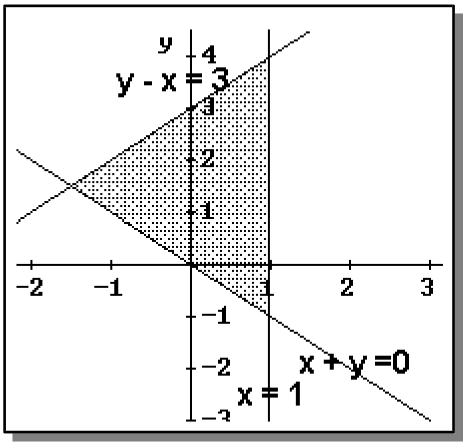
Resolución de ejercicios y problemas

❶ *Dibuja la región definida por las inecuaciones* $x + y \geq 0$, $y - x \leq 3$, *y* $x \leq 1$ *y calcula su área*

---oo0oo---



El área es el formado por la rectas y = -x , y = x + 3 , x = 1 y el punto en donde se cortan las dos primeras :

$$-x = x + 3 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\tfrac{3}{2}$$

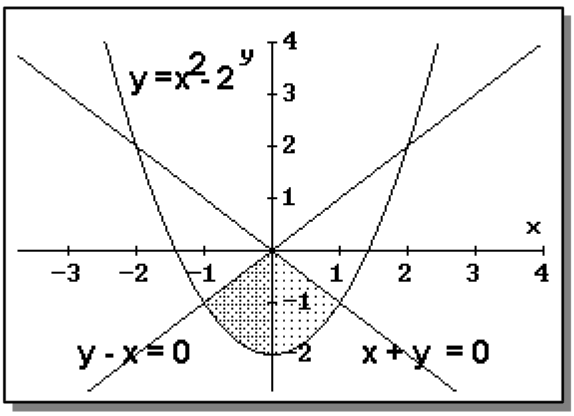
El área será la integral, en el intervalo [-3/2, 1], de la diferencia de funciones de las dos primeras rectas:

$$A = \left| \int_{-\frac{3}{2}}^{1} (x + 3 - (-x))dx \right| = \left| \int_{-\frac{3}{2}}^{1} (2x + 3)dx \right| = \left| x^2 + 3x \right]_{-\frac{3}{2}}^{1} \Big| = \left| (1+3) - (\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{2}) \right| = \tfrac{25}{4} u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Dibuja la región que definen las inecuaciones* $x^2 - 2 \leq y$, $y - x \leq 0$ *y* $x + y \leq 0$, *y calcula su área.*

---oo0oo---



Como el área a calcular es simétrica respecto del eje vertical, bastará con hallar el área de la mitad derecha y multiplicar por dos. El área de la mitad derecha es el área comprendida entre la recta de ecuación y = -x , la parábola, la recta x = 0 y la que pasa por el punto de corte de las dos primeras, que es lo primero que vamos a hallar :

$$-x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1-\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{array} \right\} \text{evidentemente es } x = 1$$

$$A = 2\left|\int_0^1 (x^2 + x - 2)dx\right| = 2\left|\left. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1\right| = 2|(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 2)| = 2\left|-\tfrac{7}{6}\right| = \tfrac{7}{3}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *Determina el valor del parámetro* ***k*** *sabiendo que el área de la región comprendida entre la parábola y = x^2 y la recta y =* ***k****x es 288 y que* ***k*** *> 0.*

---oo0oo---

① **Abscisa del punto de corte entre la recta y la parábola :**

$$x^2 = kx \Leftrightarrow x^2 - kx = 0 \Leftrightarrow x(x-k) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x - k = 0 \Leftrightarrow x = k \end{array} \right\}$$

② **Calculo del área:**

$$A = 288 = \left|\int_0^k (x^2 - kx)dx\right| = \left|\left. \frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2} \right]_0^k\right| = \left|\frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{2}\right| = \left|-\frac{k^3}{6}\right| = \frac{k^3}{6} \Rightarrow \frac{k^3}{6} = 288, k = \sqrt[3]{6 \cdot 288} = 12$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Determina el valor del parámetro* ***k*** *sabiendo que el área de la región comprendida entre y = x^3 y la recta y =* ***k²*** *x es 4 y que* ***k*** *> 0.*

---oo0oo---

① **Abscisa del punto de corte entre la parábola cúbica y la recta :**

$$x^3 = k^2x \Leftrightarrow x^3 - k^2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - k^2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{k} \end{array} \right\}$$

② **Intervalos :**

Teniendo en cuenta los puntos de corte son [-k, 0] y [0, k].

③ **Cálculo del área**:

$$A=4=\left|\int_{-k}^{0}(x^3-k^2x)dx\right|+\left|\int_{0}^{k}(x^3-k^2x)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{k^2x^2}{2}\right]_{-k}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{k^2x^2}{2}\right]_{0}^{k}\right|=$$

$$=\left|-\left(\frac{k^4}{4}-\frac{k^4}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{k^4}{4}-\frac{k^4}{2}\right)\right|=\frac{k^4}{4}+\frac{k^4}{4}=\frac{k^4}{2}\Rightarrow\frac{k^4}{2}=4\Leftrightarrow k^4=8\Leftrightarrow k=\pm\sqrt[4]{8}\ \text{ como } k>0\Rightarrow k=\sqrt[4]{8}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Halla el valor del parámetro **a** para que el área de la región comprendida entre la parábola y = -x² + **a**x y la recta y = -2 x sea de 36.*

---oo0oo---

① **Abscisa del punto de corte entre la parábola y la recta :**

$$-x^2+ax=-2x\Leftrightarrow x^2-x(a+2)=0\Leftrightarrow x(x-(a+2))\ =0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=0\\ x-(a+2)=0\Leftrightarrow x=a+2\end{array}\right\}$$

② **Intervalos :**

Teniendo en cuenta los puntos de corte el intervalo es [0, a+2].

③ **Cálculo del área**:

$$A=36=\left|\int_{0}^{a+2}(x^2-x(a+2))dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(a+2)x^2}{2}\right]_{0}^{a+2}\right|=\left|\left(\frac{(a+2)^3}{3}-\frac{(a+2)^3}{2}\right)\right|=\left|-\frac{(a+2)^3}{6}\right|=\frac{(a+2)^3}{6}$$

$$\frac{(a+2)^3}{6}=36\Leftrightarrow(a+2)^3=216\Leftrightarrow a+2=\sqrt[3]{216}\ =6\Rightarrow a=6-2=4$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Calcula qué valor debe tener el parámetro **b** para que el área de la región comprendida entre las parábolas y = x² - **b**x e y = - x² sea 9.*

---oo0oo---

① **Abscisa del punto de corte entre las parábolas :**

$$x^2-bx=-x^2\Leftrightarrow 2x^2-bx=0\Leftrightarrow x(2x-b)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=0\\ 2x-b=0\Leftrightarrow x=\frac{b}{2}\end{array}\right\}$$

② **Intervalos :**

Teniendo en cuenta los puntos de corte el intervalo es [0, b/2].

③ **Cálculo del área**:

$$A=36=\left|\int_{0}^{a+2}(x^2-x(a+2))dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(a+2)x^2}{2}\right]_{0}^{a+2}\right|=\left|\left(\frac{(a+2)^3}{3}-\frac{(a+2)^3}{2}\right)\right|=\left|-\frac{(a+2)^3}{6}\right|=\frac{(a+2)^3}{6}$$

$$\frac{(a+2)^3}{6}=36 \Leftrightarrow (a+2)^3=216 \Leftrightarrow a+2=\sqrt[3]{216}=6 \Rightarrow a=6-2=4$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Calcula la integral :*

$$\int_0^1 xe^x dx$$

a) *Aplicando la regla de Barrow.*

b) *Dividiendo el intervalo de integración en cuatro partes iguales y aplicando el método de los trapecios.*

c) *Dividiendo el intervalo de integración en cuatro partes iguales y aplicando el método de Simpson.*

---oo0oo---

a) Hay que calcularla “por partes” :

$$\int_0^1 xe^x dx = \left\{ \begin{array}{c} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=\int e^x dx=e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = \left. e^x(x-1)\right]_0^1 = (e^1(1-1)-e^0(0-1)) =$$

$$=0-(-1)=1$$

b) Si dividimos el intervalo de integración en cuatro partes :

$h=\frac{1-0}{4}=0'25$, y quedan los subintervalos: [0, 0’25], [0’25, 0’5], [0’5, 0’75] y [0’75, 1].

Haciendo una tabla como en los primeros ejercicios:

x	0	0’25	0’5	0’75	1
$y = x\cdot e^x$	0	0’321	0’8244	1’5878	2’7183

Aplicamos la fórmula de los trapecios:

$$\int_0^1 xe^x dx = h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)=0'25\left(\frac{0}{2}+0'321+0'8244+1'5878+\frac{2'7183}{2}\right)=1'023$$

c) Método de Simpson :

◆ Los intervalos y la tabla son los mismos que para el apartado anterior :

◆ La suma de las imágenes de los valores extremos : E = 0 + 2’7183 = 2’7183.

◆ La suma de las imágenes de los valores de lugar par, excepto los extremos :

P = 0’8244.

◆ La suma de las imágenes de los lugares impares, excepto los extremos :

I= 0’321+1’5878= 1’9088.

◆ Aplicamos la fórmula de Simpson :

$$\int_0^1 xe^x dx \simeq \frac{h}{3}(E+2P+4I)=\frac{0'25}{2}(2'7183+2\cdot 0'8244+4\cdot 1'9088)=1'00019$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ *Calcula, utilizando la integral definida, en qué se convierte al cabo de 15 años un capital de 50 000 euros, que crece en cada momento un 3 % de su valor.*

---oo0oo---

Si denominamos C(t) a la función capital, su crecimiento instantáneo será C’(t).

Se nos dice que el crecimiento es el 3 % de su valor ⇨ C’(t) = 0’03 C(t), luego :

$$\frac{C'(t)}{C(t)}=0'03 \Rightarrow \int \frac{C'(t)}{C(t)}dt=\int 0'03dt \Leftrightarrow \ln C(t)+C_1=0'03t+C_2 \Leftrightarrow \ln C(t)=0'03t+C\left\langle \frac{C_1}{C_2}\right\rangle$$

Para hallar la constante C, necesitamos un dato C(0) = 50 000:

ln(C(0)) = ln(50 000) = 0’03·0 + C ⇨C= ln (50 000)

Luego la función capital queda :

$$\ln(C(t))=0'03t+\ln 50000 \Leftrightarrow \ln(C(t))-\ln 50000=0'03t \Leftrightarrow \ln\frac{C(t)}{50000}=0'03t \Leftrightarrow \frac{C(t)}{50000}=e^{0'03t}$$

y despejando : **$C(t) = 50\,000\, e^{0'03t}$**

Con lo que al cabo de 15 años el capital acumulado será :

$C(15) = 50\,000\, e^{0'03 \cdot 15} = 78\,416$ €

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Actividades

Cuestiones

❶ *¿ En qué se diferencian la integral definida entre dos puntos de una función y una de sus primitivas ?*

---oo0oo---

La integral definida es un número real y una primitiva es una función que derivada me da la función original.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones y, en el caso que no lo sean, da un contraejemplo :*

---oo0oo---

a) $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow a = b$

Falso pues $\int_0^{\pi} \cos x dx = \left. \text{sen}\right]_0^{\pi} = \text{sen}\pi - \text{sen}0 = 0 - 0 = 0 \not\Rightarrow 0 = \pi$

b) $\int_a^b f(x)dx = 0 \text{ y } a < b \Rightarrow f = 0$

Falso como se ha visto en el apartado anterior.

c) $\int_a^b f(x)dx > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [a,b]$

Falso pues $\int_{-1}^{3} x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20 > 0,$ pero $f(-1) = (-1)^3 = -1 < 0$

d) $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \Rightarrow f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b]$

Falso :

$I_1 = \int_0^1 \frac{4}{5} dx = \left. \frac{4x}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}$ y $I_2 = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ se cumple que $I_1 = \frac{4}{5} > I_2 = \frac{1}{2}$ pero

$$f(1) = \frac{4}{5} < g(1) = 1$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *¿ Cuánto vale la integral definida de una función impar en el intervalo [-a, a] ? razona tu respuesta.*

---oo0oo---

Una función es impar si se cumple que f(-x) = - f(x) $\forall x \in$ Dom(f)

Hallemos la integral pedida :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{-a}^{0} f(x)dx = \left. g(x)\right]_{-a}^{0} = g(0) - g(-a) \\ \int_{0}^{a} f(x)dx = \left. g(x)\right]_{0}^{a} = g(a) - g(0) \end{array} \right\}$$

Pero si f(x) es impar su primitiva G(x) será par y por tanto g(-a) = g(a) y tendremos :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = (g(0) - g(-a)) + (g(a) - g(0)) = g(0) - g(a) + g(a) - g(0) = 0$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ejercicios y problemas

❹ *Utiliza la regla de Barrow para calcular:*

a) $\int_0^3 (3x^2 - 6)dx = \left. x^3 - 6x \right]_0^3 = (3^3 - 6\cdot 3) - (0^3 - 6\cdot 0) = 27 - 18 = 9$

b) $\int_1^e x^{-1}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \left. \ln x \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

c) $\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^8}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1 + x^8 \Rightarrow dt = 8x^7dx \\ \text{Si } x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\left. \ln t \right]_1^2 = \frac{1}{8}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{8}$

d) $\int_0^1 8\sqrt[3]{x}\,dx = 8\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx = 8\left. \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4/3} \right]_0^1 = 8\left. \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \right]_0^1 = 8\left(\frac{3\sqrt[3]{1^4}}{4}\right) = 6$

e) $\int_0^{\pi} 3\cos x dx = 3\int_0^{\pi} \cos x dx = 3\left. \operatorname{sen} x \right]_0^{\pi} = 3(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}0) = 0$

f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \operatorname{sen}^5 x dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{sen} x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ \text{si } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \\ \text{si } x = 2x \Rightarrow t = \operatorname{sen} 2\pi = 0 \end{array} \right\} = \int_1^0 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right]_1^0 = -\frac{1}{6}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Calcula las siguientes integrales definidas :*

a) $\int_{-5}^{2} |x|dx$

Es un función en valor absoluto que se anula para x = 0, luego transformándola en una a trozos :

$$|x| = \left\{ \begin{array}{l} -x \text{ si } x \le 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

Luego como intervalo de integración se puede descomponer en dos :

$$\int_{-5}^{2} |x|dx = \int_{-5}^{0}(-x)dx + \int_0^2 x dx = \left. -\frac{x^2}{2} \right]_{-5}^{0} + \left. \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{25}{2} + 2 = \frac{29}{2}$$

b) $\int_0^{\pi} |x-2|\cos x dx$

la función con valor absoluto se anula para x = 2, luego para x < 2 será negativa y a la derecha(para x >2) positiva:

$$|x-2|\cos x = \begin{cases} (2-x)\cos x \text{ si } x \le 2 \\ (x-2)\cos x \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

y el intervalo de integración ha de ser dividido en dos :

$$\int_0^{\pi} |x-2|\cos x dx = \int_0^2 (2-x)\cos x dx + \int_2^{\pi} (x-2)\cos x dx$$

hallemos (por partes) separadamente las integrales indefinidas correspondientes :

$$\int (x-2)\cos x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x-2 \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = (x-2)\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx =$$

$$= (x-2)\operatorname{sen} x + \cos x + C \text{ y como } \int (2-x)\cos x dx = -\int (x-2)\cos x dx = (2-x)\operatorname{sen} x - \cos x$$

Luego :

$$\int_0^{\pi} |x-2|\cos x dx = \left.(2-x)\operatorname{sen} x - \cos x\right]_0^2 + \left.(x-2)\operatorname{sen} x + \cos x\right]_2^{\pi} = ((2-2)\operatorname{sen} 2 - \cos 2) -$$

$$-((2-0)\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + (((\pi-2)\operatorname{sen}\pi + \cos\pi - ((2-2)\operatorname{sen} 2 + \cos 2)) = -\cos 2 + 1 - 1 - \cos 2 =$$

$$= -2\cos 2 \simeq 2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Halla*

$$\int_0^5 f(x)dx \text{ para } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3-x & \text{si } 1 < x \le 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Representa gráficamente f(x) y explica el significado geométrico de la integral que has calculado.

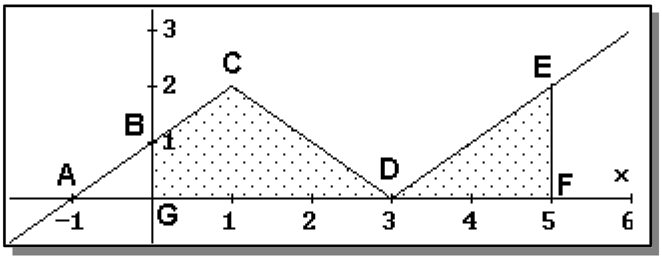
---oo0oo---

El intervalo de integración [0, 5] se extiende por los tres intervalos de definición de la función luego habrá que calcular tres integrales :

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left.3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \left.\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5 =$$

$$\left(\tfrac{1}{2}+1\right)+\left(\left(9-\tfrac{9}{2}\right)-\left(3-\tfrac{1}{2}\right)\right)+\left(\left(\tfrac{25}{2}-15\right)-\left(\tfrac{9}{2}-9\right)\right)=\tfrac{3}{2}+\left(\tfrac{9}{2}-\tfrac{5}{2}\right)+\left(-\tfrac{5}{2}+\tfrac{9}{2}\right)=\tfrac{3}{2}+\tfrac{4}{2}+\tfrac{4}{2}=\tfrac{11}{2}$$

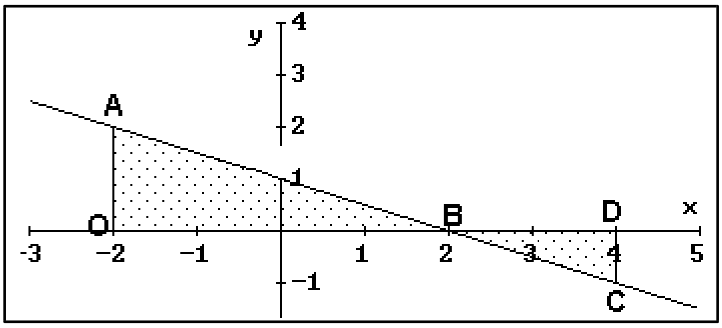
La representación de la función se da en el dibujo siguiente :



El significado geométrico de la integral calculada es el área de la figura sombreada:

Área sombreada = Área del cuadrilátero (GBCD) + área del triángulo(DEF) = área(ACD) - área(ABG) + área (DEF) = (4·2)/2 - (1·1)/2 + (2·2)/2 = 8/2- ½ + 4/2 =**11/2** es.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



❼ *Razona si es cierta la afirmación siguiente, referida a cualquier función continua f:*

«Dados dos puntos A y B de la gráfica de f, la integral definida de f entre las abscisas de A y de B es igual al área del recinto limitado por la curva y = f (x), el eje de abscisas y las rectas verticales trazadas por A y B. »

- Halla :

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx$$

siendo f la función representada en la figura.

---oo0oo---

Como en el intervalo de integración [-2, 4] la función f(x) corta al eje horizontal en x = 2, en el intervalo [2, 4] la integral será un número negativo que se resta al número obtenido en el intervalo [-2, 2], luego no da el área sino la diferencia de áreas de los triángulos (OAB) y y (BCD).

Para hallar la integral usamos el método geométrico :

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx-\int_{2}^{4} f(x)dx = \text{Área(OAB) - área(BCD)} = \frac{4\cdot 2}{2}-\frac{2\cdot 1}{2}=4-1=3$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈