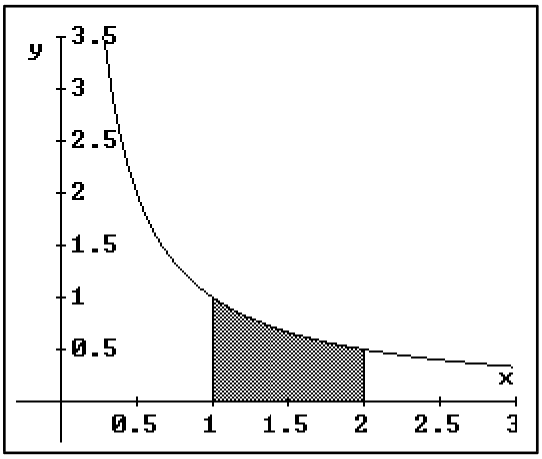
❶ *Da una aproximación por defecto y una aproximación por exceso del área del recinto sombreado de la figura, siendo f(x) = 1/x.*



---oo0oo---

Partición del intervalo [1, 2] en subintervalos de amplitud 0’25 : [1, 1’25], [1’25, 1’5], [1’5, 1’75], [1’75, 2].

① Para hacer una aproximación por defecto hallaremos la suma inferior s:

② Cálculo de los valores de la función para los extremos de menor altura del intervalo (extremos superiores):

f(1’25)=1/1’25= 4/5 ; f(1’5) = 1/1’5 = 2/3, f(1’75) = 4/7, f(2) = ½ .

③ Suma inferior asociada a la partición (área por defecto) =

$$s = f(1'25)\cdot\frac{1}{4} + f(1'5)\cdot\frac{1}{4} + f(1'75)\cdot\frac{1}{4} + f(2)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{533}{210} \simeq 0'6345...$$

(1) Para hacer una aproximación por exceso hallaremos la suma inferior S:

(2) Cálculo de los valores de la función para los extremos de mayor altura del intervalo (extremos inferiores):

f(1) = 1, f(1’25) = 1/1’25 = 4/5, f(1’5) = 1/1’5 = 2/3, f(1’75) = 4/7.

(3) Suma superior asociada a la partición (área por exceso) =

$$S = f(1)\cdot\frac{1}{4} + f(1'25)\cdot\frac{1}{4} + f(1'5)\cdot\frac{1}{4} + f(1'75)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{319}{105} \simeq 0'7595...$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Haz la comprobación, mediante un procedimiento geométrico, de la propiedad ID.1 en el intervalo* [0, 1] *con las funciones : f(x) = x + 4 y g(x) = 2x+3.*

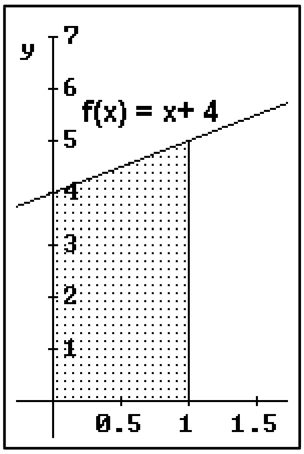
---oo0oo---

Se trata de comprobar que la integral de una suma (o diferencia de funciones) es la suma (o diferencia) de las integrales de las funciones :

(1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \Rightarrow \int_0^1 (3x+7)dx = \int_0^1 (x+4)dx + \int_0^1 (2x+3)dx$

Para comprobarlo usaremos, primero, el procedimiento geométrico de cálculo del área comprendida entre [0, 1]:

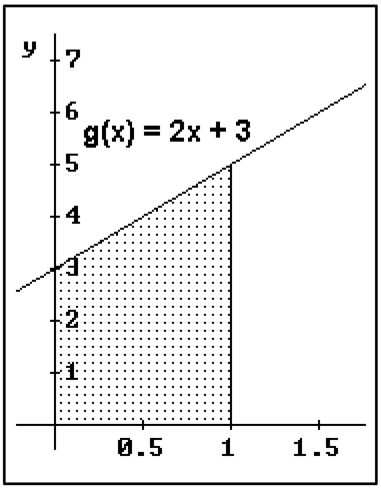
1) área bajo la función f(x) = x + 4.



La figura geométrica formada es un trapecio de altura la amplitud del intervalo h= 1-0 = 1 y bases B = f(1) = 1 + 4 = 5, b = f(0) = 0+4 = 4. por tanto su área es :

$$A_f = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{5+4}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} u.s.$$

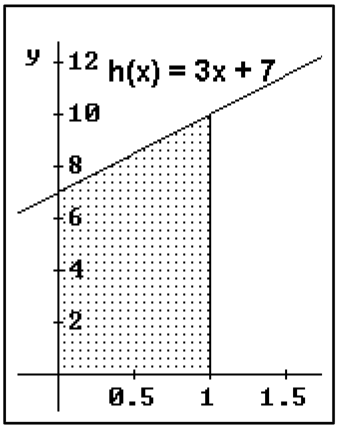
2) área bajo la función g(x) = 2x + 3.



Es otro trapecio de h = 1 - 0 = 1 , B = f(1) = 2·1+3= 5, b = f(0) = 2·0 + 3 = 3, luego su área :

$$A_g = \frac{B+b}{2} h = \frac{5+3}{2} \cdot 1 = 4 u.s.$$

3) área bajo la función suma h(x) = f(x) + g(x) = x + 4 + 2x + 3 = 3x + 7 :



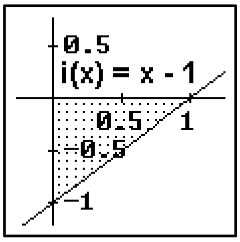
Ahora h = 1, B = f(1) = 3·1+7 = 10, b = f(0) = 3·0 + 7 = 7 y, por tanto :

$$A_{f+g} = \frac{B+b}{2}h = \frac{10+7}{2}\cdot 1 = \frac{17}{2}\text{u.s.}$$

4) Comprobación :

$$\int_0^1 (3x+7)dx = \int_0^1 (x+4)dx + \int_0^1 (2x+3)dx \Rightarrow A_{f+g} = A_g + A_f \Leftrightarrow \frac{17}{2} = 4 + \frac{9}{2}$$

5) área bajo la diferencia i(x) = g(x) - f(x) = 2x + 3 - x - 4 = x - 1



Es un triángulo rectángulo de base b = 1 y altura h = 1, luego su área:

$$A_{g-f} = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\text{u.s.}$$

6) Comprobación de la propiedad para la diferencia :

$$\left|\int_a^b (g(x)-f(x))dx\right| = \left|\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (2x+3)dx - \int_0^1 (x+4)dx\right| = \left|\int_0^1 (x-1)dx\right| =$$

$$|A_g - A_f| = |A_{g-f}| \Rightarrow \left|4 - \frac{9}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Realizaremos ahora la comprobación mediante el cálculo analítico, aplicando la regla de Barrow para hallar las integrales definidas :

$$\int_0^1 (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 (x+4+2x+3)dx = \int_0^1 (3x+7)dx = \left.\frac{3x^2}{2} + 7x\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+4)dx = \left.\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^1 = \frac{1}{2}+4 = \frac{9}{2}$$

$$\int_0^1 g(x) = \int_0^1 (2x+3)dx = \left. x^2+3x\right]_0^1 = 1+3 = 4$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \frac{9}{2}+4 = \frac{17}{2} = \int_0^1 (f(x)+g(x))dx \text{ q.e.d.}$$

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))dx = \int_0^1 (x+4-2x-3)dx = \int_0^1 (-x+1)dx = \left. -\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = \frac{9}{2}-4 = \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x)-g(x))dx$$

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

❸ *Halla las integrales definidas :*

a) $\int_{-2}^{2} (x^3+1)dx = \left. \frac{x^4}{4}+x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^4}{2}+2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{2}-2\right) = (8+2)-(8-2) = 4$

b) $\int_{-\pi}^{2\pi} |senx|dx$, es una función en valor absoluto, la transformamos en otra a ”trozos”

$$|senx| = \begin{cases} -senx & \text{si } k\pi \le x \le 2k\pi \text{ ó } -k\pi \le x \le 0 \\ senx & \text{si } 0 < x < k\pi \end{cases}$$

Por tanto la integral a calcular, al considerar el intervalo de integración, se transforma :

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |senx|dx = \int_{-\pi}^{0} -senxdx + \int_0^{\pi} senxdx + \int_{\pi}^{2\pi} -senxdx = \left. -(-\cos x)\right]_{-\pi}^{0} + \left. -\cos x\right]_0^{\pi} + \left. \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= (\cos 0 - \cos(-\pi)) + (-\cos\pi + \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = (1-(-1)) + (-(-1)+1) + (1-(-1)) =$$

$$= 2+2+2 = 6$$

c) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Otra función a trozos que hay que integrar en sus correspondientes intervalos : [-1, 0] y [0, 1] :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x+1)dx + \int_0^1 (x^2+1)dx = \left. -\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} + \left. \frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}+1\right) + \left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{3}{2}+\frac{4}{3} = \frac{17}{6}$$

d) $\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{x-3}}dx$

Aquí hemos de hacer un cambio de variable, en estos casos la manera de proceder es doble:

① **Hallar la integral indefinida y sustituir los límites de integración después** :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x-3 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{t+3}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{t}{\sqrt{t}}dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{1}{2}}dt + 3\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 3\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C =$$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + 6\sqrt{x-3} + C,$ luego la integral definida será :

$$\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{x-3}}dx = \left. \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + 6\sqrt{x-3} \right]_4^{12} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(12-3)^3} + 6\sqrt{12-3} \right) -$$

$$-\left(\frac{2}{3}\sqrt{(4-3)^3} + 6\sqrt{4-3} \right) = (18+18) - (\frac{2}{3}+6) = \frac{88}{3}$$

② **Hacer el cambio de variable en la integral definida :**

$$\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{x-3}}dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = x-3 \Rightarrow x = t+3 & \text{si } x = 12 \Rightarrow t = 12-3 = 9 \\ dt = dx & \text{si } x = 4 \Rightarrow t = 4-3 = 1 \end{array} \right\} = \int_1^9 \frac{t+3}{\sqrt{t}}dt = \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 3\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} \right]_1^9 =$$

$$= \left. \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} \right]_1^9 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} + 6\sqrt{9} \right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} + 6\sqrt{1} \right) = (18+18) - (\frac{2}{3}+6) = \frac{88}{3}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Aplica el método de los trapecios para calcular aproximadamente el área comprendida entre el eje de abscisas, las rectas x = 2 y x = 17 y la gráfica de la función y = f(x), a la que pertenecen los puntos de la tabla siguiente :*

x	2	5	8	11	14	17
y	0’69	1’61	2	2’42	2’64	2’83

---oo0oo---

La fórmula a aplicar es :

$$\int_2^{17} f(x)dx \simeq h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2})$$

En donde :

$h = 5-2 = 8-5 = \frac{17-2}{5} = 3$ y las y_i son los valores dados en la tabla de la función

$$\int_2^{17} f(x)dx \simeq 3\left(\frac{0'69}{2} + 1'61 + 2 + 2'42 + 2'64 + \frac{2'83}{2}\right) = 3 \cdot 10'43 = 31'29$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Calcula de nuevo la integral definida del ejemplo 6 dividiendo el intervalo de integración en diez partes iguales.*

---oo0oo---

Como el intervalo de integración es [0,1] y hemos de dividirlo en diez partes iguales, la amplitud de cada una será 0’1, los valores de x e y son :

x	0	0’1	0’2	0’3	0’4	0’5	0’6	0’7	0’8	0’9	1
y	1	0’99	0’9608	0’9139	0’8521	0’7788	0’6976	0’6126	0’5273	0’4449	0’3679

En donde los valores de $y_i = e^{-x_i^2}$

Aplicando la fórmula :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \simeq h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_9+\frac{y_{10}}{2}\right)=0'1\left(\frac{1}{2}+0'99+0'9608+0'9139+0'8521+0'7788+\right.$$
$$\left.+0'6976+0'6126+0'5273+0'4449+\frac{0'3679}{2}\right)=0'7469$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Calcula, utilizando el método de los trapecios y dividiendo el intervalo de integración en ocho partes iguales, la integral siguiente:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$$

---oo0oo---

El intervalo [0, 1] se ha dividir en 8 partes, luego la amplitud de cada intervalo :

$$h=\frac{1-0}{8}=0'125$$

Los puntos y sus imágenes las escribimos en la tabla siguiente:

x	0	0’125	0’25	0’375	0’5	0’625	0’75	0’875	1
y	0’25	0’249	0’2461	0’2415	0’2353	0’2278	0’2192	0’2098	0’2

Ahora hallamos el área pedida :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} \simeq 0'125\left(\frac{0'25}{2}+0'249+0'2461+0'2415+0'2353+0'2278+0'2192+0'2098+\frac{0'2}{2}\right)=0'2317$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Halla el área limitada por la gráfica de f(x) = cos x y el eje de abscisas entre las abscisas π/2 y π.*

---oo0oo---

① **Hallamos los ceros de la función**

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

② **Establecemos los intervalos de integración :**

Como la función no se anula en el intervalo de integración dado, sólo tenemos un intervalo de integración [π/2, π].

③ **Cálculo del área :**

$$\text{Área} = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx\right| = \left|\ \operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left| = \left|\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}\right| = |0-1| = 1u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ *Halla el área limitada por f(x)* = $x^2 - 2x - 15$, *el eje OX y las rectas* x = - 4 y x = 7.

---oo0oo---

① **Hallamos los ceros de la función**

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{4+60}}{2} = \frac{2-8}{2} = -3 \\ x = \frac{2+\sqrt{4+60}}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \end{cases}$$

② **Establecemos los intervalos de integración** :

Como la función se anula en el intervalo de integración dado, tenemos tres intervalos de integración [-4, -3], [-3, 5] y [5, 7] .

③ **Cálculo del área** :

$$\text{Área} = \left|\int_{-4}^{-3}(x^2-2x-15)dx\right| + \left|\int_{-3}^{5}(x^2-2x-15)dx\right| + \left|\int_{5}^{7}(x^2-2x-15)dx\right| = \left|\ \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x\right]_{-4}^{-3}\Bigg| +$$

$$+\left|\ \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x\right]_{-3}^{5}\Bigg| + \left|\ \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x\right]_{5}^{7}\Bigg| = \left|\left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 - 15(-3)\right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 - 15(-4)\right)\right| +$$

$$+\left|\left(\frac{(5)^3}{3} - (5)^2 - 15(5)\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 - 15(-3)\right)\right| + \left|\left(\frac{(7)^3}{3} - (7)^2 - 15(7)\right) - \left(\frac{(5)^3}{3} - (5)^2 - 15(5)\right)\right| =$$

$$= |(-9-9+45) - (-\tfrac{64}{3} - 16 + 60)| + |(\tfrac{125}{3} - 25 - 75) - (-9-9+45)| + |(\tfrac{343}{3} - 49 - 105) - (\tfrac{125}{3} - 25 - 75)| =$$

$$= \left|27 - \tfrac{68}{3}\right| + \left|-\tfrac{175}{3} - 27\right| + \left|-\tfrac{119}{3} - (-\tfrac{175}{3})\right| = \tfrac{13}{3} + \tfrac{256}{3} + \tfrac{56}{3} = \tfrac{325}{3}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ *Halla el área limitada por f(x)* = $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ *y el eje horizontal entre las abscisas* -5 y 3/2 .

---oo0oo---

① **Hallamos los ceros de la función**

Hemos de probar por Ruffini entre los Div(-6)= { ±1, ±2 , ±3, ±6 }

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	0
2		2	6	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

Los ceros son, pues, : x = -1, x = 2 y x = -3.

② **Establecemos los intervalos de integración** :

Como la función tiene dos ceros (-3,-1) en el intervalo de integración dado, tenemos tres intervalos de integración [-5, -3], [-3, -1] y [-1, 3/2] .

③ **Cálculo del área** :

$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^{-3}(x^3+2x^2-5x-6)dx\right| + \left|\int_{-3}^{-1}(x^3+2x^2-5x-6)dx\right| + \left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(x^3+2x^2-5x-6)dx\right| =$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{5x^2}{2}-6x\right)\Big]_{-5}^{-3}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{5x^2}{2}-6x\right)\Big]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{5x^2}{2}-6x\right)\Big]_{-1}^{\frac{3}{2}}\right| =$$

$$=\left|\left(\frac{(-3)^4}{4}-\frac{2(-3)^3}{3}-\frac{5(-3)^2}{2}-6(-3)\right)-\left(\frac{(-5)^4}{4}-\frac{2(-5)^3}{3}-\frac{5(-5)^2}{2}-6(-5)\right)\right| + \left|\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{2(-1)^3}{3}-\frac{5(-1)^2}{2}-6(-1)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{(-3)^4}{4}-\frac{2(-3)^3}{3}-\frac{5(-3)^2}{2}-6(-3)\right)\right| + \left|\left(\frac{(3/2)^4}{4}-\frac{2(3/2)^3}{3}-\frac{5(3/2)^2}{2}-6(3/2)\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{2(-1)^3}{3}-\frac{5(-1)^2}{2}-6(-1)\right)\right| =$$

$$=\left|\frac{135}{4}-\frac{2485}{12}\right| + \left|\frac{53}{12}-\frac{135}{4}\right| + \left|-\frac{999}{64}-\frac{53}{12}\right| = \frac{520}{3}+\frac{88}{3}+\frac{3845}{192} = \frac{38533}{192}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ *Halla el área limitada por f(x)* = $x^3 + x^2 - 10x + 8$ *y el eje* ***OX***.

---oo0oo---

① **Hallamos los ceros de la función**

Hemos de probar por Ruffini entre los Div(8)= { ±1, ±2 , ±4, ±8 }

	1	1	-10	8
1		1	2	-8
	1	2	-8	0
2		2	8	
	1	4	0	
-4		-4		
	1	0		

Los ceros son, pues, : x = - 4, x = 1 y x = 2.

② **Establecemos los intervalos de integración** :

Como la función tiene tres ceros, tenemos dos intervalos de integración [-4, 1], [1, 2]

③ **Cálculo del área** :

$$\text{Área} = \left|\int_{-4}^{1}(x^3+x^2-10x+8)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3+x^2-10x+8)dx\right| =$$

$$= \left| \left(\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{1}{3}x^3-5x^2+8x\right)\Big]_{-4}^{1}\right| + \left| \left(\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{1}{3}x^3-5x^2+8x\right)\Big]_{1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(\tfrac{1^4}{4}+\tfrac{1^3}{3}-5\cdot 1^2+8\cdot 1\right)-\left(\tfrac{(-4)^4}{4}+\tfrac{(-4)^3}{3}-5\cdot(-4)^2+8\cdot(-4)\right)\right| +$$

$$+\left|\left(\tfrac{2^4}{4}+\tfrac{2^3}{3}-5\cdot 2^2+8\cdot 2\right)-\left(\tfrac{1^4}{4}+\tfrac{1^3}{3}-5\cdot 1^2+8\cdot 1\right)\right| =$$

$$= \left|\tfrac{43}{12}-(-\tfrac{208}{3})\right| + \left|\tfrac{8}{3}-\tfrac{43}{12}\right| = \tfrac{875}{12}+\tfrac{11}{12} = \tfrac{886}{12} = \tfrac{443}{6}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❶ *Halla el área limitada por las gráficas de f(x) =* x *y g (x) =* x^2 - 2x - 8 *entre las abscisas -1 y 2.*

---oo0oo---

① **Cálculo de las abscisas de los puntos de corte de las funciones :**

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=x^2-2x-8 \Leftrightarrow x^2-3x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{9+32}}{2}=\frac{2-\sqrt{41}}{2}\simeq -1'7 \\ x=\frac{3+\sqrt{9+32}}{2}=\frac{2+\sqrt{41}}{2}\simeq 4'7 \end{cases}$$

② **Establecer los intervalos de integración:**

Como los puntos de corte no están en el intervalo pedido integramos en [-1, 2].

③ **Hallar el área :**

$$A=\left|\int_{-1}^{2}(f(x)-g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^{2}(x-x^2+2x+8)dx\right| = \left|\int_{-1}^{2}(-x^2+3x+8)dx\right| = \left| -\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{3x^2}{2}+8x\Big]_{-1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(\tfrac{-2^3}{3}+\tfrac{3\cdot 2^2}{2}+8\cdot 2\right)-\left(\tfrac{-(-1)^3}{3}+\tfrac{3\cdot(-1)^2}{2}+8\cdot(-1)\right)\right| = |(-\tfrac{8}{3}+6+16)-(\tfrac{1}{3}+\tfrac{3}{2}-8)| = \left|\tfrac{58}{3}+\tfrac{37}{6}\right| = \tfrac{51}{2}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❷ *Halla el área limitada por las gráficas de f(x) = sen x y g (x) = cos x entre 0 y* π.

---oo0oo---

① **Cálculo de las abscisas de los puntos de corte de las funciones :**

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}x=\cos x$, dividiendo por $\cos x \Rightarrow \operatorname{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi (k\in Z)$

② **Establecer los intervalos de integración:**

En el intervalo pedido está el punto de corte x = π/4, tenemos dos intervalos de integración : [0,π/4] y [π/4, π] .

③ **Hallar el área :**

$$A=\left|\int_0^{\pi/4}(f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_{\pi/4}^{\pi}(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_0^{\pi/4}(\operatorname{sen}x-\cos x)dx\right|+\left|\int_{\pi/4}^{\pi}(\operatorname{sen}x-\cos x)dx\right|=$$

$$=\left|\left.-\cos x-\operatorname{sen}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left.-\cos x-\operatorname{sen}x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right|=|(-\cos\tfrac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4})-(-\cos 0-\operatorname{sen}0)|+$$

$$+|(-\cos\pi-\operatorname{sen}\pi)-(-\cos\tfrac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4})|=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1-0)\right|+\left|(-(-1)-0)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|=$$

$$=\left|-\sqrt{2}+1\right|+\left|1+\sqrt{2}\right|=-\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}=2u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❸ *Halla, en cada caso, el área limitada por:*

a) *$f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=-x^2+5x$*

① **Cálculo de las abscisas de los puntos de corte de las funciones :**

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-3x=-x^2+5x\Rightarrow 2x^2-8x=0\Leftrightarrow 2x(x-4)=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2x=0\Leftrightarrow x=0\\ x-4=0\Leftrightarrow x=4\end{Bmatrix}$$

② **Establecer los intervalos de integración:**

Los dos puntos de corte forman un único intervalo : [0, 4].

③ **Hallar el área :**

$$A=\left|\int_0^4(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_0^4(x^2-3x-(-x^2+5x))dx\right|=\left|\int_0^4(2x^2-8x)dx\right|=$$

$$=\left|\left.\frac{2x^3}{3}-4x^2\right]_0^4\right|=\left|\left(\frac{2\cdot4^3}{3}-4\cdot4^2\right)-\left(\frac{2\cdot0^3}{3}-4\cdot0^2\right)\right|=\left|\frac{128}{3}-64\right|=\left|-\frac{64}{3}\right|=\frac{64}{3}u^2$$

b) *$f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=-x^2/2$.*

① **Cálculo de las abscisas de los puntos de corte de las funciones :**

$$x^3-3x=-\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2x^3+x^2-6x=0\Leftrightarrow x(2x^2+x-6)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ 2x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

② **Establecer los intervalos de integración:**

Los tres puntos de corte forman dos intervalos : [-2, 0] y [0, 3/2].

③ **Hallar el área :**

$$A=\left|\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{\frac{3}{2}}(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3-3x-\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(x^3-3x+\frac{x^2}{2}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\ \frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0}\left|+\left|\ \frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|=\left|(0)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+\frac{(-2)^3}{6}-\frac{3(-2)^2}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{(\frac{3}{2})^4}{4}+\frac{(\frac{3}{2})^3}{6}-\frac{3(\frac{3}{2})^2}{2}\right)-0\right|=$$

$$=\left|-(4-\frac{4}{3}-6)\right|+\left|\frac{81}{64}+\frac{9}{16}-\frac{27}{8}\right|=\left|\frac{10}{3}\right|+\left|-\frac{99}{64}\right|=\frac{10}{3}+\frac{99}{64}=\frac{937}{192}u^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❹ *Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad variable v(t) = (3 t - 2) m/s. Calcula el espacio recorrido entre los 18 s y los 33 s.*

---oo0oo---

$$v(t)=\frac{ds}{dt}\Rightarrow ds=v(t)dt\Rightarrow\int_{s_1}^{s_2}ds=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt,\ s_2-s_1=\int_{18}^{33}(3t-2)dt=\ \frac{3t^2}{2}-2t\Big]_{18}^{33}=\left(\frac{3\cdot 33^2}{2}-2\cdot 33\right)-$$

$$-\left(\frac{3\cdot 18^2}{2}-2\cdot 18\right)=1567'5-450=1117'5m$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❺ *Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración constante a (t) = 12 m/s² . Halla el incremento de velocidad experimentado entre los 10 s y los 12 s.*

---oo0oo---

$$a(t)=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=a(t)dt\Rightarrow\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t_1}^{t_2}a(t)dt\Leftrightarrow\Delta v=v_2-v_1=\int_{10}^{12}12dt=\ 12t]_{10}^{12}=(12\cdot 12-12\cdot 10)$$

$$\Delta v=144-120=24\ \frac{m}{s}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❻ *Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad variable v(t) = (5 t - 2) m/s. Calcula la velocidad media que desarrolla entre los 20 s y los 27 s.*

---oo0oo---

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{20}^{27}(5t-2)dt}{27-20} = \frac{\left.\frac{5t^2}{2} - 2t\right]_{20}^{27}}{7} = \frac{\left(\frac{5 \cdot 27^2}{2} - 2 \cdot 27\right) - \left(\frac{5 \cdot 20^2}{2} - 2 \cdot 20\right)}{7} = \frac{808'5}{7} = 115'5 \frac{m}{s}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❼ *Con los datos del ejemplo 14 calcula en qué semestre del primer año se vendieron más coches.*

---oo0oo---

Hemos de hallar los coches vendidos en cada semestre :

① **Primer semestre** :

$$F(6 \cdot 30) - F(0) = 8 \int_0^{180} e^{\frac{t}{90}} dt = \left. 8 \cdot 90 e^{\frac{t}{90}} \right]_0^{180} = 720\left(e^{\frac{180}{90}} - e^{\frac{0}{90}}\right) = 720(e^2 - e^0) =$$

$$= 720 \cdot 6'3890 \simeq 4600 \text{ coches vendidos.}$$

② **Segundo semestre :**

$$F(360) - F(180) = 8 \int_{180}^{360} e^{\frac{t}{90}} dt = \left. 8 \cdot 90 e^{\frac{t}{90}} \right]_{180}^{360} = 720\left(e^{\frac{360}{90}} - e^{\frac{180}{90}}\right) = 720(e^4 - e^2) =$$

$$= 720 \cdot 47'20 \simeq 33990 \text{ coches vendidos.}$$

Se vendieron 33 990 - 4 600 = 29 390 coches más en el segundo semestre.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈