❷❻ ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes pueden formarse cuyas cifras sean todas impares?

---oo0oo---

Las cifras impares son 1, 3, 5, 7, y 9, cinco en total, luego como queremos formar números de cinco cifras, habrá que hallar las permutaciones de 5 :

$P_5 = 5\,! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 120 números de cinco cifras diferentes impares

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷❼ ¿Cuántas palabras de nueve letras (con sentido o sin él) pueden escribirse utilizando todas las letras de la palabra LABERINTO?

---oo0oo---

Como usamos las nueve letras de la palabra, sólo varía el orden :

$P_9 = 9\,! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$ palabras

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷❽ En un festival intervienen ocho participantes. ¿De cuántas formas puede programarse el orden de aparición?

---oo0oo---

De nuevo son permutaciones, de 8 participantes en este caso :

$P_8 = 8\,! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ formas de aparición

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷❾ Adán ha olvidado el número clave de su maletín. Sólo recuerda que es un número de cuatro cifras, que empieza por 3 y que las cifras restantes son 2, 4 y 5. ¿ Cuántas combinaciones deberá probar como máximo ?

---oo0oo---

El número es de la forma 3 _ _ _ , como hay tres lugares y tres números para colocar son permutaciones de tres :

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ combinaciones.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸⓿ ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una mesa circular siete congresistas?. Si cada uno de ellos lee un pequeño discurso, ¿ cuáles son los posibles órdenes de aparición ?

---oo0oo---

Como la mesa es circular no hay situación preferente, el primero que se sienta fija el principio y final, luego quedan otros 6 congresistas para distribuirse a partir del primero permutándose :

$PC_7 = P_{7-1} = P_6 = 6\,! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 720 maneras de sentarse

El orden de aparición son **$P_7 = 7\,! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 5 040 órdenes.**

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❶ ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila cuatro bolas blancas, cinco verdes y tres rojas, si sólo se distinguen por el color?

---oo0oo---

❁ En cada ordenación hay que utilizar todos los elementos (5 + 4 + 3 = 12 bolas).

❁ Influye el orden pero dentro de los grupos de colores las bolas no se diferencian.

Son permutaciones con repetición:

$$PR_{12}^{5,4,3} = \frac{12!}{5!4!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 27720 \text{ maneras}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❷ ¿Cuántos números de siete cifras tienen exactamente 4 doses, 2 cincos y un tres?

---oo0oo---

❁ En cada ordenación hay que utilizar todos los elementos (4 + 2 + 1 = 7 números).

❁ Influye el orden pero dentro de los grupos de cifras no se diferencian.

$$PR_{7}^{1,2,4} = \frac{7!}{4! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105 \text{ números}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❸ ¿Cuántas palabras diferentes (con sentido o sin él) pueden formarse con las letras de la palabra COCOTERO?

---oo0oo---

❃ Hay que usar todas las letras (2 C + 3 0 + 1T + 1E + 1R = 8).

❃ Influye el orden pero dentro de cada grupo de letras son indistinguibles.

Son permutaciones con repetición:

$$PR_8^{1,1,1,2,3} = \frac{8!}{3!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2 = 3360 \text{ palabras.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❹ ¿Cuántos códigos de ocho signos pueden formarse con tres ✻ y cinco✞ ?

---oo0oo---

✪ Hay que usar los 8 símbolos cada vez.

✪ Influye el orden pero dentro de cada grupo de símbolos son iguales.

Son permutaciones con repetición.

$$PR_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 5!} = 8\cdot 7 = 56 \text{ códigos.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❺ Lanzamos cinco veces una moneda. ¿ Cuántos resultados contienen exactamente dos cruces y tres caras ?

---oo0oo---

◎ Son distintas ordenaciones de 3C y 2X = 5 elementos.

◎ Influye el orden pero en cada grupo son indistinguible los elementos.

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 5\cdot 2 = 10 \text{ resultados.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❻ Disponemos de un cierre y ocho cuentas para hacer una pulsera, tres de color rojo, dos de color azul y tres de color amarillo. ¿ Cuántas pulseras diferentes podemos obtener ?

---oo0oo---

⦿ Como tenemos un cierre se podrán permutar las ocho cuentas.

⦿ Influye el orden de colores, pero cuando coincidan del mismo color no se distinguen entre ellas.

Son permutaciones con repetición :

$$PR_8^{3,3,2} = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3\cdot 2\cdot 2} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2 = 560 \text{ pulseras.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❼ ¿ De cuántas maneras puede constituirse una comisión de cuatro personas, sin distinción de cargo, eligiendo entre 15 personas ?

---oo0oo---

➲ Como no hay distinción de cargo no influye el orden.

➲ Suponemos que cada uno de los cuatro cargos ha de ser desempeñado por una persona distinta.

Son combinaciones ordinarias:

$$C_{15}^{4} = \frac{V_{15}^{4}}{P_4} = \binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365 \text{ formas.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❽ ¿ Cuántos triángulos determinan 25 puntos, si no hay tres de ellos alineados ?.

---oo0oo---

❍ Para formar un triángulo se necesitan tres puntos no alineados (en línea recta), pero no importa el orden en que unamos cada dos consecutivos que se formará el mismo triángulo.

❍ Para que sean triángulos distintos al menos uno de los puntos ha de ser diferente.

$$C_{25}^{3} = \frac{V_{25}^{3}}{P_3} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300 \text{ triángulos.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸❾ ¿ De cuántas maneras se pueden repartir tres entradas para un concierto entre 40 personas, de manera que a ninguna de ellas le corresponda más de una ?

---oo0oo---

❒ Evidentemente el orden en que les toque a tres personas determinadas las entradas no influye (van a poder entrar al concierto).

❒ Como a ninguna le corresponde más de una, en las ordenaciones ha de haber al menos una persona distinta y no se pueden repetir.

$$C_{40}^{3} = \frac{V_{40}^{3}}{P_3} = \binom{40}{3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 20 \cdot 13 \cdot 38 = 9880 \text{ maneras.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹⓿ ¿ Cuántas sumas distintas podemos obtener tomando tres cifras impares ? Considera que dos sumas con el mismo resultado pero sumandos diferentes son distintas.

---oo0oo---

Hay 5 cifras impares (1, 3, 5, 7 y 9) y como la suma es conmutativa (1 + 3 + 5 = 5+ 3 +1 = 3 + 1+ 5 = etc.) no influye el orden.

Como si hay algún elemento diferente (aunque el resultado sea el mismo), consideramos suma distinta y, suponemos, que las cifras han de ser diferentes (sin repetición) son combinaciones ordinarias:

$$C_5^3 = \frac{V_5^3}{P_3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ sumas.}$$

Si no suponemos la distinción podrá haber repetición y entonces será combinaciones con repetición :

$$CR4_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35 \text{ sumas.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❶ ¿ De cuántas maneras diferentes puede rellenarse una quiniela futbolística ? ¿ En cuántas habrá exactamente 7 unos, 5 equis y 2 doses ?

---oo0oo---

O Orden : Si influye pues en cada casilla se coloca un determinado encuentro.

O No intervienen todos los elementos, pues nada nos impide rellenar una quiniela con 14 (ahora son 15) 1 (2 o X). Son variaciones

O Pueden repetirse, luego variaciones con repetición de tres elementos (1, X, 2) en 14 lugares (15 en la actualidad)

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969 \text{ quinielas ó } VR_{3,15} = 3^{15} = 14\ 348\ 907 \text{ quinielas.}$$

Hemos de distribuir 7 unos, 5 equis y 2 doses entre las 14 casillas, luego importa el orden pero en cada grupo de signo iguales son indistinguibles entre sí :

$$PR_{14}^{7,5,2} = \frac{14!}{7!5!2!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 4 = 72\ 072 \text{ quinielas.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❷ ¿ Cuántos productos distintos de tres factores diferentes pueden obtenerse con los números 2, 3, 5, 7 y 11 ? ¿ Y si los factores se pudieran repetir ?

---oo0oo---

⊙ No importa el orden pues el producto es conmutativo (2·3·5=2·5·3), son combinaciones.

⊙ No se pueden repetir pues se nos pide "de factores diferentes ", luego son combinaciones ordinarias de 5 números tomados de tres en tres :

$$C_5^3 = \frac{V_{5,3}}{P_3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2} = 5\cdot2 = 10 \text{ productos.}$$

Si pueden repetirse factores :

$$CR_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 7\cdot5 = 35 \text{ productos.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❸ Para hacer una apuesta en la lotería Primitiva hay que marcar con una cruz seis números comprendidos entre el 1 y el 49 (ambos inclusive). ¿ Cuántas apuestas diferentes pueden hacerse en la lotería Primitiva ?

---oo0oo---

◎ No influye el orden en que coloquemos los seis números que han de ser distintos :

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 49\cdot47\cdot46\cdot3\cdot44 = 13\ 983\ 816 \text{ apuestas.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❹ ¿ Cuántas palabras diferentes, con o sin sentido, pueden formarse utilizando cada vez todas las letras de la palabra LENGUA ? ¿ Y con las de la palabra MATEMÁTICAS ?

---oo0oo---

Son permutaciones de 6 letras distintas pues hay que usar todas :

P_6 = 6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 =**720 palabras**.

En MATEMÁTICAS hay que tomar todas las letras pero se repiten 2 emes, 2, tes y 3 as :

$$PR_{11}^{2,2,3,1,1,1,1} = \frac{11!}{2!2!3!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{2\cdot2\cdot3!} = 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1\ 663\ 200 \text{ palabras.}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❺ ¿ Cuántas banderas de tres franjas se pueden obtener con seis colores diferentes ? ¿ Cuántas tienen tres colores diferentes ?

---oo0oo---

Dos banderas cualesquiera se distinguen bien por tener alguno de los tres colores distintos bien por estar colocados en diferente orden, pero hemos de distinguir dos casos :

① Banderas de **tres franjas con colores distintos**, como influye el orden y no se pueden repetir los colores (no serían tres distintos) :

$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **120 banderas**.

② Banderas con el color central distinto del color de las dos franjas de los extremos, como influye el orden son variaciones de 6 elementos tomados de 2 en 2 :

$V_{6,2} = 6 \cdot 5 =$ **30 banderas de dos colores.**

Total = 120 + 30 = 150 banderas de tres franjas.

Las que tiene **3 colores distintos son las 120** halladas en el caso ①.

◈◈◈▣▣☉▣▣◈◈◈

❹❻ ¿ De cuántas maneras se pueden colocar en fila cinco chicos y cinco chicas de forma alternada ? ¿ Y en círculo ?

---oo0oo---

✶ Tenemos dos posibilidades, colocar primero un chico o una chica.
Si colocamos primero un chico estos tendrán los lugares impares :

♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀

y hay que permutar 5 chicos en estos cinco lugares : $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas., y por cada una de estas 120 maneras hay otras 120 maneras de colocar las chicas en los lugares pares es decir 120 x 120 = 14 400 formas si los chicos ocupan los lugares impares.

Pero habrá otras tantas si son las chicas las que ocupan los lugares impares:

♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂

luego :

2 x 14 400 = 28 800 maneras son posibles.

✶ Si en vez de en fila es en círculo, hay $PC_5 = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas de colocar los 5 chicos en círculo, por cada una de ellas a su vez las chicas se pueden colocar, alternando con los chicos, de $P_5 = 5! = 120$ maneras, luego :

Total = 24 x 120 = 2 880 formas de colocarse en círculo.

◈◈◈▣▣☉▣▣◈◈◈

❹❼ En una clase hay 12 chicos y 16 chicas. ¿ De cuántas maneras se puede elegir una comisión de seis personas formada por tres chicos y tres chicas ?

---oo0oo---

✷ Hay que elegir 3 chicos distintos de entre 12 sin importar el orden, luego son combinaciones ordinarias :

$$C_{12}^{3} = \frac{V_{12,3}}{P_3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220 \text{ posibilidades.}$$

✷ Hay que seleccionar 3 chicas diferentes de entre 16, sin importar el orden, luego son combinaciones ordinarias :

$$C_{16}^{3} = \frac{V_{16,3}}{P_3} = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560 \text{ posibilidades.}$$

✷ Por cada una de las 220 ordenaciones de los chicos hay 560 ordenaciones distintas de chicas (y viceversa), luego el total será :

220 x 560 = 560 x 220 = 123 200 comisiones.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❽ ¿ De cuántas maneras pueden alinearse en una estantería 6 novelas, 4 cuentos, 5 biografías y 3 cómics, si los libros de un mismo tipo deben estar juntos ?

---oo0oo---

❈ Hay cuatro grupos de libros diferentes, novela (N), cuento (C), biografía, (B) y cómics (CO), estas cuatro categorías pueden permutarse de $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras.

❈ Los libros de cada categoría, a su vez, pueden permutarse, respectivamente, de 6! = 720, 4 ! = 24, 5! = 120 y 3! = 6 maneras distintas.

❈ El número total de colocaciones posibles será pues :

$P_4 \cdot P_6 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_3$ = 4 ! ·6! · 4! · 5! · 3! = 24 · 720 · 24 · 120 · 6 = 298 598 400 maneras.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹❾ Con las cifras del 1 al 7, ¿ cuántos números de seis cifras diferentes pueden formarse de manera que contengan todas las cifras pares ?

---oo0oo---

Las cifras pares que hay del uno al 7 son tres : 2, 4, y 6. Como estas tres cifras tiene que estar en todos los números e influye el orden se pueden distribuir de $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

En cada una de las 120 posiciones anteriores quedan por distribuir las cuatro cifras restantes en tres posiciones que quedan hasta seis y, como influye el orden serán : $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas. Luego los números distintos que podrán formarse son :

120 x 24 = 2 880 números.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❺⓿ ¿ Cuántas de las posibles apuestas en la lotería Primitiva tienen exactamente cuatro números pares y dos impares ?

---oo0oo---

Loa números de la lotería Primitiva son del 1 al 49, en ellos hay 24 números pares (los pares del 2 al 48) y 25 impares (los impares del 1 al 49).

⌗ De entre los pares hemos de hacer grupos de 4 números distintos en los que no influye el orden, es decir :

$$C_{24}^{4} = \binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626 \text{ grupos.}$$

⌗ Con los 25 impares hay que hacer grupos de 2 números diferentes en los que no interviene el orden :

$$C_{25}^{2} = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 25 \cdot 12 = 300 \text{ grupos con los impares.}$$

Con cada uno de los del primer grupo se pueden hacer 300 del segundo luego el total será :

10 626 X 300 = 3 187 800 apuestas.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❺❶ Conocida la combinación ganadora de cualquier sorteo de la lotería Primitiva, ¿ cuántas de las apuestas posibles tienen exactamente cuatro aciertos ?

---oo0oo---

En los seis números de la combinación ganadora se pueden hacer grupos de cuatro números :

$$C_6^4 = \binom{6}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3\cdot5 = 15 \text{ grupos.}$$

Si seleccionamos cuatro números cualesquiera del 1 al 49, quedan 43 de los cuales hay que elegir 2 (para completar los seis), luego se pueden formar :

$$C_{43}^2 = \binom{43}{2} = \frac{43\cdot42}{2} = 43\cdot21 = 903 \text{ grupos.}$$

En total hay pues : **15 · 903 = 13 545 apuestas con cuatro aciertos.**

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

❶ Simplifica las expresiones :

a) $\frac{(n+1)!+n!}{n!-(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!+n\cdot(n-1)!}{n\cdot(n-1)!-(n-1)!} = \frac{(n-1)![(n+1)\cdot n+n]}{(n-1)!(n-1)} = \frac{n(n+2)}{n-1}$

b) $\frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!-(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!-(n-1)!}{n\cdot(n-1)!-(n-1)!} = \frac{(n-1)![(n+1)\cdot n-1]}{(n-1)!(n-1)} = \frac{(n+1)\cdot n-1}{n-1} = \frac{n^2+n-1}{n-1}$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷ Simplifica las siguientes expresiones y halla el valor de n :

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 5\cdot6 \Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!} = 6\cdot5 \Leftrightarrow n\cdot(n-1) = 6\cdot5 \Rightarrow n = 6$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\cdot n(n-1)!}{(n-1)!} = 7\cdot6 \Leftrightarrow (n+1)\cdot n = 7\cdot6 \Rightarrow n = 6$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸ Halla el valor de la suma :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

es la suma de los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton (a + b) ^{n} , si hacemos en el a = b = 1 quedaría :

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹ Comprueba que :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

---oo0oo---

Particularicemos :

$$n=1 \Rightarrow \binom{1}{0} = 1 = \binom{1}{1} = 1$$

$$n=2 \Rightarrow \binom{2}{0} + \binom{2}{2} = 1 + 1 = \binom{2}{1} = 2$$

$$n=3 \Rightarrow \binom{3}{0} + \binom{3}{2} = 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 3 = 4 = \binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$$

$$n=4 \Rightarrow \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + \frac{4.3}{2} + 1 = 8 = \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + \frac{4.3.2}{3.2} = 4 + 4 = 8$$

Luego se cumplirá para cualquier n.

De otra forma:

Si aplicamos la propiedad P4:

$$\binom{n}{1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}; \binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}; \binom{n}{5} = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5}; \text{ etc.}$$

Luego el 2º miembro de la igualdad quedaría :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5} + \ldots$$

que, según henos visto en el problema anterior sería 2^{n-1}, es decir :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1} \text{ y multiplicando ambos miembros por 2 :}$$

$$2[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots] = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Si simplificamos restando en ambos miembros los impares quedaría :

En el primer miembro : $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$, ya que había dos.

En el 2º miembro : $\binom{n}{0}$ + los pares = $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$, al restar los impares.

◈◈◈▣▣☉▣▣◈◈◈

❺ Halla el coeficiente de y^{28} en el desarrollo de $(2y^4 - 4)^8$.

---oo0oo---

El término k- ésimo de un desarrollo del binomio de Newton es:

$$T_k = (-1)^{k-1}\cdot\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}\cdot b^{k-1} = (-1)^{k-1}\cdot\binom{8}{k-1}(2y^4)^{8-k+1}\cdot 4^{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1}\cdot\binom{8}{k-1}2^{9-k}\cdot 2^{2k-2}\cdot y^{36-4k} = (-1)^{k-1}\cdot\binom{8}{k-1}2^{k+7}\cdot y^{36-4k}$$

y para que el exponente de la y sea 28 ha de cumplir (al igualar exponentes) 36 - 4k = 28; 4k = 36 - 28 = 8 ⇨ k = 8/4 = 2, por tanto el coeficiente del segundo término es :

$$(-1)^{2-1}\cdot\binom{8}{2-1}2^{2+7} = (-1)\cdot\binom{8}{1}\cdot 2^9 = -2^{12} = -4096.$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❻ Halla el coeficiente de x^{16} del desarrollo del binomio :

$$(3x^2 + \tfrac{x}{2})^{12}$$

---oo0oo---

Aplicamos de nuevo la fórmula del término k - ésimo :

$$T_k = \binom{12}{k-1}(3x^2)^{12-(k-1)}\cdot(\tfrac{x}{2})^{k-1} = \binom{12}{k-1}3^{13-k}\cdot x^{26-2k}\frac{x^{k-1}}{2^{k-1}} = \binom{12}{k-1}\frac{3^{13-k}}{2^{k-1}}\cdot x^{25-k}$$

como el exponente de x ha de ser 16, se ha de cumplir que 25 - k = 16⇔ k = 25 - 16 = 9, y por tanto el coeficiente es :

$$\binom{12}{8}\cdot\frac{3^{13-9}}{2^{9-1}} = \frac{12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5}{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2}\cdot\frac{3^4}{2^8} = \frac{11{\cdot}5{\cdot}9{\cdot}3^4}{2^8} = \frac{40095}{256}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❺ En un comité se reúnen 5 alemanes, 4 franceses, 3 españoles y 2 italianos. ¿Cómo pueden distribuirse, si se sientan en una mesa redonda, de modo que los compatriotas estén juntos?

---oo0oo---

Tenemos 4 grupos de compatriotas, que pueden distribuirse entorno de una mesa circular de $PC_4 = P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Dentro de cada grupo los componentes se pueden permutar :

$P_5 = 5\,! = 120$, $P_4 = 4! = 24$, $P_3 = 3! = 6$ y $P_2 = 2! = 2$ respectivamente.

El número total de colocaciones posibles es, pues, el producto :

$6 \cdot 120 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 2 = 207\ 360$ colocaciones