❶❾ *Se extraen dos cartas de una baraja española de 40 cartas en dos extracciones consecutivas. Sean los sucesos A_1 : la primera es figura; A_2 : la segunda es figura; B_1 : la primera es de oros; B_2 : la segunda es de oros. Halla la probabilidad de los sucesos $A_1 \cap A_2$ y $B_1 \cap B_2$ en estos casos:*

a) Hay reposición de la primera carta.
b) No hay reposición de la primera carta.

---oo0oo---

a) Al realizarse reposición, la primera extracción no condiciona la 2ª, de forma que la probabilidad de extraer una figura en ambas es, según la regla de Laplace, p(A) = figuras/cartas = 12/40, y lo mismo para los oros p(B) = oros/ cartas = 10 / 40 = ¼, luego :

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{144}{1600} = \frac{9}{100}$$

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) = p(B_1) \cdot p(B_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

b) Al no haber reposición la primera extracción condiciona la 2ª, de forma que quedan un caso menos de los favorables y otro menos de los posibles o totales, luego:

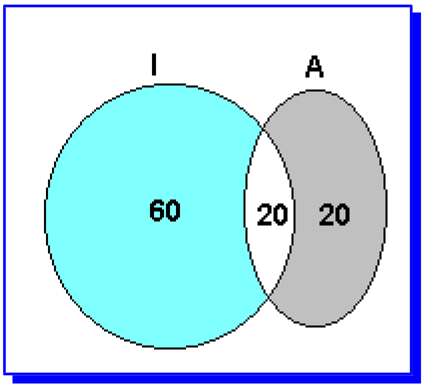
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{132}{1560} = \frac{11}{130}$$

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = \frac{9}{156} = \frac{3}{52}$$

❷⓪ *A unas jornadas científicas asisten 100 científicos, de los cuales, 80 hablan inglés y 40, alemán. ¿Cuál es la probabilidad de que elegidos dos científicos al azar no puedan entenderse sin intérprete?*

---oo0oo---

Suponemos que todos los científicos hablan uno de los dos idiomas o los dos, como son 100 y hay 40 que hablan alemán, habrá 100 - 40 = 60 que hablan inglés solamente, como hay 80 que hablan el inglés, de ellos 80 - 60 = 20 hablan los dos idiomas, por tanto 40 - 20 = 20 hablan sólo alemán, esta distribución la representamos en un diagrama de Venn:



Para que dos científicos no puedan entenderse han de hablar idiomas distintos:

1º hable inglés pero no alemán y el segundo hable alemán pero no inglés o viceversa, es decir :

p(no se entiendan) = p (1º hable sólo ingles y el 2º solo alemán ó el 1º hable sólo alemán y el 2º sólo hable inglés) :

$$p\{[(I\cap\overline{A})_1\cap(A\cap\overline{I})_2]\cup[(\overline{I}\cap A)_1\cap(\overline{A}\cap I)_2]\} = p[(I\cap\overline{A})_1\cap(A\cap\overline{I})_2]+p[(\overline{I}\cap A)_1\cap(\overline{A}\cap I)_2]=$$

$$=\frac{60}{100}\cdot\frac{20}{99}+\frac{20}{100}\cdot\frac{60}{99}=2\cdot\frac{1200}{9900}=\frac{24}{99}=\frac{8}{33}=0'\widehat{24}$$

❁❁❁❄❄✲❄❄❁❁❁

❷❶ *Dos sucesos A y B son independientes. Sabiendo que P(A) = 0,92 y P(B) = 0,18, calcula* $p(\overline{A}\cap\overline{B})$. *¿Son independientes los sucesos A y B ?*

---oo0oo---

❍ Según las leyes de Morgan:

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$$

Además la fórmula de la probabilidad de la unión es :

p(A $\cup$ B) = p(A) + p(B) - p(A$\cap$B) = p(A) + p(B) - p(A) · p(B) , pues A y B independ

Luego la probabilidad pedida es :

$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-$[p(A) + p(B) - p(A) · p(B)] = 1-[0'92+0'18-0'92·0'18] =

=1 - 0'9344= **0'0656**

❍ Para comprobar que son independientes hemos de comprobar si la intersección es igual al producto, la intersección la hemos hallado en el apartado anterior, veamos el producto:

$$p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})=[1-p(A)]\cdot[1-p(B)]=(1-0'92)\cdot(1-0'18)=0'08\cdot 0'82=0'0656=p(\overline{A}\cap\overline{B})$$

Por tanto **sí son independientes**.

❁❁❁❄❄✲❄❄❁❁❁

❷❷ *Un estudiante de Geografía busca una pirámide de población en tres manuales. La probabilidad de que la encuentre en el primero, el segundo o el tercer manual es, respectivamente, 0'5, 0'6 y 0'7. Halla la probabilidad de que la encuentre:*

a) Sólo en un manual.
b) Exactamente en dos manuales.
c) En los tres manuales.

---oo0oo---

Sea :

p(1) = probabilidad de que encuentre la pirámide en el 1er manual = 0'5

p(2) = probabilidad de que encuentre la pirámide en el 2º manual = 0'6

p(3) = probabilidad de que encuentre la pirámide en el 3er manual = 0'7

Los tres sucesos son independientes.

a) p(de la encuentre en un sólo en un manual) = p(A)

$p(A) = p[$(sólo en el 1)ó (sólo en el 2) ó (sólo en el 3)]=$p[(1\cap\bar{2}\cap\bar{3})\cup(\bar{1}\cap 2\cap\bar{3})\cup(\bar{1}\cap\bar{2}\cap 3)] =$

$p(1\cap\bar{2}\cap\bar{3}) + p(\bar{1}\cap 2\cap\bar{3}) + p(\bar{1}\cap\bar{2}\cap 3) = p(1)\cdot p(\bar{2})\cdot p(\bar{3}) + p(\bar{1})\cdot p(2)\cdot p(\bar{3}) + p(\bar{1})\cdot p(\bar{2})\cdot p(3) =$

= 0'5·0'4·0'3 + 0'5·0'6·0'3 + 0'5·0'4·0'7 =**0'29 (29 %)**

b) p(la encuentre exactamente en 3) = p(B), escribimos la posibles combinaciones

$p(B) = p[$(en el 1 y 2) ó (en el 1 y 3) ó (en el 2 y el 3) = $p[(1\cap 2\cap\bar{3})\cup(1\cap\bar{2}\cap 3)\cup(\bar{1}\cap 2\cap 3)] =$

$p(1\cap 2\cap\bar{3}) + p(1\cap\bar{2}\cap 3) + p(\bar{1}\cap 2\cap 3) = p(1)\cdot p(2)\cdot p(\bar{3}) + p(1)\cdot p(\bar{2})\cdot p(3) + p(\bar{1})\cdot p(2)\cdot p(3) =$

= 0'5·0'6·0'3+0'5·0'4·0'7+0'5·0'6·0'7 =**0'44 (44 %)**

c) p(En los tres) = p(C)

$p(C) = p($en el 1 y en el 2 y en el 3)= $p(1\cap 2\cap 3) = p(1)\cdot p(2)\cdot p(3)$ =0'5·0'6·0'7 = 0'21 (21%)

❁❁❁❃❃✲❃❃❁❁❁

❷❸ *La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es 0' 6 y 0' 7, respectivamente. Calcula la probabilidad de que:*

a) Ambos vivan 50 años más.
b) Viva sólo la mujer.
c) No viva ninguno de los dos más de 50 años.

---oo0oo---

Sea :
H = el hombre vive más de 50 años.
M = la mujer viva más de 50 años.

Son independientes.

a) p(A)= p(ambos vivan 50 o más años) = p(el hombre viva 50 y la mujer también)

$p(A)=p(H\cap M)=p(H)\cdot p(M/H)=p(H)\cdot p(M)=0'6\cdot 0'7=0'42$ (42 %)

b) p(B) = p(viva sólo la mujer 50 o más) = p(el Hombre no viva 50 o + y la Mujer sí)

$p(B)=p(\overline{H}\cap M)=p(\overline{H})\cdot p(M/\overline{H})=p(\overline{H})\cdot p(M)=[1-p(H)]\cdot p(M)=(1-0'6)\cdot 0'7=0'4\cdot 0'7=0'28$

c) p(C) = p (no viva ninguno 50 ó +) = p (no los viva el H y no los viva la M)

$p(\overline{H}\cap\overline{M})=p(\overline{H})\cdot p(\overline{M}/\overline{H})=p(\overline{H})\cdot p(\overline{M})=[1-p(H)]\cdot[1-p(M)]=0'4\cdot 0'3=0'12$ (12 %)

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❷❹ *A un paciente se le aplican tres sueros, independientemente, con probabilidades de éxito 0' 9, 0' 95 y 0'92. Halla la probabilidad de que el paciente sane.*

---oo0oo---

Sea:

A = suceso consistente en que el primer suero tiene éxito.
B = suceso consistente en que el segundo suero tiene éxito.
C = suceso consistente en que el tercer suero tiene éxito.

p(paciente sane) = p(tenga éxito algún suero) = 1- p (ningún suero tenga éxito) = 1 - p (no le cure el primero y no le cure el segundo y no le cure el tercero) =
$=1-p(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-p(\overline{A})\cdot p(\overline{B}/\overline{A})\cdot p(\overline{C}/(\overline{A}\cap\overline{B})=1-p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})\cdot p(\overline{C})=1-0'1\cdot 0'05\cdot 0'08=$

1 - 0'004 = **0'9996** .

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❷❺ *Los datos de votantes en las últimas elecciones correspondientes a una determinada ciudad muestran que el 73,5 % de los hombres censados ejerció su derecho a voto, mientras que el porcentaje de mujeres censadas que no lo ejerció fue del 42,9%. El censo de esta ciudad está compuesto por un 48 % de los hombres y un 52 % de las mujeres. De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcula la probabilidad de que esta persona:*

a) Haya votado.
b) Haya votado y sea hombre.
c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

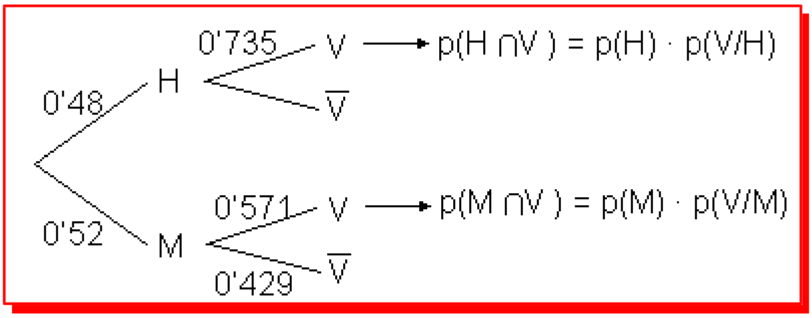
---oo0oo---

Sea :

H = hombre censado; M = mujer censado y V = han votado.

los datos son p (H) = 0'48, p(M) = 0'52, p(V/H) = 0'735 y p(V/M) = 1- 0'429 = 0'571.

Hagamos el diagrama en árbol :



a) p (haya votado) = p (V) , aplicando el teorema de la probabilidad total (es un sistema completo de sucesos) será las suma de las probabilidades de las dos ramas que conducen a V:

p(V) = p (H∩ V) + P (M∩ V) = p (H) · P(V/H) + p(M) · p(V/M) = 0’48 · 0’735 + 0’52 · 0’571 =
= 0’3528 + 0’29692 = **0’64972 (65 %).**

b) p (Haya votado y sea hombre) = p (H∩ V) =p (H) · P(V/H) =0’48 · 0’735 = **0’3528**.

c) p(sean mujer sabiendo que ha votado) = p (M / V) es la típica aplicación del teorema de Bayes :

$$p(M/V)=\frac{p(M\cap V)}{p(V)}=\frac{p(M\cap V)}{p(H\cap V)+p(M\cap V)}=\frac{p(M)\cdot p(V/M)}{p(H)\cdot p(V/H)+p(M)\cdot P(V/M)}=\frac{0'52\cdot 0'571}{0'64972}=0'457$$

❀❀❀❄❄✲❄❄❀❀❀

❷❻ *En un país se sabe que una de cada 145 personas tiene una determinada enfermedad. En este mismo país se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, bastante fiable, pero no del todo segura. Concretamente, si un individuo tiene la enfermedad, la prueba da positiva en un 96 % de los casos, mientras que si no la tiene, la prueba da positiva en un 6% de los casos. Si un ciudadano se hace la prueba y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el diagnóstico sea erróneo?*

---oo0oo---

Nominemos los sucesos :

E = tener la enfermedad, P 0 que la prueba de positiva.

Los datos son : p(E) = 1 / 145 =0’0069; p(P/E) = 0’96 y $p(P/\bar{E})$ = 0’06

se nos pide P (diagnóstico sea erróneo/ si la prueba ha dado positiva), es una aplicación del teorema de Bayes :

$$p(\bar{E}/P)=\frac{p(\bar{E}\cap P)}{p(P)}=\frac{p(\bar{E})\cdot p(P/\bar{E})}{p(E)\cdot p(P/E)+p(\bar{E})\cdot p(P/\bar{E})}=\frac{(1-0'0069)\cdot 0'06}{0'0069\cdot 0'96+(1-0'0069)\cdot 0'06}=\frac{0'05959}{0'06621}=0'9$$

❀❀❀❄❄✲❄❄❀❀❀

❷❼ *En un plato hay 20 cerezas, 4 de las cuales están picadas. Una de ellas se cae en otro plato que contenía 6 cerezas picadas y 18 sanas. Si cogemos, al azar, una cereza del segundo plato, calcula la probabilidad de que:*

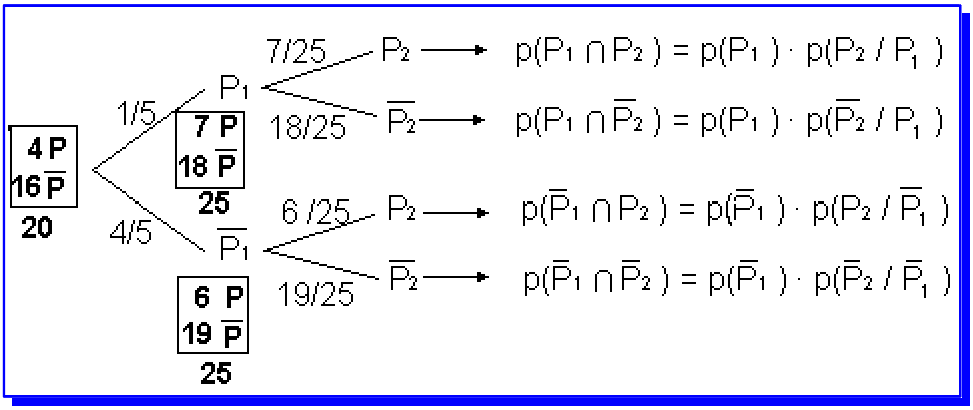
a) Haya caído una cereza picada, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.
b) Haya caído una cereza sana, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.

---oo0oo---

Nominemos los sucesos:

P_1 = la cereza que cae al segundo plato está picada.
P_2 = la cereza que se saca del segundo plato está picada

Construyamos el diagrama en árbol y asignemos probabilidades :



a) p (haya caído una cereza picada sabiendo que la sacada del segundo plato sí estaba picada), es aplicación del teorema de Bayes :

$$p(P_1/P_2)=\frac{p(P_1\cap P_2)}{p(P_2)}=\frac{p(P_1)\cdot p(P_2/P_1)}{p(\overline{P}_1)\cdot p(P_2/\overline{P}_1)+p(P_1)\cdot p(P_2/P_1)}=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{25}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{25}+\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{25}}=\frac{\frac{7}{125}}{\frac{31}{125}}=\frac{7}{31}=0'2258\ (22'6\ \%)$$

b) p(la primera fuese sana sabiendo que la sacada del segundo plato estaba picada)

$$p(\overline{P}_1/P_2)=1-p(P_1/P_2)=1-\frac{7}{31}=\frac{24}{31}=0'7742\ (\ 77'4\ \%)$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❷❽ *Un autobús recorre diariamente un trayecto de ida y vuelta entre dos ciudades. La probabilidad de que ocurra un accidente un día sin lluvia es 0,004 y la probabilidad de que suceda un día de lluvia es 0,08. Una semana hubo 5 días sin lluvia y 2 de lluvia. Sabiendo que esa semana ocurrió un accidente, calcula la probabilidad de que sucediera un día sin lluvia.*

---oo0oo---

Nominamos los sucesos:

L = día que lleve; A = ocurre un accidente.
Datos :

$$p(L)=\frac{2}{7};\ p(\bar{L})=\frac{5}{7};\ p(A/L)=0'08;\ \ p(A/\bar{L})=0'004$$

p(no lloviera sabiendo que ha ocurrido un accidente), usamos de nuevo el teorema de Bayes :

$$p(\bar{L}/A)=\frac{p(\bar{L}\cap A)}{p(A)}=\frac{p(\bar{L})\cdot p(A/\bar{L})}{p(L)\cdot p(A/L)+p(\bar{L})\cdot p(A/\bar{L})}=\frac{\frac{5}{7}\cdot 0'004}{\frac{2}{7}\cdot 0'08+\frac{5}{7}\cdot 0'004}=\frac{\frac{0'02}{7}}{\frac{0'18}{7}}=\frac{0'02}{0'18}=0'\hat{1}$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❷❾ *Se tiene una baraja española completa y otra baraja de 4 cartas con los cuatro reyes. Se escoge al azar una carta de la baraja de 4 cartas y se introduce en la baraja completa. Calcula la probabilidad de que al extraer una carta de esta última baraja sea el rey de espadas.*

---oo0oo---

Sean :

RO = sacar el rey de oros de la baraja de 4 cartas.
RC = sacar el rey de copas de la baraja de 4 cartas.
RE = sacar el rey de espadas de la baraja de 4 cartas.
RB = sacar el rey de bastos de la baraja de 4 cartas.
E = sacar el rey de espadas de la baraja de 49 (48 más el rey añadido)

Es un ejercicio del teorema de la probabilidad total :

p(E) = p(RO ∩ E) + p(RC ∩ E) + p(RE ∩ E) + p(RB ∩ E) = p(RO) · p(E/RO) + p(RC) · p(E/RC) +p(RE) · p(E/RE) +p(RB) · p(E/RB) = (1/4) · (1/49) + (1/4) · (1/49) + (1/4) · (2/49) + (1/4) · (1/49) = 5/196 = **0’0255**

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❸⓿ *Una fábrica produce tres tipos de bolígrafos diferentes, A, B y C. El número de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo y salen defectuosos un 15‰ de todos los de tipo A, un 3‰ de todos los de tipo B y un 7‰ de todos los de tipo C. En un control de calidad se detecta el 70% de todos los bolígrafos defectuosos de tipo A, el 80 % de los de tipo B y el 90 % de los de tipo C. Los bolígrafos defectuosos detectados en ese control se tiran. Si cogemos al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se ha tirado, halla cuál es la probabilidad de que sea de tipo A.*

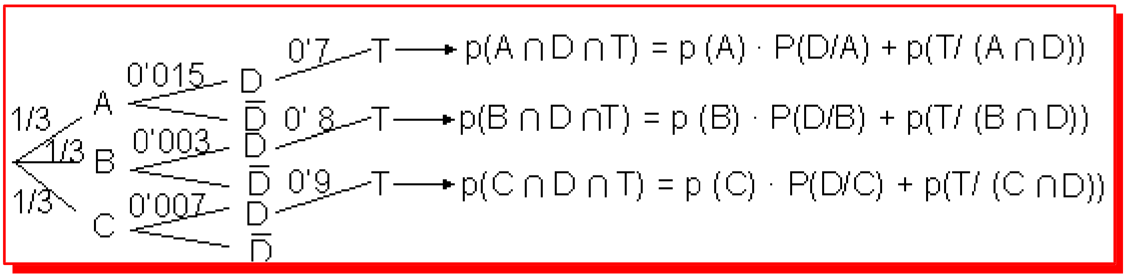
---oo0oo---

Nominemos los sucesos :

A = bolígrafos de tipo A, B = bolígrafos de tipo B, C = bolígrafos de tipo C

D = bolígrafo defectuoso
T = bolígrafo detectado defectuoso y tirado.

Ahora construyamos el diagrama en árbol y asignemos probabilidades:



se nos pide p(sea del tipo sabiendo que ha sido tirado), teorema de Bayes :

$$p(A/(D \cap T)) = \frac{p(A \cap D \cap T)}{p(D \cap T)} = \frac{p(A \cap D \cap T)}{p(A \cap D \cap T) + p(B \cap D \cap T) + p(C \cap D \cap T)} =$$

$$= \frac{p(A) \cdot p(D/A) \cdot p(T/(A \cap D)}{p(A) \cdot p(D/A) \cdot p(T/(A \cap D) + p(B) \cdot p(D/B) \cdot p(T/(B \cap D) + p(C) \cdot p(D/C) \cdot p(T/(C \cap D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'015 \cdot 0'7}{\frac{1}{3} \cdot 0'015 \cdot 0'7 + \frac{1}{3} \cdot 0'003 \cdot 0'8 + \frac{1}{3} \cdot 0'007 \cdot 0'9} =$$

$$= \frac{0'0105}{0'0105 + 0'0024 + 0'0063} = \frac{0'0105}{0'0192} = \frac{105}{192} = 0'54688$$

❀❀❀❄❄✲❄❄❀❀❀