PREPARACIÓN DE LA UNIDAD

● Escribe la cifra que falta para que los siguientes números sean divisibles por 2 y 5 a la vez :

26 430 340 214 670 42 150

- Indica cuáles de los números anteriores son también divisibles por 3

Un numero es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3, luego son múltiplos de 3 :

26 430 (2+6+4+3+0 = 15) y 42 150 (4+2+1+5+0 = 12)

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

● Efectúa :

a) $\frac{(x^2)^3x^5}{x^4}=\frac{x^6x^5}{x^4}=\frac{x^{11}}{x^4}=x^7$ b) $\frac{(ab)^3a^5}{(a^2)^3b^3}=\frac{a^3b^3a^5}{a^6b^3}=\frac{a^8}{a^6}=a^2$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶ Calcula el valor de los siguientes números factoriales. Puedes ayudarte de la calculadora.

2! = 2·1 = **2**

6! = 6·5·4·3·2·1=**720**.

9! = 9·8·7·6·5·4·3·2·1=**362 880**.

10! = 10·9!= **3 628 800**.

11! = 11·10! = **39 916 800**.

12! = 12·11! = **479 001 600**.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷ ¿De qué número es factorial 5 040 ?.

---oo0oo---

Descomponemos en factores :

5040	2
2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7

Es decir 5040 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 =$ **7!**

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❸ Simplifica y calcula :

b) $\frac{1000!}{999!} = \frac{1000 \cdot 999!}{999!} = 1000$

c) $\frac{12!}{6! \cdot 5! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 924$

d) $\frac{375! \cdot 10!}{8! \cdot 372!} = \frac{375 \cdot 374 \cdot 373 \cdot 372! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 372!} = 375 \cdot 374 \cdot 373 \cdot 10 \cdot 9 = 4708192500$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❹ Simplifica, como en el modelo, las siguientes expresiones :

b) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

c) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) = n^3 - n$

d) $\frac{(n-3)!}{(n+1)!} = \frac{(n-3)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!} = \frac{1}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} = \frac{1}{n^4 - 2n^3 - n^2 - 2n}$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❺ Halla el valor de n.

a) $n! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 11! \Rightarrow n! = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = 7!$

b) $\frac{(n+1)!}{n!} = 8 \Rightarrow (n+1)! = n! \cdot 8 \Rightarrow (n+1) \cdot n! = 8 \cdot n! \Rightarrow n+1 = 8 \Rightarrow n = 7$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❻ Calcula los siguientes números combinatorios :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66$$

$$\binom{12}{0} = 1 \quad \binom{15}{15} = 1$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❼ Halla los valores de n y k.

$$a)\binom{n}{3}=35\Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2}=35\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=35\cdot 6=7\cdot 6\cdot 5\Rightarrow n=7$$

$$b)\binom{n}{5}=56;\ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=8\cdot 7\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)=8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\Rightarrow n=8$$

$$c)\binom{5}{k}=1\Rightarrow k=\left\{\begin{array}{c}0\\5\end{array}\right\}$$

$$d)\binom{n+1}{4}=15\Rightarrow \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{4\cdot 3\cdot 2}=5\cdot 3\Rightarrow (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=5\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2$$

y reagrupando(3·2 =6): (n+1)·n·(n-1)·(n-2) = 6 · 5 · 4 · 3⇨ n+1 = 6 ⇨ n = 6 -1 = 5

$$e)\binom{7}{k-1}=21 \text{ Como }\binom{7}{5}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=21\Rightarrow k-1=5\Rightarrow k=6$$

$$f)\binom{n-1}{5}=126\Rightarrow \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=9\cdot 7\cdot 2\Rightarrow$$

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\Rightarrow n-1=9\Rightarrow n=10$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❽ Para qué valor o valores de x se verifica :

$$\binom{18}{x+3}=\binom{18}{2x}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Si son iguales}\Rightarrow x+3=2x\Leftrightarrow x=3\\ \text{Por } P_3\Rightarrow x+3=18-2x\Leftrightarrow x=5\end{array}\right.$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❾ Completa razonadamente las siguientes igualdades :

$$a)\binom{8}{\dots}=\binom{\dots}{5}+\binom{\dots}{4}\ \text{Por la } P_4\binom{8}{5}=\binom{7}{5}+\binom{7}{4}$$

$$b)\binom{\dots}{8}=\binom{\dots}{7}+\binom{10}{\dots}\ \text{Por la } P_4\binom{11}{8}=\binom{10}{7}+\binom{10}{8}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

10 Reduce a un sólo número combinatorio las expresiones siguientes :

$$a)\ \binom{14}{4}+\binom{14}{5}+\binom{15}{6}+\binom{15}{9}+\binom{14}{7}+\binom{14}{6}=\binom{15}{5}+\binom{15}{6}+\binom{15}{9}+\binom{14}{7}+$$

$$\binom{14}{6}=\binom{15}{5}+\binom{15}{6}+\binom{15}{9}+\binom{15}{7}=\binom{15}{5}+\binom{15}{6}+\binom{15}{6}+\binom{15}{7}=$$

ya que por la propiedad P_3 se cumple : $\binom{15}{9}=\binom{15}{15-9}=\binom{15}{6}$

$$=\binom{16}{6}+\binom{16}{7}=\binom{17}{7}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

11 Construye el triángulo de Tartaglia hasta la duodécima fila y busca en él los valores :

$$\binom{5}{3},\binom{7}{5},\binom{8}{4}\ y\ \binom{12}{7}$$

---oo0oo---

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 ***10*** 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 ***21*** 7 1
1 8 28 56 ***70*** 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 ***792*** 495 220 666 12 1

$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}=\frac{5\cdot4}{2}=10\ ;\binom{7}{5}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2}=21\ \binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}=7\cdot2\cdot5=70$$

$$\binom{12}{7}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=11\cdot9\cdot8=792$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❷ Utiliza el triángulo de Tartaglia para determinar los números combinatorios cuyos valores son : 6, 20, 35 y 28.

---oo0oo---

$$6=\binom{4}{2}=\binom{6}{1}=\binom{6}{5};20=\binom{6}{3}=\binom{20}{1}=\binom{20}{19};35=\binom{7}{3}=\binom{7}{4}=\binom{35}{1}=\binom{35}{34}$$

$$28=\binom{8}{2}=\binom{8}{6}=\binom{28}{1}=\binom{28}{27}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❸ Utilizando la fórmula del binomio de Newton, escribe el desarrollo de :

$$(a+b)^6=\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6=$$

$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$$(a-b)^8=\binom{8}{0}a^8+\binom{8}{1}a^7(-b)+\binom{8}{2}a^6(-b)^2+\binom{8}{3}a^5(-b)^3+\binom{8}{4}a^4(-b)^4+\binom{8}{5}a^3(-b)^5$$

$$+\binom{8}{6}a^2(-b)^6+\binom{8}{7}a(-b)^7+\binom{8}{8}(-b)^8=$$

$$\mathbf{= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❹ Calcula las siguientes potencias :

$$a)(2x+1)^4=\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3+\binom{4}{2}(2x)^2+\binom{4}{3}2x+\binom{4}{4}(2x)^0=$$

$$\mathbf{= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1}$$

$$b)\ (3x-2)^6=\binom{6}{0}(3x)^6+\binom{6}{1}(3x)^5(-2)+\binom{6}{2}(3x)^4(-2)^2+\binom{6}{3}(3x)^3(-2)^3+$$

$$+\binom{6}{4}(3x)^2(-2)^4+\binom{6}{5}(3x)(-2)^5+\binom{6}{6}(-2)^6=$$

$$= 729x^6 - 6\cdot 3^5x^5\cdot 2 + 15\cdot 3^4\, x^4\cdot 4 - 20\cdot 3^3\cdot x^3\, 2^3 + 15\cdot 3^2\, x^2\cdot 2^4 - 6\cdot 3x\cdot 2^5 + 2^6 =$$

= **729x^6 - 2916x^5 + 4860 x^4 - 4320 x^3 + 2160 x^2 - 576x + 64**

$$c)\ (x^2+2z)^8=\binom{8}{0}(x^2)^8+\binom{8}{1}(x^2)^7(2z)+\binom{8}{2}(x^2)^6(2z)^2+\binom{8}{3}(x^2)^5(2z)^3+$$

$$+\binom{8}{4}(x^2)^4(2z)^4+\binom{8}{5}(x^2)^3(2z)^5+\binom{8}{6}(x^2)^2(2z)^6+\binom{8}{7}x^2(2z)^7+\binom{8}{8}(2z)^8=$$

$= x^{16} + 8\,x^{14}\cdot 2z + 28x^{12}\cdot 4z^2 + 56x^{10}\cdot 8z^3 + 70x^8\cdot 16z^4 + 56x^6\cdot 32z^5 + 28x^4\cdot 64z^6 + 8x^2\cdot 128z^7 + 256z^8 =$
x^{16} + 16 $x^{14}z$ + 112$x^{12}z^2$ + 448$x^{10}z^3$ + 1120x^8z^4 + 1792x^6z^5 + 1792x^4z^6 + 1024x^2z^7 + 256z^8

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❺ Calcula el término séptimo de (a+b)^{16} y el término décimo de (a -b)^{21}.

---oo0oo---

Se sabe que el término k-ésimo del desarrollo de (a+b)^n es :

$$T_k=\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

Luego :

$$T_7=\binom{16}{6}a^{16-7+1}b^6=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}a^{10}b^6=8008a^{10}b^6$$

$$T_{10}=\binom{21}{9}a^{21-10+1}(-b)^9=\frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}a^{12}(-b^9)=-293930a^{12}b^9$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❻ Halla el término central del desarrollo de (2x - 5)^{18}.

---oo0oo---

Como la potencia es 18, el desarrollo tendrá 19 términos y el central será el número diez (décimo) :

$$T_{10}=\binom{18}{9}(2x)^{18-10+1}(-5)^9=\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}2^9x^9(-5^9)=-486620\cdot512\cdot1953125x^9\simeq$$

≈ - 4'86662· 10^{14} x^9 .

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❼ Calcula cuántos números de tres cifras diferentes pueden formarse usando sólo loa dígitos 2, 3, 4, 6, 7 y 8

---oo0oo---

✥ Influye el orden pues 234 ≠ 432

✥ Sin repetición ya que dice " cifras diferentes".

Son $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **120** números de tres cifras distintas.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❽ ¿ Cuántas palabras de siete letras diferentes (con sentido o no) pueden formarse con las letras A, B, C, D, E, F, G, H e y? ¿ Cuántas acaban en D ? ¿ Y en DA?.

---oo0oo---

✥ Influye el orden pues ABC ≠ ACB

✥ Sin repetición ya que dice " letras diferentes".

Son $V_{9,7} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **181 440** palabras.

La que acaban en D son de la forma _ _ _ _ _ _ D, es decir tenemos 6 lugares que rellenar con 8 letras en las condiciones citadas, luego :

$V_{8,6} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$**20 160** palabras terminan en D, la novena parte.

las que terminan en DA son de la forma _ _ _ _ _ D A, es decir tenemos cinco posiciones para llenar con 7 letras :

$V_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **2 520** palabras termina en DA , la octava parte de las anteriores.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❶❾ Escribe las variaciones con repetición de las letras a, b, c, d y e, tomadas de 3 en 3.

---oo0oo---

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$ variaciones

Se forman las 25 primeras ramas del árbol y luego vamos sustituyendo la primera letra por las otras cuatro (b, c, y e).

aaa, aab, aac, aad, aae, aba, abb, abc, abd, abe, aca, acb, acc, acd, ace, ada, adb, adc, add, ade, aea, aeb, aec, aed, aee, baa, bab, bac, bad, bae, bba, bbb, bbc, bbd, bbe, bca, bcb, bcc, bcd, bce, bda, bdb, bdc, bdd, bde, bea, beb, bec, bed, bee, caa, cab, cac, cad, cae, cba, cbb, cbc, cbd, cbe, cca, ccb, ccc, ccd, cce, cda, cdb, cdc, cdd, cde, cea, ceb, cec, ced, cee, daa, dab, dac, dad, dae, dba, dbb, dbc, dbd, dbe, dca, dcb, dcc, dcd, dce, dda, ddb, ddc, ddd, dde, dea, deb, dec, ded, dee, eaa, eab, eac, ead, eae, eba, ebb, ebc, ebd, ebe, eca, ecb, ecc, ecd, ece, eda, edb, edc, edd, ede, eea, eeb, eec, eed, eee .

❷⓿ ¿Cuántas veces debemos lanzar una moneda para que el número de resultados posibles sea 64 ?

---oo0oo---

Como se repiten y además influye el orden :

$VR_{2,x} = 2^x = 64 = 2^6 \Rightarrow x = 6$ veces.

❷❶ ¿ Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse usando únicamente las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ?.

---oo0oo---

En cada ordenación pueden repetirse las cifras e influye el orden luego son variaciones con repetición de 6 números tomados de cuatro en cuatro:

$VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$ números.

❷❷ ¿ Cuántas palabras de siete letras (con sentido o sin él) pueden formarse con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, y K ?

---oo0oo---

En cada ordenación pueden repetirse las letras e influye el orden luego son variaciones con repetición de 11 números tomados de 7 en 7:

$VR_{11,7} = 11^7 = 19\,487\,171$ palabras.

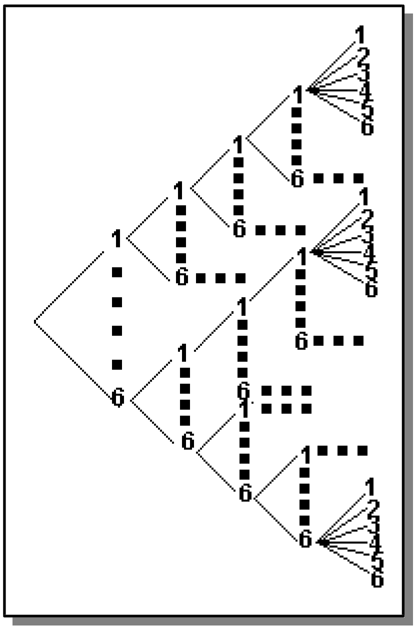
❷❸ Se lanza un dado cinco veces consecutivas ¿ Cuántos resultados distintos podemos obtener ? Construye el diagrama en árbol.

---oo0oo---

Influye el orden y se pueden repetir luego son variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 5 en 5 :

$VR_{6,5} = 6^5 = 7\,776$ resultados.

Como hacer el árbol completo ocuparía bastante (son 7 776 resultados) vamos a esquematizar su construcción :



◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷❹ ¿ Cuántas posibilidades hay de responder a un test con 10 items del tipo verdadero/falso ? ¿ Y si hay tres respuestas posibles para cada item ?

---oo0oo---

Evidentemente influye el orden y además hay que repetir (V o F), luego :

$VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$ y si son tres las respuestas **$VR_{3,10} = 3^{10} = 59\ 049$**

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❷❺ El sistema binario de numeración sólo utiliza las cifras 0 y 1. ¿ Cuántos números distintos de cuatro cifras podemos escribir ?

---oo0oo---

Al total que son $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ hay que descontar los que comienzan por cero (si consideramos que no tiene cuatro cifras) es decir $VR_{2,3} = 2^3 = 8$, es decir quedan 16 8 = 8 números de cuatro cifras .

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈