2 \cdot 2x = -5x^3$	$\frac{-\frac{5}{2}x^2}{2x} = -\frac{5}{4}x$

⑧ En el dibujo se muestra el Tangram Pitagórico. Encuentra los monomios que dan el área de cada una de las siete piezas de este tangram, sabiendo que el cuadrado que forman las mismas tiene de lado 2x.

Comprueba que la suma de estas áreas coincide con el área del citado cuadrado.



Área = $l^2 = (2x)^2 = 4x^2$.

Monomio I = x^2

Monomio II (triángulo) = Monomio VII = $\frac{\text{basexaltura}}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{1}{2}x^2 =$ Monomio IV.

Monomio III = Monomio V = Mitad de los anteriores = $x^2/4$.

Monomio VI = Doble del II = x^2.

Suma = Monomio I + Monomio II + Monomio III + Monomio IV + Monomio V + Monomio VI + Monomio VII = $x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 4x^2$

⑨ Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para los valores que se indican:

a) $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$
b) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ para $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$
c) $5x^3 - 20x^3 - 20x + 80$ para $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$
d) $3x^3 - 6x^2 - 3x/4 + 3/2$ parax $= 1$, $x = 2$ y $x = 1/2$

a) $P(0) = 0^4 - 0^3 - 13 \cdot 0^2 + 0 + 12 = 12$.
$P(1) = 1^4 - 1^3 - 13 \cdot 1^2 + 1 + 12 = 1 - 1 - 13 + 1 + 12 = 0$.
$P(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 - 13 \cdot (-2)^2 + (-2) + 12 = 16 + 8 - 52 - 2 + 12 = -18$.

b) $P(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 41 \cdot 1 - 30 = 1 - 12 + 41 - 30 = 0$.
$P(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 41 \cdot (-1) - 30 = -1 - 12 - 41 - 30 = -84$.
$P(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 41 \cdot 3 - 30 = 27 - 12 \cdot 9 + 41 \cdot 3 - 30 = 27 - 108 + 123 - 30 = 12$.

c) $P(0) = 5 \cdot 0^3 - 20 \cdot 0^3 - 20 \cdot 0 + 80 = 80$.
$P(2) = 5 \cdot 2^3 - 20 \cdot 2^3 - 20 \cdot 2 + 80 = 40 - 160 - 40 + 80 = -80$.
$P(4) = 5 \cdot 4^3 - 20 \cdot 4^3 - 20 \cdot 4 + 80 = 80 - 320 - 80 + 80 = -240$.

d) $P(1) = 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{2} = 3 - 6 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{12 - 24 - 3 + 6}{4} = -\frac{9}{4}$.

$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{3}{2} = 24 - 24 - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 24 - 24 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$.

$P(1/2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{8} - \frac{6}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{2} = 0$.

⑩ Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8)$

b) $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x - 6) + (x^5 + x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 6x + 24) - (3x^3 + 4x^2 - 3x + 5)$

c) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x - \frac{1}{8}\right) - \left[\left(x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)\right]$

a) $4x^3 - 2x^2 + x + 1 - 3x^3 + x^2 + x + 7 - x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = (4 - 3 - 1)x^3 + (-2 + 1 + 4)x^2 + (1 + 1 - 2)x + (1 + 7 - 8) = 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0 = 3x^2$.

b) $5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x - 6 + x^5 + x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 6x + 24 - 3x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = x^5 + 6x^4 - 14x^3 + 15x^2 - 5x + 13$.

c) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x - \frac{1}{8} - x^3 + \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} = \left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{4}\right)x^3 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{5}{8}\right)x^2 +$

$\left(1 + \frac{3}{4}\right)x + \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{6 - 4 + 1}{4}x^3 + \frac{-14 + 5}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1 + 12 + 10}{8} = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{23}{8}$

11 Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(x^2 - 3x + 1)\ (x + 4)$

b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)\ \ (2x^3 + 2x + 1)$

c) $(x^4 - 7x^2 - 3)\ .\ (x^2 - 3)$

a) $(x^2 - 3x + 1)\cdot x + (x^2 - 3x + 1)\cdot 4 = x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 12x + 4 = x^3 + x^2 - 11x + 4$.

b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x) \cdot 2x^3 + (5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x) \cdot 2x + (5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x) \cdot 1 = 10x^7 + 6x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 10x^5 + 6x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x = 10x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x$.

c) $(x^4 - 7x^2 - 3)\cdot x^2 + (x^4 - 7x^2 - 3)\cdot(-3) = x^6 - 7x^4 - 3x^2 - 3x^4 + 21x^2 + 6 = x^6 - 10x^4 + 18x^2 + 6$.

12 Dados los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y $B(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2$

a) Calcula la diferencia $C(x) = A(x) - B(x)$
b) Comprueba que $A(x) = B(x) + C(x)$
c) Calcula los valores numéricos de los polinomios cuando $x = 3$, $A(3)$, $B(3)$ y $C(3)$ y comprueba que $C(3) = A(3) - B(3)$

a) $C(x) = A(x) - B(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 - (-x^4 + 8x^2 + 7x + 2) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 + x^4 - 8x^2 - 7x - 2 = x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6$.

b) $B(x) + C(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2 + x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6 = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = A(x)$.

c) $A(3) = 3^3 - 2\cdot 3^2 - 7\cdot 3 - 4 = 27 - 18 - 21 - 4 = -16$.

$B(3) = -3^4 + 8\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 2 = -81 + 72 + 21 + 2 = 14.$

$C(3) = 3^4 + 3^3 - 10\cdot 3^2 - 14\cdot 3 - 6 = 81 + 27 - 90 - 42 - 6 = -30.$

$C(3) = A(3) - B(3) = -16 - 14 = -30.$

13 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 3)\cdot(x + 3)$ **b)** $(x + 3)\cdot(x - 3)$ **c)** $(x - 3)\cdot(x -3)$ **d)** $(x+3)\cdot(x-3)\cdot(x-3)$

a) $(x + 3)\cdot(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$

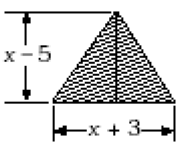
b) $(x + 3)\cdot(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9.$

c) $(x - 3)\cdot(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9.$

d) $(x + 3)\cdot(x - 3)\cdot(x - 3) = (x^2 - 9)\cdot(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27.$

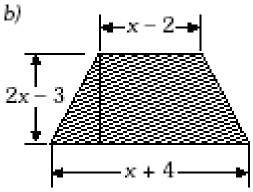
14 Calcula el área de cada una de las siguientes figuras:

a)



$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{basexaltura}}{2} = \frac{(x+3)(x-5)}{2} = \frac{x^2-2x-15}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2}$$

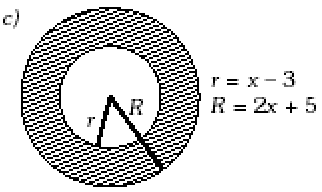
b)



$$\text{Área del trapecio} = \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{(x+4)+(x-2)}{2}(2x-3) = \frac{(2x+2)}{2}(2x-3)$$

$$= \frac{2}{2}(x+1)(2x-3) = (x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

c)



Área de la corona circular = $\pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r) = \pi(2x+5+x-3)(2x + 5 - x + 3) = \pi(3x + 2)(x + 8) = \pi(3x^2 + 24x + 2x + 16) = \pi(3x^2 + 26x + 16)$

15 Efectúa las siguientes operaciones utilizando las igualdades notables:

a) $(2x + 3)^2$ **b)** $(x - 5)(x + 5)$ **c)** $(x^3 - 2)^2$ **d)** $\left(3x^3 - \frac{1}{3}\right)^2$ **e)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

a) $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot 3+3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$

b) $(x – 5) (x + 5) = x^2 – 5^2 = x^2 – 25.$

c) $(x^3 – 2)^2 = (x^3)^2 + 2(x^3)\cdot(-2) + (-2)^2 = x^6 – 4x^3 + 4.$

d) $\left(3x^3 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(3x^3\right)^2 + 2(3x^3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 9x^6 - 2x^3 + \frac{1}{9}.$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot\frac{1}{2} + 3x\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}.$

f) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}$

16 Descompón en factores los polinomios siguientes:

a) $x^3 -7x^2$ **b)** $x^2 + 8x + 16$ **c)** $7x^2 - 28$ **d)** $75 - 60x + 12x^2$

e) $4x^2 + 4x + 2$ **f)** $27x^3 -27x^2 + 9x - 1$ **g)** $16 - x^4$ **h)** $27x^4 -36x^2+12$

i) $3 x^2 + 3 x + 3/4$ **j)** $9 x^2 - 4/9$ **k)** $x^2 + xy + xz + yz$ **l)** $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

a) $x^3 – 7x^2 = x^2(x – 7).$

b) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x\cdot 4 + 4^2 = (x + 4)^2$, un producto notable.

c) $7x^2 – 28 = 7(x^2 – 4) = 7 (x^2 – 2^2) = 7 (x + 2) (x – 2)$, después de extraer factor común, queda una diferencia de cuadrados que es suma por diferencia.

d) $75 – 60x + 12x^2 = 3(25 – 20x + 4x^2) = 3(5^2 – 2\cdot(5)(2x) +(2x)^2)= 3(5 – 2x)^2.$

e) $4x^2 + 4x + 2 = 2(2x^2 + 2x + 1).$

f) $27x^3 -27x^2 + 9x – 1 = (3x)^3 + 3(3x)^2(-1) + 3(3x)(-1)^2 + (-1)^3 = (3x – 1)^3$, aplicando, a la inversa la fórmula del cubo de un binomio.

g) $16 – x^4 = 4^2 – (x^2)^2 = (4 + x^2)(4 – x^2) = (x^2 + 4) (2^2 – x^2) = (x^2 + 4) (2 + x)(2 – x)$, hemos utilizado dso veces la diferencia de cuadrados.

h) $27x^4 -36x^2+12 = 3(9x^4 – 12x^2 + 4) = 3 ((3x^2)^2 + 2(3x^2)(-2) + (-2)^2) = 3(3x^2 –2)^2$, cuadrado del binomio diferencia.

i) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 3\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

j) $9x^2 - \frac{4}{9} = (3x)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(3x + \frac{2}{3}\right)\cdot\left(3x - \frac{2}{3}\right)$

k) $x^2 + xy + xz + yz = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$, que es una doble extracción de factores comunes.

l) $6x^2 + 3xy - 2ax - ay = 3x(2x + y) - a(2x + y) = (2x + y)(3x - a)$.

17 Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $3x(2x^2 - 5x + 3)(x - 5)$
b) $(x - 2)(2x + 1)^2(x+2)$
c) $(x^2 - 3x + 2)(x - 1) + (x + 5)(x - 2)^2$
d) $4(3x - 1(3x + 1)3x[(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2]$

Señalamos en *negrita* la operación que realizamos en cada paso.

a) $3x(2x^2 - 5x + 3)(x - 5) = 3x(2x^3 - 5x^2 + 3x - 10x^2 + 25x - 15) = 3x(2x^3 - 15x^2 + 28x - 15) = 6x^4 - 45x^3 + 84x^2 - 45x$.

b) $(x - 2)(2x + 1)^2(x + 2) = (x^2 - 4)(2x + 1)^2 = (x^2 - 4)(4x^2 + 4x + 1) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x^2 - 16x - 4 = = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 16x - 4$.

c) $(x^2 - 3x + 2)(x - 1) + (x + 5)(x - 2)^2 = (x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 2) + (x + 5)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 + (x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^2 - 20x + 20) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 + x^3 + x^2 - 16x + 20 = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 18$.

d) $(3x - 1)(3x + 1) - 3x[(3x+1)^2 - (3x - 1)^2] = 4(9x^2 - 1) - 3x[(9x^2 + 6x + 1) - (9x^2 - 6x + 1)] = 36x^2 - 4 - 3x(9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 + 6x - 1) = 36x^2 - 4 - 3x(12x) = 36x^2 - 4 - 36x^2 = -4$.

18 Como puedes leer en la introducción de esta unidad didáctica, el polinomio $A(x) = x^2 - x + 41$ produce números primos para valores de x desde 0 hasta 40 y el polinomio $B(x) = x^2 - 79x + 1\,601$ produce a su vez números primos para valores de x desde 0 hasta 79.

a) Comprueba que A(0), A(40), B(0), B(79), A(15) y B(56) son primos.

b) ¿Son primos o compuestos los números A(41) y B(80)?, compruébalo.

c) Calcula los cocientes: A(42) : 41; B(81) : 41

(recordamos que para poder asegurar que un número es primo hay que ir dividiendo por los sucesivos números primos menores hasta obtener un cociente menor que el divisor, si no hemos obtenido un cociente exacto, podemos asegurar que el número es primo)

a)

- $A(0) = 0^2 - 0 + 41 = 41$

Comprobemos que el 41 es primo: no es par, tampoco divisible por 3 (la suma de sus cifras es 5), ni múltiplo de 5 pues no termina ni en 0 ni en 5, al dividir por 7 da de cociente 5, luego es primo.

- $A(40) = 40^2 – 40 + 41 = 1\ 600 – 40 + 41 = 1\ 601$.

Para comprobar si es primo vamos dividiendo por los sucesivos números primos:

- No es par (divisible por 2).
- No es múltiplo de 3 (la suma de sus cifras es 8 que no es múltiplo de 3).
- No es divisible por 5, pues no termina ni en 0 ni en 5.
- No es divisible por 7 (cociente = 228, resto = 5).
- No es múltiplo de 11(6 + 1 = 7, y 7 – 1 = 6 no es múltiplo de 11).
- No es divisible por 13(cociente = 123, resto = 2).
- No es divisible por 17(cociente = 94, resto =3).
- No es divisible por 19(cociente = 84, resto = 5).
- No es divisible por 23(cociente = 69, resto = 14).
- No es divisible por 29(cociente = 55, resto = 6).
- No es divisible por 31(cociente = 51, resto = 20).
- No es divisible por 37 (cociente = 43, resto = 10).
- No es divisible por 41(cociente = 39, resto = 2).

Luego podemos asegurar que A(40) = 1 601 es primo.

- $B(0) = 0^2 – 79·0 + 1\ 601 = 1601$ y acabamos de comprobar que es primo.

- $B(79) = 79^2 – 79(79) + 1\ 601 = 1\ 601$, que ya sabemos que es primo.

- $A(15) = 15^2 – 15 + 41 = 225 – 15 + 41 = 251$.

Para comprobar si es primo vamos dividiendo por los sucesivos números primos:

- No es par (divisible por 2).
- No es múltiplo de 3 (la suma de sus cifras es 8 que no es múltiplo de 3).
- No es divisible por 5, pues no termina ni en 0 ni en 5.
- No es divisible por 7 (cociente = 35, resto = 6).
- No es múltiplo de 11(2 + 1 = 3, y 5 – 3 = 2 no es múltiplo de 11).
- No es divisible por 13(cociente = 19, resto = 4).
- No es divisible por 17(cociente = 14, resto =13).

Luego podemos asegurar que A(15) = 251es primo.

- $B(56) = 56^2 – 79·56 + 1\ 601 = 313$.

Para comprobar si es primo vamos dividiendo por los sucesivos números primos:

- No es par (divisible por 2).
- No es múltiplo de 3 (la suma de sus cifras es 7 que no es múltiplo de 3).
- No es divisible por 5, pues no termina ni en 0 ni en 5.
- No es divisible por 7 (cociente = 44, resto = 5).
- No es múltiplo de 11(3 + 3 = 6, y 6 – 1 = 5 no es múltiplo de 11).
- No es divisible por 13(cociente = 24, resto = 1).
- No es divisible por 17(cociente = 18, resto = 7).
- No es divisible por 19(cociente = 16, resto = 9).

Luego podemos asegurar que B(56) = 313 es primo.

b)

- $A(41) = 41^2 - 41 + 41 = 1\ 681$ que no es primo pues divisible por 41 (es 41^2).
- $B(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1\ 601 = 6\ 400 - 6320 + 1\ 601 = 1\ 681 = 41^2$ como hemos visto.

c)

- $A(42) = 42^2 - 42 + 41 = 1764 - 42 + 41 = 1763$, luego $A(42) : 41 = 1\ 763 : 41 = 43$.

- $B(81) = 81^2 - 79 \cdot 81 + 1\ 601 = 6\ 561 - 6\ 399 + 1\ 601 = 1\ 763$, luego $B(81) : 41 = 1\ 763 : 41 = 43$ como el anterior.

19 Un problema antiguo. Nicolás Chuquet, considerado como el más brillante matemático del siglo xv, nos legó este problema:

Un comerciante salió de su casa a visitar tres ferias. En la primera duplicó el dinero que llevaba y se gastó 30 monedas. En la segunda triplicó el dinero que tenía y desgraciadamente perdió 54 monedas. En la tercera multiplicó todo el dinero que le quedaba por 4 y se gastó 72 monedas, con lo cual se quedó sin dinero.

Escribe la expresión algebraica que nos da el dinero con el que sale de cada feria y calcula con cuántas monedas salió de su casa.

Monedas que llevaba al salir de casa = x

- **Primera feria** = Duplica el dinero y se gasta 30 = $2x - 30$.
- **Segunda feria** = Triplica el dinero que tenía y pierde 54 = $3(2x - 30) - 54 = 6x - 144$.
- **Tercera feria** = Multiplica el dinero por 4 y gasta 72 monedas = $4(6x - 144) - 72$.

Como después de la tercera feria se queda sin dinero ha de ser $4(6x - 144) - 72 = 0$, ecuación que resolvemos:

$24x - 576 - 72 = 0$; $24x = 648$; $x = 648/24 = 27$ monedas tenía al principio.

- **Primera feria** = Duplica el dinero y se gasta 30 = $2 \cdot 27 - 30 = 54 - 30 = 24$.
- **Segunda feria** = Triplica el dinero que tenía y pierde 54 = $3 \cdot 24 - 54 = 72 - 54 = 18$.
- **Tercera feria** = Multiplica el dinero por 4 y gasta 72 monedas = $4 \cdot 18 - 72 = 72 - 72 = 0$.

Con lo que comprobamos la solución y decimos el dinero que tenía en cada feria.

20 Halla el valor de a para que sean ciertas cada una de las igualdades siguientes:

a) $(x^2 - 5)(3x + a) = 3x^3 + 2x^2 - 15x - 10$
b) $P(1) = 0$ siendo $P(x) = -2x^2 + 6x + a$
c) $(x^2 - 1)^2 + ax^2 = (x^2 + 1)^2$
d) $x^2 - 5x - xy + 5y = (x + a)(x - y)$

a) Multiplicamos y después comparamos los dos miembros de la igualdad.

$(x^2 - 5)(3x + a) = 3x^3 + ax^2 - 15x - 5a = 3x^3 + 2x^2 - 15x - 10$, para que se cumpla la igualdad ha de ser $a = 2$.

b) $P(1) = -2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + a = 0$, $-2 + 6 + a = 0$; $a = -4$.

c) $(x^2 - 1)^2 + ax^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + ax^2 = x^4 + (a - 2)x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$, luego igualando sumandos $a - 2 = 2$ y por tanto $a = 4$.

d) $(x + a)(x - y) = x^2 - xy + ax - ay = x^2 - 5x - xy + 5y$, luego $a = 5$.

✎ **21** Demuestra las afirmaciones siguientes:

a) La suma de un número de cuatro cifras y del que resulta de invertir estas es siempre múltiplo de 11. Ejemplo: 5 923 + 3 295 = 9 218 = 11 · 838.
b) La diferencia entre el cuadrado de un número de dos cifras y el cuadrado del número que resulta de invertir las cifras del dado es siempre múltiplo de 11. Ejemplo: $72^2 - 27^2 = 4\,455 = 11 \cdot 405$.

a) Sea el número de cuatro cifras $xyzt = 1000x + 100y + 10z + t$, descompuesto en notación del sistema de numeración decimal. El número que resulta de invertir sus cifras es $tzyx = 1000t + 100z + 10y + x$.

Si sumamos los dos números tendremos:

$1000x + 100y + 10z + t + 1000t + 100z + 10y + x = 1001x + 110y + 110z + 1001t = 11(91x + 10y + 10z + 91t)$ que al ser uno de los factores 11, es múltiplo de 11.

b) Número de dos cifras = $xy = 10x + y$. Número invertido $yx = 10y + x$, luego:

$(xy)^2 - (yx)^2 = (10x + y)^2 - (10y + x)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 - 100y^2 - 20xy - x^2 = 99x^2 - 99y^2 = 99(x^2 - y^2) = 9 \cdot 11 \cdot (x^2 - y^2)$, en donde, como uno de los factores es 11, será múltiplo de 11.

✎ **22** Toma un número de dos cifras, por ejemplo 59, multiplícalo por 10 101 y obtienes 595 959. ¿Ocurre esto con cualquier número de dos cifras? justifica la respuesta.

Sea un número de dos cifras xy, si lo multiplicamos por 10 101, tenemos:

$xy \cdot 10\,101 = xy(10\,000 + 100 + 1) = xy \cdot 10\,000 + xy \cdot 100 + xy = xyxyxy$