ACTIVIDADES

Cuestiones

❶ *Razona si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas, y describe el espacio muestrai de los experimentos que sean aleatorios:*

a) Lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz.
b) Verter aceite en un recipiente con agua y observar si se mezclan.
c) Extraer una carta de una baraja y mirar de qué palo es.

---oo0oo---

a) Es aleatorio, pues aunque reproduzcamos exactamente las condiciones iniciales del experimento no podemos predecir, de antemano, en cada lanzamiento si sale cara o cruz.

$$\Omega = \{ \text{cara, cruz} \}$$

b) Es determinista, pues antes de realizar el experimento podemos predecir el resultado: no se mezclan se basa en sus propiedades físico - químicas.

c) Es aleatorio, pues aunque reproduzcamos exactamente las condiciones iniciales del experimento no podemos predecir, de antemano, en cada lanzamiento si sale un palo u otro.

$$\Omega = \{ \text{oros, copas, espadas, bastos} \}$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❷ *Sean dos sucesos incompatibles. Los sucesos contrarios a éstos, ¿ son también incompatibles ? Razona tu respuesta.*

---oo0oo---

Dos sucesos son incompatibles si su intersección es nula.

No siempre sus complementarios son incompatibles. Supongamos que tenemos en una urna 3 bolas : blanca (b), roja (r), azul (a). El suceso A = { extraer bola blanca } es incompatible con el suceso B = { extraer bola azul} y sin embargo sus complementarios :

$$\overline{A} = \{\text{no extraer bola blanca}\} = \{ r, a \} \text{ y } \overline{B} = \{ \text{No extraer bola azul} \} = \{ b, r \}$$

no son incompatibles pues su intersección es no nula :

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{r\}$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❸ *¿ Entre qué valores está comprendida la probabilidad de un suceso ? Razona tu respuesta.*

---oo0oo---

Entre cero y uno.

$$0 \leq P(S) \leq 1$$

Ya que el cardinal del conjunto asociado al suceso pude estar entre el vacío y espacio muestral.

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❹ *Sabiendo que la probabilidad de un suceso A es P(A) = 0,6, ¿ entre qué valores estará comprendida la probabilidad de un suceso B incluido en A ? Razona tu respuesta.*

---oo0oo---

Se cumple :

$$\emptyset \subseteq B \subseteq A \Rightarrow p(\emptyset) \leq p(B) \leq p(A) \Leftrightarrow 0 \leq p(B) \leq 0'6$$

es decir **la probabilidad de B estará comprendida en el intervalo [0, 0'6]**

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❺ *Dos sucesos incompatibles, ¿ son independientes ? Razona tu respuesta.*

---oo0oo---

No tienen nada que ver:

❈ Son incompatibles si su intersección es nula.

❈ Son independientes si no se condicionan mutuamente.

Si realizamos dos extracciones consecutivas sin reemplazamiento de una carta de la baraja, los sucesos A = extraer el as de copas y B = extraer el rey de bastos, son incompatibles pues su intersección es nula, pero no son independientes pues la primera extracción condiciona la segunda (queda una carta menos).

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

Ejercicios y problemas

❻ *Calcula la probabilidad de que al lanzar tres monedas obtengas:*

a) Tres caras.
b) Al menos una cruz.
c) Más cruces que caras.

---oo0oo---

a) Vamos a resolverlo de dos formas:

◆ $p(3C) = p\ (C_1 \cap C_2 \cap C_3) = p(C_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

◆ El espacio muestral es : Ω = { (c, c, c), (c, c, +), (c, + , c) , (+, c, c), (c, +, +), (+, + , c), (+ , c, +), (+, + , +) }, que consta de 8 elementos, aplicando la regla de Laplace :

$$p(3c) = \frac{\text{casos con 3 caras}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{8}$$

b) Como lo contrario de sacar al menos una cruz es no sacar ninguna, podemos resolver de forma más fácil este ejercicio por el complementario:

$$p(\text{ al menos una cruz}) = 1 - p(\text{ no sacar ninguna cruz}) = 1 - p(3c) = 1- \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) Aplicamos la regla de Laplace:

$$p(\text{ más + que c}) = \frac{\text{caos en que hay más cruces que caras}}{\text{caos totales}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

pues los casos en que hay más cruces que caras son 4 :{ (c, +, +), (+, + , c), (+ , c, +), (+, + , +) }.

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❼ *Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes:*

A: la suma de las caras es 5.
B: la suma de las caras es 10.
C: la suma de las caras es menor o igual que 5.

---oo0oo---

Construimos la tabla de la suma de las caras superiores:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Los casos favorables a cada suceso :

❍ Se ha coloreado de azul claro los casos que suman 5 : 4 casos.
❍ De color rojo- anaranjado los que suman 10 : 3 casos.
❍ Se han punteado los caos cuya suma es menor o igual a 5 : 10 casos

Aplicamos la regla de Laplace :

$$p(A)=\frac{\text{casos que suman 5}}{\text{casos totales}}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$p(B)=\frac{\text{casos que suman 10}}{\text{casos totales}}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$p(C)=\frac{\text{casos que suman 5 o menos}}{\text{casos totales}}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

❁❁❁❄❄✲❄❄❁❁❁

❽ *Se lanzan un dado y una moneda. Halla P(A ∪ B) siendo A y B los sucesos siguientes: A: la moneda muestra cara y B: el dado muestra una cara menor o igual que 3.*

---oo0oo---

En vez del diagrama en árbol, que ocupa más espacio, hacemos la tabla :

	1	2	3	4	5	6
c	c, 1	c, 2	c, 3	c, 4	c, 5	c, 6
+	+, 1	+, 2	+, 3	+, 4	+, 5	+, 6

en donde hemos resaltado :

⦿ Los elementos de **A** : sacar cara, con fundo azul claro (6)

⦿ Los elementos de **B** : sacar igual o menos de 3 en el dado, con fondo punteado (6).

⦿ Los elementos de la intersección (cara en la moneda y menor o igual a 3 en el dado), de color rojo (o ambas cosas a la vez) (3).

Lo resolvemos de dos maneras :

⌗ Mediante las fórmulas de las propiedades de la probabilidad:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{6}{12}+\frac{6}{12}-\frac{3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0'75(75\%)$$

Directamente aplicando la regla de Laplace:

$$p(A\cup B)=\frac{\text{caos en que hay o car o un número} \leq 3\text{, o ambos}}{\text{casos totales}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0'75$$

ya que los caos favorables son los 9 que están de azul, punteados o ambas cosas

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❾ *Efectuamos dos extracciones con reposición en una urna que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. ¿ Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea igual a cuatro ?*

---oo0oo---

Construyamos la tabla y señalemos los casos favorables (fondo azul claro):

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Ya podemos aplicar la regla de Laplace:

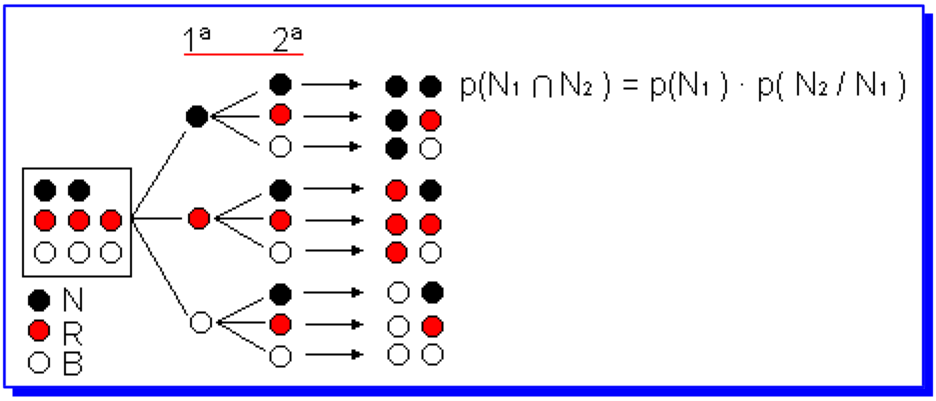
$$p(\text{suma} = 4) = \frac{\text{casos en que la suma es 4}}{\text{casos posibles o totales}} = \frac{3}{25} = 0'12 \text{ (12 \%)}$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❿ *En una urna hay tres bolas blancas, tres bolas rojas y dos bolas negras. Se extraen dos bolas sin reposición. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener las dos bolas negras ? ¿ Y si la extracción es con reposición ?*

---oo0oo---

Hacemos el diagrama en árbol :



⊗ Sin reposición:

$$p(N_1) = \text{bolas negras/ total de bolas} = 2/8 = 1/4$$

$$p(N_2/N_1) = \frac{\text{bolas negras después de sacar la } 1^{a}\text{negra}}{\text{bolas que quedan después de sacar la } 1^{a} \text{ negra}} = \frac{1}{7}$$

luego:

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$$

⊗ Con reposición:

$p(N_1)$ = bolas negras/ total de bolas = 2/ 8 = ¼

$$p(N_2/N_1) = p(N_2) = \frac{\text{bolas negras}}{\text{bolas totales}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

luego:

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) = p(N_1) \cdot p(N_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

❁❁❁❉❉✲❉❉❁❁❁

❶❶ *En un trayecto de metro utilizamos dos escaleras mecánicas A y B. La escalera A está averiada uno de cada diez días; la escalera B, uno de cada siete, y las dos escaleras se averían independientemente. Halla la probabilidad de que al efectuar un viaje:*

a) Como mínimo haya una averiada.
b) No haya ninguna escalera averiada.
c) Haya exactamente una escalera averiada.

---oo0oo---

Hallamos primero :

$$p(A) = \frac{1}{10};\ p(B) = \frac{1}{7};\ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{70}$$

(nos dicen que A y B son independientes, luego p(B/A)= p(B))

a) p (como mínimo una averiada) = p ($A \cup B$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{70} = \frac{7+10-1}{70} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

b) p(ninguna averiada) = 1 - p(alguna averiada)

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{8}{35} = \frac{27}{35}$$

c) p(una averiada) = p (averiada la 1ª y no la 2ª ò averiada la 2ª y no la 1ª)

$$p((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) = [p(A) - p(A \cap B)] + [p(B) - p(A \cap B)] =$$

$$= p(A) + p(B) - 2p(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{2}{70} = \frac{7+10-2}{70} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

ya que $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$, y aplicando al probablidad de la diferencia.

❁❁❁❄❄✲❄❄❁❁❁

❶❷ *Efectuamos dos extracciones con reposición en una caja que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que la bola 3 salga como mínimo una vez ? Justifica tu respuesta.*

---oo0oo---

p(salga el 3 como mínimo una vez) = p(3)

Hagamos la tabla[1]

	1	2	3
1	1, 1	1, 2	1, 3
2	2, 1	2, 2	2, 3
3	3, 1	3, 2	3, 3

Lo hacemos de tres formas:

⌖ $p(3) = \frac{\text{caos en que al menos un 3}}{\text{casos posibles o totales}} = \frac{5}{9}$

⌖ $p(3) = 1 - p(\overline{3}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

⌖ casos posibles = $VR_{3,2} = 3^2 = 9$, casos favorables(hay dos bolas que no son 3) = $VR_{2,2} = 2^2 = 4$, luego:

p(algún 3) = 1 - p(ningún 3) = 1 - ($VR_{2,2}$ /$VR_{3,2}$)= 1 - (4/9) = **5 / 9**

❁❁❁❄❄✲❄❄❁❁❁

❶❸ *Lanzamos seis veces dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir como mínimo un as doble?*

---oo0oo---

Hemos de tener en cuenta que :

⊙ Suponemos que los dados no están trucados y por tanto las probabilidades individuales son equiprobables p(una cara) = 1/6.

⊙ Una tirada es independiente de la anterior.

p(sacar como mínimo dos ases) = 1 - p (no sacar dos ases en ninguna de las tiradas).

Se ha de hallar la probabilidad de que en una tirada de os dados no salgan los do ases, lo que hacemos aplicando la regla de Laplace, teniendo en cuenta que, al lanzar dos dados :

❆ Casos posibles o totales = 6^2 = 36

[1] Para experimento no muy complicados, resulta más sencillo hacer la tabla que usar la combinatoria.

❁ Casos en que no se obtienen dos ases 36 - 1 (el as doble) = 35
luego:

$$p(\text{no sacr dos ases en una tirada}) = \frac{35}{36}$$

Como se lanzan 6 veces los dos dados, la probabilidad pedida será :

p(como mínimo 1 as doble) = 1 - p(ninguna tirada con doble as) =

$$= 1 - p(\overline{2A}_1 \cap \overline{2A}_2 \cap \overline{2A}_3 \cap \overline{2A}_4 \cap \overline{2A}_5 \cap \overline{2A}_6) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6 = 1 - 0'844487 = 0'155512$$

❁❁❁❁❁✲❁❁❁❁❁

❶❹ *En una caja tenemos tres bolas blancas numeradas del 1 al 3 y cinco bolas negras numeradas del 1 al 5. Se extrae una bola y se consideran los sucesos A: bola blanca y B: número más pequeño o igual que dos. ¿ Son independientes los sucesos A y B ?*

---oo0oo---

Dos suceso A y B son independientes si p(A ∩ B) = p(A) · p(B), luego hemos de hallar la probabilidad de la intersección de ambos sucesos y el producto de sus probabilidades y comprobar si son iguales:

p(A) = p (bola blanca) = bolas blancas/ total de bolas = 3 / 8.

p(B) = p (nº ≤2) = bolas con nº≤ 2/ bolas totales = 4/8 = ½.

p(A) · p(B) = (3/8) · (1/2) = 3/16.

$$p(A \cap B) = \frac{\text{bolas con números} \leq 2 \text{ y blancas}}{\text{bolas totales}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

como p(A) · p(B) = 3/16 ≠ p(A ∩B) = ¼ ⇒ los sucesos A y B son dependientes.

❁❁❁❁❁✲❁❁❁❁❁

❶❺ *Tres chicos y dos chicas se colocan en una mesa circular. Calcula la probabilidad de los sucesos A: las dos chicas se sientan juntas y B: las dos chicas no se sientan juntas.*

---oo0oo---

Hay 5 personas (2 chicas y 3 chicos), que pueden colocarse en una mesa circular de $PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas diferentes, que son los caos posibles.

a) Como hay dos chicas, sentada una la otra ha de colocarse a su izquierda o a su derecha (para estar juntas), por cada una de estas dos posibilidades, a su vez, los chicos pueden formar las posibles permutaciones de 3 elemento, luego los casos favorables son : $2P_3 = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Aplicando la regla de Laplace :

p(dos chicas se sienten juntas) = casos favorables/ casos totales = 12/24 = ½.

b) p(no se sienten juntas) 1 - p (se sienten juntas) = 1 - ½ = 1/2.

❀❀❀❉❉✲❉❉❀❀❀

❶❻ *La tabla siguiente muestra el número de alumnos de un centro escolar matriculados en cada una de las modalidades del Bachillerato:*

	T	N/S	H	A
♂	88	76	92	50
♀	125	103	97	73

a) Halla la probabilidad de que, al escoger un escolar del centro al azar, éste sea un chico que cursa la modalidad de Humanidades.

b) Halla la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, éste curse la modalidad de Humanidades, sabiendo que es un chico.

---oo0oo---

Primero completamos la tabla con las sumas :

	T	N/S	H	A	Sumas
♂	88	76	92	50	**306**
♀	125	103	97	73	**398**
Suma	**213**	**179**	**189**	**123**	**704**

a) p (chico y que curse humanidades) = p (♂∩ H):

$$p(co \cap H) = \frac{\text{chicos que cursan humanidades}}{\text{total}} = \frac{92}{704} = \frac{23}{176} = p(co)\cdot p(H/co) = \frac{306}{704}\cdot\frac{92}{306} = \frac{92}{704}$$

b) p(curse humanidades sabiendo que es chico) = p (H / ♂):

$$p(H/co) = \frac{92}{306} = \frac{p(co\cap H)}{p(co)} = \frac{92/704}{306/704} = \frac{92}{306} = \frac{46}{153}$$

❀❀❀❉❉✲❉❉❀❀❀

❶❼ *El 80 % de las personas que este verano subieron al Aneto eran españoles y el 60 % de éstos tenían menos de 30 años. De los que no eran españoles, el 30% tenía más de 30 años. Escogida una persona al azar, se pide:*

a) Si no es español, ¿ cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años ?

b) Si es español, ¿ cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años ?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años ?

---oo0oo---

Sean : E = ser español y M = menor de 30 años, entonces, según el enunciado :

$$p(E) = 0'8;\ p(\overline{E}) = 0'2\ ;\ p(M/E) = 0'6 \text{ y } p(\overline{M}/\overline{E}) = 0'3$$

a) p(tenga menos de 30 un extranjero que ha subido el Aneto) :

$$p(M/\bar{E}) = \frac{p(M\cap\bar{E})}{p(\bar{E})} = \frac{p(M)-p(M\cap E)}{p(\bar{E})} = \frac{p(\bar{E})-p(\bar{M}\cap\bar{E})}{p(\bar{E})} = 1-\frac{p(\bar{M}\cap\bar{E})}{p(\bar{E})} = 1-p(\bar{M}/\bar{E}) = 1-0'3 = 0'7$$

b) p(tenga más de 30 si es español) :

$$p(\bar{M}/E) = \frac{p(\bar{M}\cap E)}{p(E)} = \frac{p(E)-p(M\cap E)}{p(E)} = 1-p(M/E) = 1-0'6 = 0'4$$

c) P(más de 30 años) ; teorema de la probabilidad total :

$$p(\bar{M}) = p(E)\cdot p(\bar{M}/E)+p(\bar{E})\cdot p(\bar{M}/\bar{E}) = 0'8\cdot 0'4+0'2\cdot 0'3 = 0'32+0'06 = 0'38$$

18 *Al llamar a la centralita telefónica de una oficina, la probabilidad de que esté comunicando es 0,3 y la probabilidad de que el telefonista nos diga que la extensión que pedimos comunica es 0,2. Calcula la probabilidad de que consigamos comunicar con la extensión deseada.*

---oo0oo---

Sea:

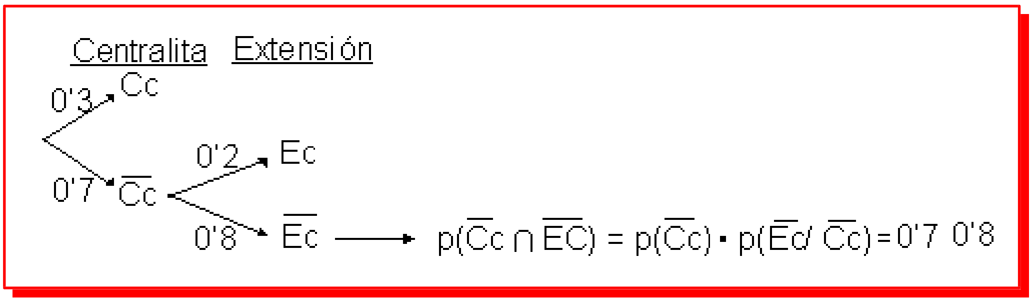
Cc = si comunica la centralita.
Ec = si comunica la extensión.

Los datos son :

p(Cc) = 0’3; p(no comunique la centralita= $p(\overline{Cc}) = 1-p(Cc) = 1-0'3 = 0'7$

p(Ec/$\overline{Cc}$) = 0’2; p(no comunique la extensión si no Cc) = $p(\overline{Ec}/\overline{Cc}) = 1-0'2 = 0'8$

Hagamos el diagrama en árbol :



p(comunique con la extensión) = $p(\overline{Cc}\cap\overline{Ec}) = p(\overline{Cc})\cdot p(\overline{Cc}/\overline{Ec}) = 0'7\cdot 0'8$ = 0’56