Cuestiones

31 ¿Puede ser que la suma de los ángulos de un polígono sea 240º Justifica tu respuesta.

Debería cumplirse 180º · (n – 2) = 240º, que no se cumple para ningún valor entero de n.

32 ¿Es posible que un triángulo sea equilátero y obtusángulo a la vez? Justifica tu respuesta.

No, para que sea equilátero (longitud de los tres lados igual) ha de ser equiángulo, ha de tener los tres ángulos iguales y, como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, cada uno debe medir 60º, luego no puede ser obtusángulo y equilátero a la vez.

33 ¿Puede un triángulo rectángulo tener tres lados de longitudes 3 cm, 4 cm y 6 cm? Justifica tu respuesta.

Al ser rectángulo, la hipotenusa será el lado de mayor longitud a = 6 cm y los catetos b = 3 cm y c = 4 cm. Si se cumple el teorema de Pitágoras, podría formarse un triángulo:
$a^2 = b^2 + c^2$, $6^2 = 36 \neq 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, luego no puede haber un triángulo rectángulo con esas dimensiones.

34 ¿Es cierto que una figura tiene más área cuanto mayor es su perímetro? Justifica tu respuesta.

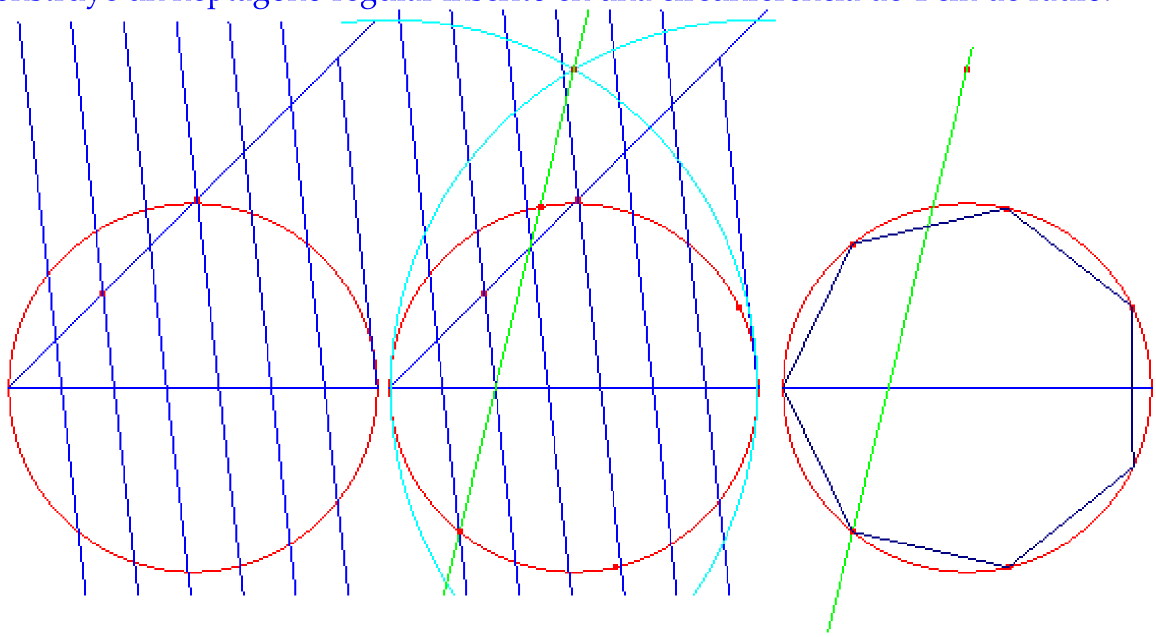
Sí, si son el mismo tipo de polígono, pero polígonos diferentes de menor perímetro pueden tener más área que otro de mayor perímetro.

Ejercicios

35 Calcula el número de diagonales de un dodecágono y la suma de sus ángulos.

- Diagonales = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = 54$ diagonales.
- Suma = 180º· (n – 2) = 180º (12 – 2) = 180º·10 = 1800º

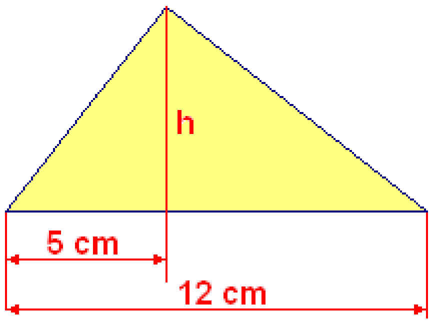
36 Construye un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.



37 Justifica si la longitud del segmento PQ de estos triángulos coincide con la de sus alturas.

Como la altura es perpendicular a la base, sólo en el caso ③ el segmento PQ es $\perp$ a la base (mide lo mismo que la altura) ya que los otros dos ángulos suman 90º (51º + 39º). En los otros dos casos no suman 90º (89º en el ① y 91º en el ②).

38 Calcula el valor de h en el triángulo rectángulo de la figura.



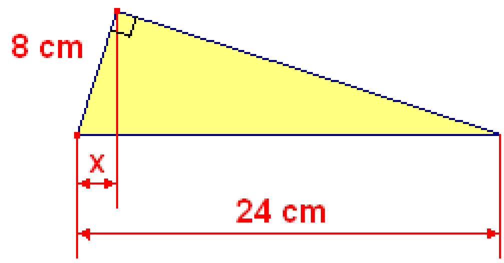
Utilizamos el teorema de la altura:

$h = \sqrt{5 \cdot 12} = 7{,}75$ cm.

39 Calcula el valor de x en el triángulo rectángulo de la figura.

Usamos el teorema del cateto:

$8^2 = x \cdot 24$; $x = \dfrac{64}{24} = 2{,}67$ cm.



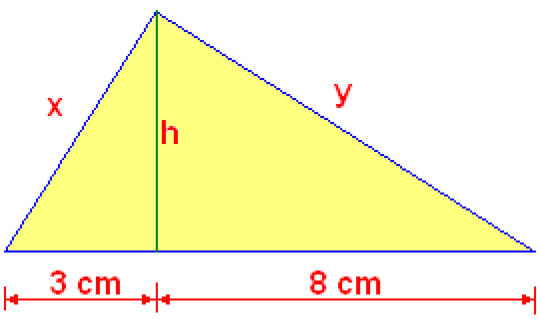
40 Un cateto de un triángulo rectángulo mide 12 cm y su proyección sobre la hipotenusa 11 cm. Halla la hipotenusa y el otro cateto.

Cateto = b = 12 cm.
Proyección sobre la hipotenusa = 11 cm

Usamos el teorema del cateto: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{b} \Leftrightarrow a = \dfrac{b^2}{b'} = \dfrac{12^2}{11} = 13{,}1$ cm mide la hipotenusa.Utilizando el teorema de Pitágoras hallamos el otro cateto c:

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13{,}1^2 - 12^2} = 5{,}25$ cm

41 Halla el valor de x, de y y de h en los siguientes triángulos rectángulos:



- Teorema de la altura:

$\dfrac{h}{3} = \dfrac{8}{h} \Leftrightarrow h^2 = 3 \cdot 8 \Leftrightarrow h = \sqrt{24}$ = 4,9 cm

- Teorema del cateto:

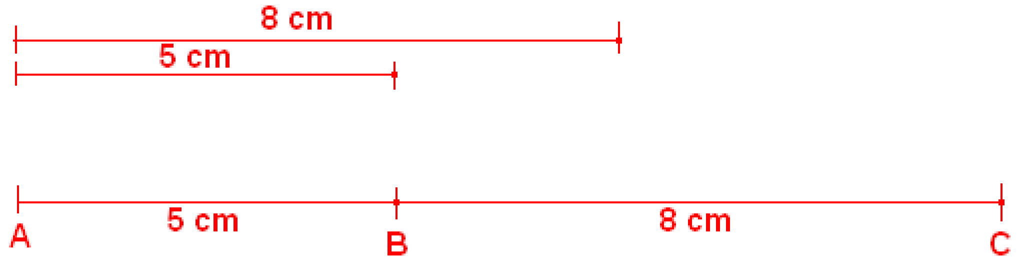
$\dfrac{x}{3+8} = \dfrac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 = 33 \Leftrightarrow x = \sqrt{33} = 5{,}74$ cm.

$$\frac{y}{3+8}=\frac{8}{y} \Leftrightarrow y^2=88 \Leftrightarrow y=\sqrt{88}=9{,}38 \text{ cm}$$

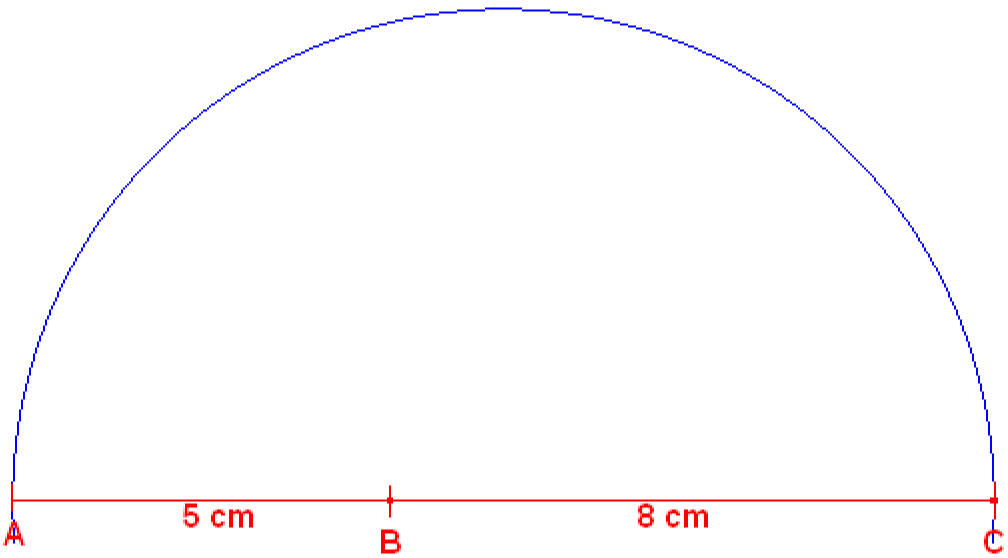
⓬ Construye el segmento media proporcional de los segmentos de longitudes 8 cm y 5 cm.

❍ Utilizando el teorema de la altura

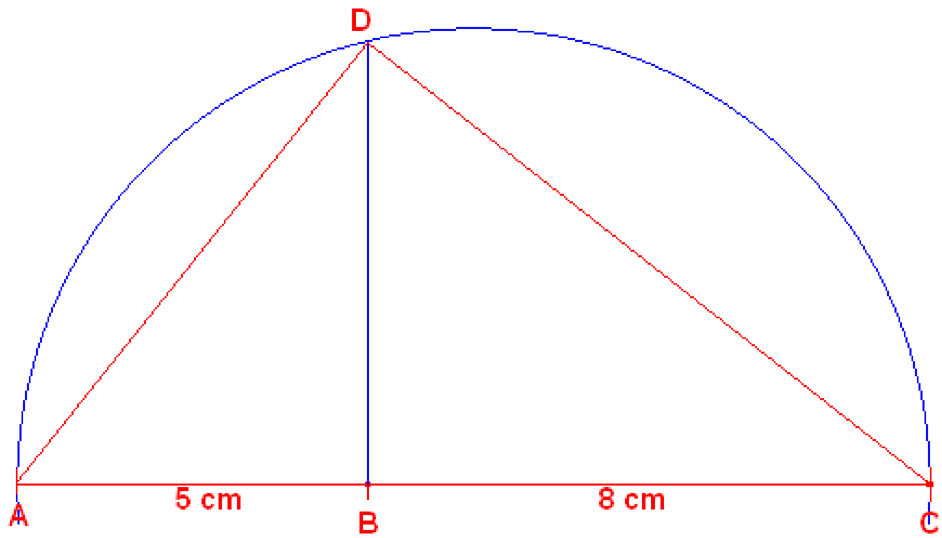
- Dibujamos los dos segmentos uno a continuación del otro (AB + BC)



- Trazamos una circunferencia de radio los extremos AC:



- Por el punto B se traza una perpendicular a AC que corta a la semicircunferencia en D:

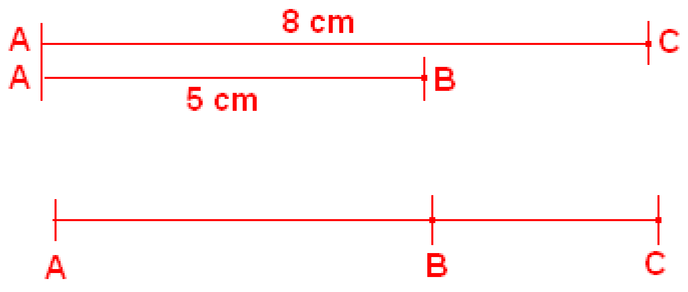


La altura del triángulo rectángulo ACD, el segmento BD, es el buscado pues cumple, según el teorema de la altura:

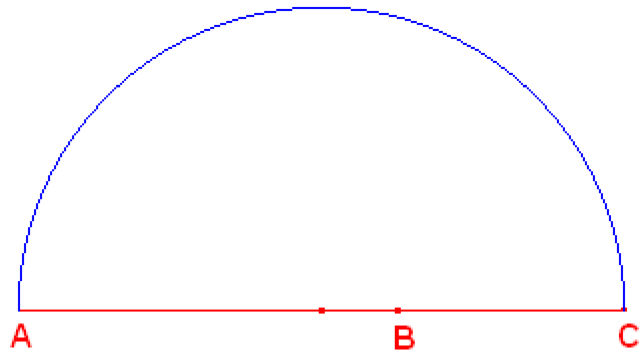
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{5} = \frac{8}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{5 \cdot 8} = 6{,}32 \text{ cm.}$$

Utilizando el teorema del cateto

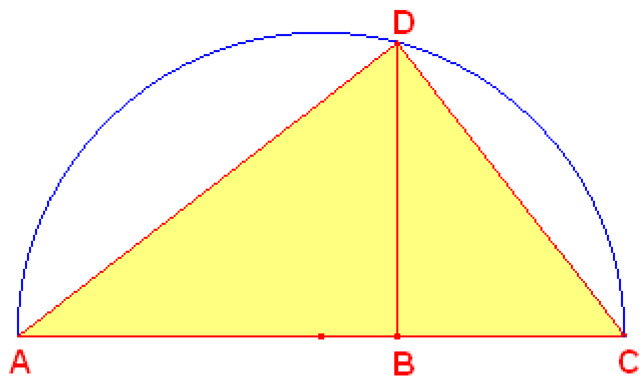
Superponemos los dos segmentos a partir de un punto común:



Trazamos la circunferencia de radio AC = 8 cm :



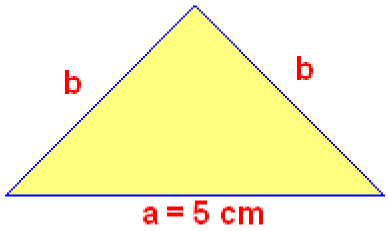
Por B trazamos la perpendicular al segmento AC que corta a la semicircunferencia en D:



El segmento DA es la media proporcional buscada, ya según el teorema del cateto:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{8 \cdot 5} = 6{,}32 \text{ cm}$$

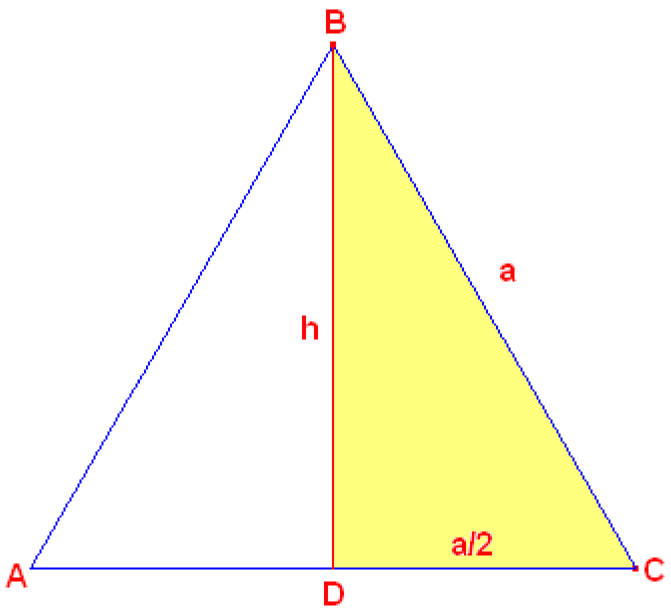
43 La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 5 cm. Calcula las longitudes de los catetos.



Al ser isósceles los dos catetos miden lo mismo, si utilizamos el teorema de Pitágoras :

$a^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54$ cm miden los catetos.

44 Halla la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.



Si nos fijamos en el triángulo rectángulo BCD que se forma al trazar una de las alturas, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la altura en función del lado:

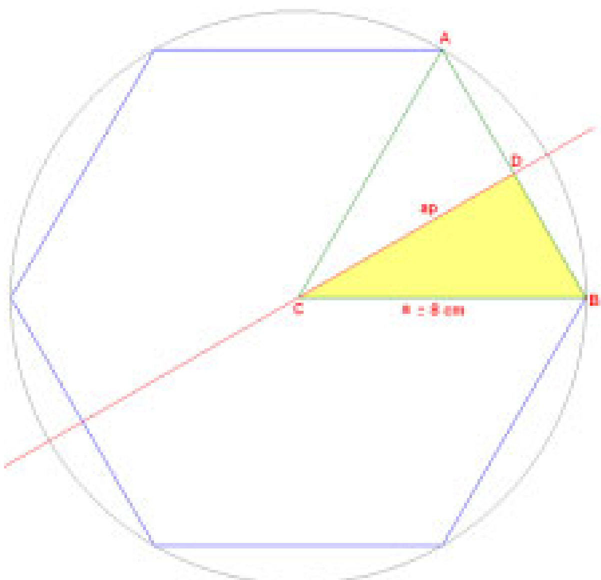
$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ y despejando h:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$$

fórmula que nos proporciona la longitud de la altura (h) en función de la del lado(a). En este caso como a = 8 cm, tendremos:

$$h = \sqrt{3}\,\frac{8}{2} = 4\sqrt{3} \approx \mathbf{6{,}93\ cm}$$

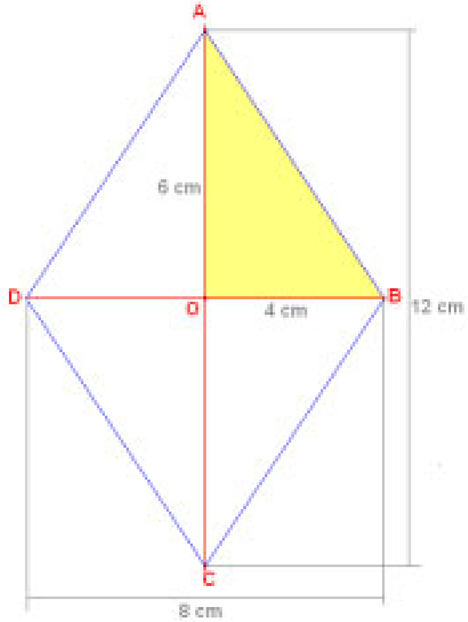
45 Calcula la apotema de un hexágono inscrito en una circunferencia de 8 cm de radio.



El problema, según vemos en el dibujo adjunto se reduce a hallar la altura del triángulo ABC que es la apotema del hexágono de lado igual al radio de la circunferencia circunscrita y ya sabemos por el problema anterior cómo hallar la altura en función de la longitud del lado:

$$ap = \sqrt{3}\,\frac{a}{2} = \sqrt{3}\,\frac{8cm}{2} = 4\sqrt{3}cm \approx \mathbf{6{,}93\ cm}$$

46 Las diagonales de un rombo miden 8 y 12 cm Calcula su perímetro.



Como vemos en la figura adjunta para hallar la longitud del lado del rombo hallamos la longitud de la hipotenusa (AB) en el triángulo rectángulo AOB:

$\overline{AB}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21$ cm.

Luego el perímetro del rombo será cuatro veces la longitud del lado:

Perímetro = 4 · 7,21 = 28,84 cm.

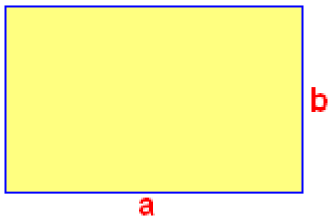
47 Calcula el área de un hexágono inscrito el una circunferencia de 6 dm de radio.

El área de un hexágono es $A = \frac{p \cdot ap}{2}$, sabemos que el perímetro p = 6a = 6 · 6 = 36 cm y hallamos la ap como hemos hecho en el nº 45:

$$ap = \sqrt{3}\,\frac{a}{2} = \sqrt{3}\,\frac{6cm}{2} = 3\sqrt{3}cm \approx \mathbf{5{,}2\ cm}$$

Luego, el área pedida es $A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6\ \ cm^2$

48 Indica las longitudes de los lados de tres rectángulos distintos de 144 cm² de área. Calcula sus respectivos perímetros.

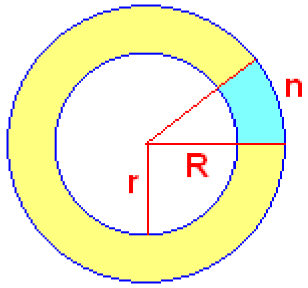


Como el área del rectángulo es a · b = 144 cm^2 , a = 144/b.

Si hacemos una tabla podemos ver la variación de las longitudes de los lados y su perímetro (p = 2a + 2b = 2(a+b)):

b	a = 144/b	p = 2(a + b)	A = a · b
3	48	102 cm	144 cm^2
6	24	60 cm	144 cm^2
12	12	48 cm	144 cm^2
24	6	60 cm	144 cm^2

49 El círculo menor de una corona circular tiene 314 cm² de área. La circunferencia exterior tiene una longitud de 94,2 cm. Calcula el área de la corona circular. Obtén el área del trapecio circular que corresponde a 30°.



$A_{Corona} = A_{círculo\ mayor} - A_{círculo\ menor}$

El $A_{círculo\ menor}$ es conocida e igual a 314 cm^2.
Para hallar el área del círculo mayor partimos de la longitud de su circunferencia, hallamos el radio(R) y después su área:

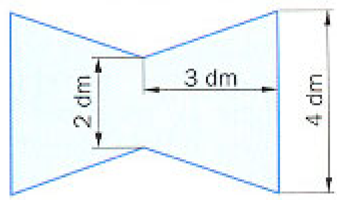
$$L = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi} = \frac{94{,}2}{2\pi} \approx 15\ \text{cm} \Rightarrow A = \pi R^2 = 706{,}86\,\text{cm}^2$$

Luego, $A_{Corona} = A_{círculo\ mayor} - A_{círculo\ menor} = 706{,}86\ \text{cm}^2 - 314\ \text{cm}^2 = 392{,}86\ \text{cm}^2$

Para hallar el área del trapecio circular de n = 30º hacemos:

$$A_{trapecio} = A_{corona}\frac{n}{360^o} = 392{,}86\frac{30^o}{360^o} = 32{,}74\ \text{cm}^2$$

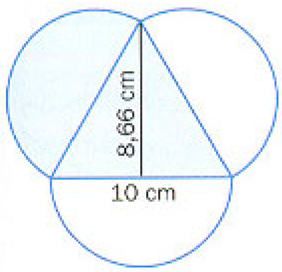
50 Calcula el área del siguiente polígono:



El polígono lo forman dos trapecios unidos por la base menor, luego el área es:

$$A_{polígono} = 2\cdot A_{trapecio} = 2\cdot\frac{B+b}{2}\cdot h = (B+b)\cdot h = (4+2)\cdot 3 = 18\ \text{dm}^2$$

51 Calcula el perímetro y el área de las figuras siguientes:



Perímetro

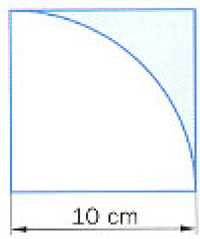
Para conocer el perímetro de la figura sombreada necesitamos saber la longitud de la semicircunferencia de radio r = 10/ 2 = 5 cm y la longitud de los dos lados del triángulo equilátero. Hallamos la longitud de la semicircunferencia:

$$L = \frac{1}{2}2\pi\cdot r = \pi\cdot r = 5\pi = 15{,}71\ \text{cm}$$

El perímetro es, pues P = 15, 71 cm + 2·10 cm = **35, 71 cm**.

Área

$$A_{sombreada} = A_{semicírculo} + A_{triángulo} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}b\cdot h = \frac{1}{2}\pi\cdot 5^2 + \frac{1}{2}10\cdot 8{,}66 = \mathbf{82{,}6\ cm^2}$$



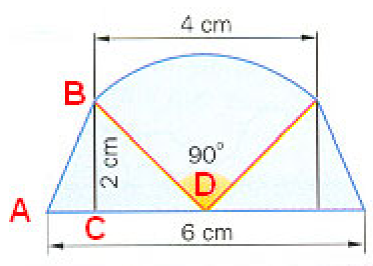
Perímetro

P = 2· lado + Longitud de un curto de circunferencia =

$$= 2\cdot 10\ \text{cm} + \frac{1}{4}2\pi\cdot 10 = 20\ \text{cm} + 5\pi = 35{,}71\ \text{cm}$$

Área

$A_{sombreada} = A_{cuadrado} - A_{un\ cuarto\ de\ círculo} = 10^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 10^2 = 78,54\ cm^2$



Perímetro

Como el triángulo BCD es un triángulo rectángulo isósceles CD = CB = 2 cm, y, por tanto AC = 3 – 2 = 1 cm, lo que necesitamos para calcular, mediante el teorema de Pitágoras, la longitud del lado AB:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$ cm

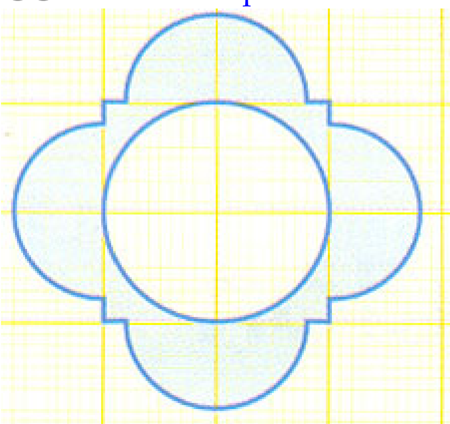
Además $\overline{BD} = \sqrt{2\overline{BC}^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ cm

Perímetro = longitud del cuarto de circunferencia + 2 · longitud de AB = $\frac{1}{4} 2\pi r + 2 \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}\pi \overline{BD}$ + 2 AB = 8,93 cm.

Área

$A_{sombreada}$ = A del cuarto de círculo + 2· A triángulo ABD = $\frac{1}{4}\pi \cdot \overline{BD}^2 + 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 2\pi + 3 \cdot 2 = 12,28\ cm^2$

52 Obtén una aproximación del área de la figura.



Como dos de los cuatro semicírculos casi rellenan el interior el área de la figura será, aproximadamente, el área del cuadrado de longitud 2 u más el área de un círculo de radio r = 1 u:

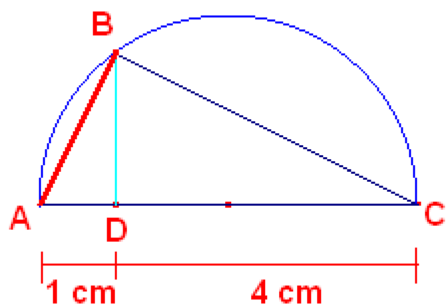
$A \approx 2^2 + \pi \cdot 1^2 = 5,14\ u^2$

53 Construye:

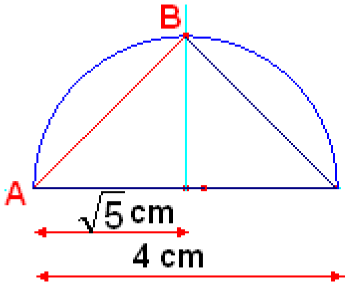
a) Un segmento de longitud $\sqrt{5}$ cm a partir del teorema del cateto.

b) El segmento media proporcional de los segmentos de longitudes $\sqrt{5}$ cm y 4 cm.

a) Como $\sqrt{5} = \sqrt{1 \cdot 5}$ construimos la media proporcional de dos segmentos de longitudes 1 y 5 usando el teorema del cateto o el de la altura (repasa el ejercicio nº 42 si no te acuerdas). Según el teorema del cateto el segmento AB tendrá de longitud $\sqrt{5}$

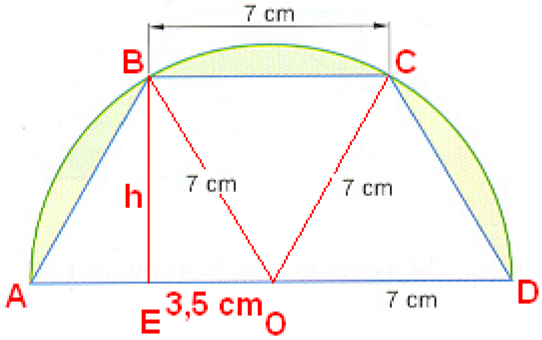


b) Como ya tenemos dibujado un segmento de longitud $\sqrt{5}$, dibujamos otro que sea media proporcional entre el anterior y otro que mida 4 cm:



El segmento AB es media proporcional: $AB = \sqrt{\sqrt{5} \cdot 4} \approx 3\text{cm}$

54 Calcula el área de la siguiente figura:



$A_{sombreada}$ = A semicírculo – Atrapecio

Necesitamos conocer la altura h, que calculamos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OEB :

$h = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} \approx 6{,}1\,\text{cm}$

Ahora ya podemos calcular el área pedida:

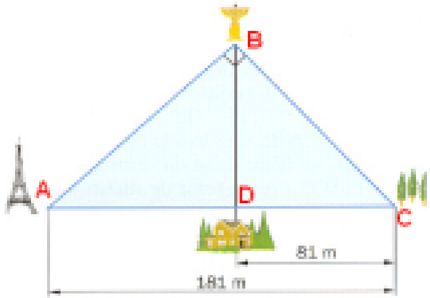
$$A_{sombreada} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 - \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot 7^2 - (14+7) \cdot 6{,}1\right) \approx 12{,}92\ \text{cm}^2$$

Problemas

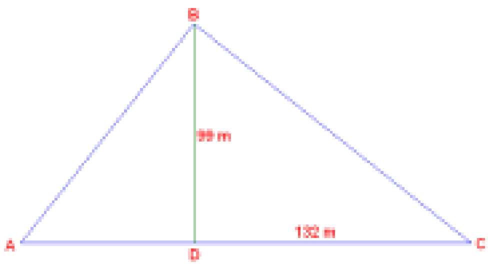
55 Halla la distancia de la casa a la fuente en el plano de la figura, sabiendo que el triángulo es rectángulo.

Se trata de hallar la altura correspondiente a la hipotenusa usando el teorema de la altura:

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \sqrt{(181-81) \cdot 81} = 90\,\text{m}$$



56 Determina la longitud de valla que será necesaria para cercar el terreno de la figura, que tiene forma de triángulo rectángulo.



Utilizamos el teorema de la altura para hallar la longitud del segmento AD:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{99}{\overline{AD}} = \frac{132}{99} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{99 \cdot 99}{132} = 74{,}25\ \text{cm}$$

Ahora aplicamos el teorema del cateto para hallar los catetos AB y BC:

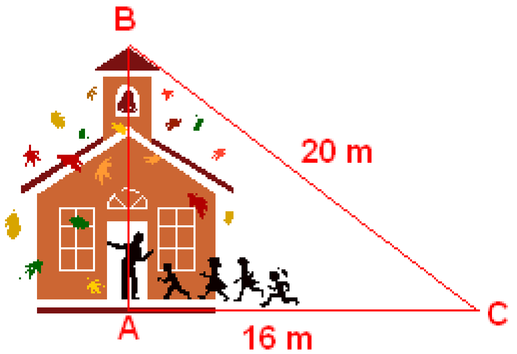
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} = \sqrt{(132 + 74{,}25) \cdot 74{,}25} = 123{,}75 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{DC}} = \sqrt{(132 + 74{,}25) \cdot 132} = 165 \text{ cm}$$

Ya podemos hallar el perímetro del triángulo sumando las longitudes de la hipotenusa y de los dos catetos:

Perímetro = (132 + 74,25) cm + 123,75 cm + 165 cm = 495 cm.

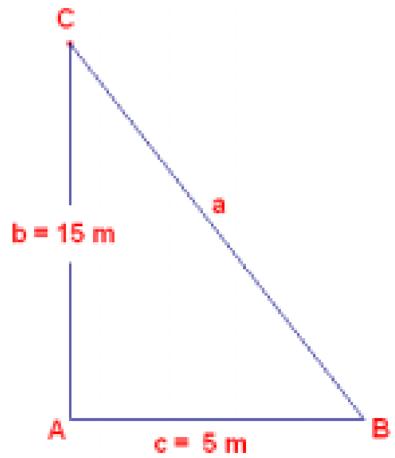
57 ¿Cuál es la altura de una torre que proyecta una sombra de 16 m si la distancia desde el punto más alto de la torre al extremo de la sombra es de 20 m?



Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del cateto AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ m de altura.}$$

58 Romeo quiere hacer una visita a Julieta. Calcula la longitud de la escalera para que pueda subir hasta la ventana de su enamorada, sabiendo que se encuentra a una altura de 15 m y que la anchura del foso que circunda la torre del castillo es de 5 m.



Es un caso típico de aplicación del teorema de Pitágoras en que hemos de hallar la hipotenusa a :

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} = 15{,}8$ m ha de medir como mínimo la escalera.

59 Queremos poner una etiqueta alrededor de un envase cilíndrico cuyas dimensiones son 11 cm de altura y 10 cm de diámetro. Calcula las medidas de los lados de la etiqueta y su área.

L etiqueta será un cuadrado de alto la altura del cilindro y ancho la longitud de la circunferencia de la base:

Largo = $2\pi r = 2\pi \cdot 5$ cm = 31,4 cm . Ancho = 11 cm.

Área = largo por ancho = 31,4 cm · 11 cm = 345,4 cm^2.

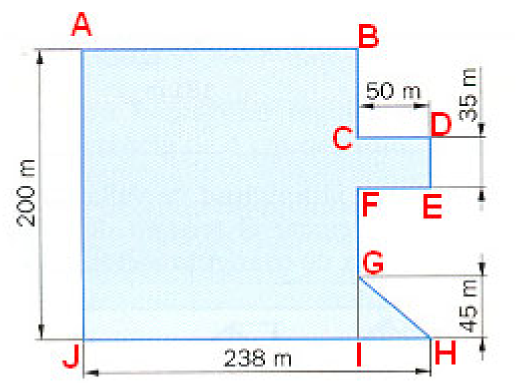
60 La base de un edificio de forma pentagonal regular tiene una superficie de 2000 m^2, y la distancia desde el centro del recinto a una de sus puertas es de 25 m.

- ¿Cuál es la longitud de cada una de las fachadas del edificio?

Conocemos su área A = 2 000 m^2 y la apotema ap = 25 m, luego aplicando la fórmula del área de un polígono podemos hallar el perímetro y como es un polígono regular, la longitud de uno de sus lados:

$$A = \frac{5 \cdot l \cdot ap}{2} \Rightarrow l = \frac{2A}{5 \cdot ap} = \frac{2 \cdot 2000}{5 \cdot 25} = 32 \text{ cm mide cada una de las fachadas del edificio.}$$

61 Un terreno destinado a la construcción de una granja escuela tiene la forma de la figura. Calcula el precio total de dicho terreno si un metro cuadrado cuesta 9 €.



Descomponemos el terreno en tres partes:

Un rectángulo (ABJI) de 200m x (238 – 50), cuyo área será A_1 = 200 m · 188 m = 37 600 m^2.

Otro rectángulo (CFDE) de dimensiones 50 m x 35 m, cuyo área es A_2 = 50 m · 35 m = 1 750 m^2.

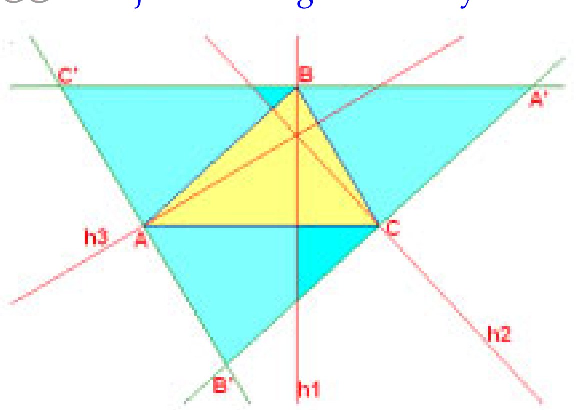
Un triángulo rectángulo (GHI) cuyo área es:

$$A_3 = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{50 \cdot 45}{2} = 1\,125 \text{ m}^2$$

El área total es la suma A = 37 600 m^2 + 1 750 m^2 + 1 125 m^2 = 40 475 m^2.
Su coste es 40 475 m^2 · 9 €/ m^2 = 364 275 €.

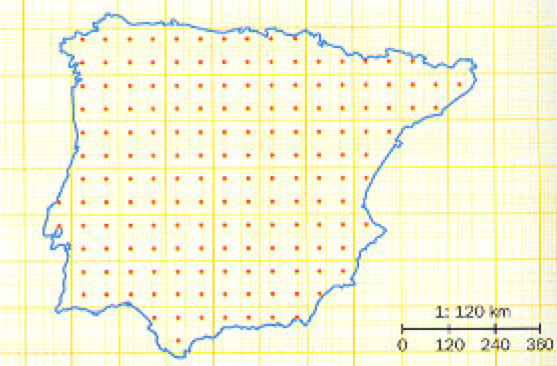
Más a fondo

62 Dibuja un triángulo ABC y señala sus alturas. A continuación, construye el triángulo A'B'C', que se obtiene al trazar por cada vértice de ABC la paralela al lado opuesto, y comprueba que las alturas de ABC coinciden con las mediatrices de A'B'C'.



Efectivamente los vértices A B y Cson los puntos medios de los lados B'C', C'A' y A'B' respectivamente y como las alturas son perpendiculares a los lados de ABC, también lo son a los lados de A'B'C' luego si pasan por el punto medio y son perpendiculares a los lados son las mediatrices, se puede trazar la circunferencia circunscrita a A'B'C' con centro en el ortocentro de ABC.

63 Calcula el valor aproximado del área de la península Ibérica, sabiendo que la escala de su representación es 1: 120 km.



Indicación: Recuerda que se cumple la relación

$$\frac{A_{real}}{A_{mapa}} = k^2$$

Hallamos, de forma aproximada, el área del mapa contando los cuadros:

$A_{mapa} = 42\ u^2$, luego en la realidad $A_{real} = 42 \cdot 120^2 = 604\ 800\ km^2$ es la superficie aproximada de la península ibérica.