Actividades

Cuestiones

❶ *Si sabemos calcular una primitiva de una función, ¿ es posible calcularlas todas ? Justifica tu respuesta.*

---oo0oo---

Se diferencian en una constante, luego teniendo los datos necesarios, podríamos hallar cualquiera.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *¿ Es posible que dos funciones tengan la misma primitiva ? Justifica tu respuesta.*

---oo0oo---

No pues si tiene la misma primitiva han de ser la misma función.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *Si sabemos que F(x)* = ln|x| *es una primitiva de la función f(x)* = 17x, *razona por qué se toma x en valor absoluto.*

---oo0oo---

Porque la función logaritmo sólo está definida para valores positivos y f(x) está definida para valores positivos y negativos (pero no para x = 0) :

$$F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow F'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Determina si es correcto el cálculo de la integral indefinida siguiente :*

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

Razona la respuesta.

---oo0oo---

El cambio es t = senx y no t = x, la forma correcta de resolverla sería :

$$\int sen^4 x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{c} t = senx \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{sen^5 x}{5} + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ejercicios y problemas

❺ *Indica cuáles de las siguientes funciones son primitivas de f(x)* = tgx.

---oo0oo---

Hemos de comprobar que la derivada de la primitiva nos da la función f(x) = tgx.

a) F(x) = $\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F'(x) = \frac{0 \cdot \cos^2 x - 2\cos x(-senx)}{\cos^4 x} = \frac{2senx}{\cos^3 x} = \frac{2tgx}{\cos^2 x}$, No.

b) H(x) = 1 + $tg^2 x \Rightarrow H'(x) = 2tgx(1 + tg^2 x)$, No

c) G(x) = -ln(cosx) $\Rightarrow G'(x) = -\frac{-senx}{\cos x} = \frac{senx}{\cos x} = tgx$, Sí

d) I(x) = 5 - ln(cosx) $\Rightarrow I'(x) = -\frac{-senx}{\cos x} = tgx$, Sí

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Calcula las integrales siguientes :*

$$a) \int 8\sqrt[3]{x}\, dx = 8\int x^{\frac{1}{3}} dx = 8\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C = 6\sqrt[3]{x^4} + C = 6x\sqrt[3]{x} + C$$

$$b) \int \frac{6x^2}{\sqrt{x}} dx = 6\int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 6\int x^{\frac{3}{2}} dx = 6\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} = \frac{12}{5}\sqrt{x^5} = \frac{12}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

$$c) \int 3\cos x dx = 3\int \cos x dx = 3senx + C$$

$$d) \int \frac{1}{4x^5} dx = \frac{1}{4}\int x^{-5} dx = \frac{1}{4}\frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{16x^4} + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Calcula la integral indefinida de f en los siguientes casos :*

$$a) \int f(x) = \int (x^4 - 2x^3 + x - 5)dx = \int x^4 dx - 2\int x^3 dx + \int x dx - 5\int dx = \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} +$$

$$+ \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$b) \int (3x + 2\sqrt[4]{x})^2 dx = \int (9x^2 + 12x\sqrt[4]{x} + 4\sqrt{x})dx = 9\int x^2 dx + 12\int x^{\frac{5}{4}} dx + 4\int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 9\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^{\frac{9}{4}}}{9/4} + 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = 3x^3 + \frac{16}{3}x^2\sqrt[4]{x} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + C$$

c) $\int(3\text{senx}+5\cos x)dx=3\int \text{senx}dx+5\int \cos xdx=-3\cos x+5\text{senx}+C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ *Aplica las propiedades de las integrales indefinidas para calcular las integrales siguientes :*

a) $\int(3x^2+e^x)dx=3\int x^2dx+\int e^xdx=3\frac{x^3}{3}+e^x+C=x^3+e^x+C$

b) $\int(x+\text{senx})dx=\int xdx+\int \text{senx}dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$

c) $\int(\frac{5}{3}e^x-\cos x)dx=\frac{5}{3}\int e^xdx-\int \cos xdx=\frac{5}{3}e^x-\text{senx}+C$

d) $\int(x-\sqrt{x})dx=\int xdx-\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

e) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int xdx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}+C$

f) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int \frac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx=\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾*Multiplica y divide las siguientes funciones por el factor correspondiente para calcular estas integrales indefinidas:*

a) $\int \frac{1}{5x+1}dx=\int \frac{5}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}dx=\frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+1}dx=\frac{1}{5}\ln|5x+1|+C$

b) $\int e^{2x-1}dx=\int \frac{2}{2}e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx=\int \frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx=\frac{1}{2}\int 2(2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{1/2}=\sqrt{2x+3}+C$

d) $\int \cos\frac{x}{2}dx=\int \frac{2}{2}\cos\frac{x}{2}dx=2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=2\text{sen}\frac{x}{2}+C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ *Halla, reconociendo en el integrando la estructura f(g(x))· g'(x), las siguientes integrales :*

a) $\int \text{sen}^5x\cos xdx=\left\{\begin{array}{ll} f(x)=x^5 \text{ y} & g(x)=\text{senx} \\ f(g(x))=\text{sen}^5x\ ; & g'(x)=\cos xdx \end{array}\right\}=\frac{\text{sen}^6x}{6}+C$

b) $\int \frac{x^7}{1+x^8}dx=\left\{\begin{array}{ll} f(x)=\frac{1}{x} \text{ y} & g(x)=1+x^8 \\ f(g(x))=\frac{1}{1+x^8} & ;g'(x)=8x^7 \end{array}\right\}=\frac{1}{8}\int \frac{1}{1+x^8}8x^7dx=\frac{1}{8}\ln(1+x^8)+C$

c) $3\int xe^{2x^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=e^x \text{ y} & g(x)=2x^2+1 \\ f(g(x)) = e^{2x^2+1} & ; g'(x)=4xdx \end{array} \right\} = \frac{3}{4}\int e^{2x^2+1}4xdx = \frac{3e^{2x^2+1}}{4}+C$

d) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+sen2x}}dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=1/\sqrt{1+x} \text{ y} & g(x)=sen2x \\ f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+sen2x}} & ; g'(x)=2\cos 2x \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2xdx}{\sqrt{1+sen2x}} = \sqrt{1+sen2x}+C$

e) $\int e^x sene^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=senx \text{ y} & g(x)=e^x \\ f(g(x)=sene^x & ; g'(x)=e^x \end{array} \right\} = -\cos e^x + C$

f) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\frac{1}{1+x}\text{y} & g(x)=e^{3x} \\ f(g(x)) = \frac{1}{1+e^{3x}}; & g'(x)=3e^{3x} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+e^{3x}}3e^{3x}dx = \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❶ *Calcula las siguientes integrales usando el método de descomposición :*

---oo0oo---

a) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \ln|x| + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \ln|x| + 2\sqrt{x} + C$

b) $\int\left(\frac{5}{4x^3}+\frac{1}{x}-\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \frac{5}{4}\int x^{-3}dx + \int \frac{1}{x}dx - \frac{2}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{5}{4}\frac{x^{-2}}{-2} + \ln|x| - \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = -\frac{5}{8x^2} +$

$+\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x} + C$

c) $\int \frac{x^5-2x^3+x-1}{x^2}dx = \int \frac{x^5}{x^2}dx - 2\int \frac{x^3}{x^2}dx + \int \frac{x}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^3dx - 2\int xdx + \int \frac{1}{x}dx - \int x^{-2}dx =$

$= \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

d) $\int \cot g^2 x = \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x}dx = \int \frac{1-sen^2 x}{sen^2 x}dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx - \int dx = -\cot gx - x + C$

e) $\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4+2x^2+1)dx = \int x^4dx + 2\int x^2dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x + C$

f) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{3}\right)dx = 3\int x^{-\frac{1}{4}}dx - \sqrt{3}\int dx = 3\frac{x^{\frac{3}{4}}}{3/4} - \sqrt{3}x + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{3}x + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❷ *Calcula de nuevo las integrales del ejercicio* ❿, *utilizando los cambios de variable que se indican:*

a) $\int sen^5 x\cos xdx = \left\{ \begin{array}{l} t = senx \\ dt = \cos xdx \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}sen^6 x + C$

b) $\int \frac{x^7}{1+x^8}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1+x^8 \Rightarrow dt = 8x^7dx \\ dx = dt/8x^7 \end{array} \right\} = \int \frac{x^7}{t}\frac{dt}{8x^7} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln(1+x^8) + C$

c) $\int 3xe^{2x^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 2x^2+1 \Rightarrow dt = 4xdx \\ dx = dt/4x \end{array} \right\} = 3\int xe^t\frac{dt}{4x} = \frac{3}{4}\int e^t dt = \frac{3}{4}e^t + C = \frac{3}{4}e^{2x^2+1} + C$

d) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\text{sen}2x}}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1+\text{sen}2x \Rightarrow dt = 2\cos 2xdx \\ dx = dt/2\cos 2x \end{array} \right\} = \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$

$= \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}/1/2 + C = \sqrt{t} + c = \sqrt{1+\text{sen}2x} + C$

e) $\int e^x \text{sen}e^x dx = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = dt/e^x \end{array} \right\} = \int e^x \text{sen}t\frac{dt}{e^x} = \int \text{sen}tdt = -\cos t + C = -\cos e^x + C$

f) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1+e^{3x} \Rightarrow dt = 3e^{3x}dx \\ dx = \frac{dt}{3e^{3x}} \end{array} \right\} = \int \frac{e^{3x}}{t}\frac{dt}{3e^{3x}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t + C = \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C$

Son semejantes pues se basan en lo mismo, en el primero la conversión se hace en el integrando y en este fuera.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❸ *Halla las integrales siguientes aplicando un cambio de variable adecuado.*

a) $\int \frac{8x^3+4}{x^4+2x-1}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^4+2x-1 \Rightarrow dt = (4x^3+2)dx \\ dx = \frac{dt}{4x^3+2} \end{array} \right\} = \int \frac{2(4x^3+2)}{t}\frac{dt}{4x^3+2} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C =$

$= 2\ln|4x^3+2| + C = \ln(4x^3+2)^2 + C$

b) $\int \frac{\text{sen}2x}{1-4\cos 2x}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1-4\cos 2x \Rightarrow dt = 8\text{sen}2xdx \\ dx = dt/8\text{sen}2x \end{array} \right\} = \int \frac{\text{sen}2x}{t}\frac{dt}{8\text{sen}2x} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C =$

$= \frac{1}{8}\ln|1-4\cos 2x| + C$

c) $\int \frac{e^{\text{cotg}x}}{\text{sen}^2x}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \text{cotg}x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\text{sen}^2x}dx \\ dx = -\text{sen}^2xdt \end{array} \right\} = \int \frac{e^t}{\text{sen}^2x}(-\text{sen}^2x)dt = -\int e^t dt = -e^t + C =$

$= -e^{\text{cotg}x} + C$

d) $\int \frac{\text{tg}x}{\ln(\cos x)}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \ln(\cos x) \Rightarrow dt = \frac{-\text{sen}x}{\cos x}dx = -\text{tg}xdx \\ dx = -dt/\text{tg}x \end{array} \right\} = -\int \frac{\text{tg}x}{t}\frac{dt}{\text{tg}x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C =$

$-\ln|\ln\cos x| + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

14 *Aplica el método de integración por partes para resolver las siguientes integrales :*

a) $\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = x\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x dx = x\operatorname{sen}x -$

$-(-\cos x) + C = x\operatorname{sen}x + \cos x + C$

b) $\int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$

$\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

c) $\int (2x-4)\operatorname{sen}x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = 2x-4 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \operatorname{sen}x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}x dx = -\cos x \end{array} \right\} = -(2x-4)\cos x +$

$+2\int \cos x dx = -(2x-4)\cos x + 2\operatorname{sen}x + C$

d) $2\int xe^{3x}dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\} = 2\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$

e) $\int x^2e^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2xe^{2x}dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}dx$

$= \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2e^{3x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

f) $\int (2x+8)e^x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = 2x+8 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (2x+8)e^x - 2\int e^x dx = (2x+8)e^x -$

$-2e^x = e^x(2x+8-2) + C = e^x(2x+6) + C$

15 *Calcula las integrales siguientes :*

a) $\int \frac{5}{x-2}dx = 5\int \frac{1}{x-2}dx = 5\ln|x-2| + C = \ln|(x-2)^5| + C$

b) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-1}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^3+3x-1 \Rightarrow dt = (3x^2+3)dx \\ dx = dt/3(x^2+1) \end{array} \right\} = \int \frac{x^2+1}{t}\frac{dt}{3(x^2+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C =$

$= \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-1| + C$

c) $\int \frac{2}{x^2-9}dx$, integración de funciones racionales.

① Descomponer el denominador $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

② Descomponer el integrando en fracciones simples :

$$\frac{2}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x+3)(x-3)} \left\{ \begin{array}{l} x=3 \Rightarrow \quad 2 = 0 + B(3+3) \Leftrightarrow B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x=-3 \Rightarrow \ 2 = A(-3-3)+0 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

③ Integración de las fracciones simples :

$$\int \frac{2}{x^2-9}dx = A\int \frac{dx}{x+3} + B\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{3}\ln|x+3| + \frac{1}{3}\ln|x-3| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

d) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$, racional.

① Descomponer el denominador :

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5-\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \\ x = \frac{5+\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

② Descomponer el integrando en fracciones simples :

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \left\{ \begin{array}{l} x=3 \Rightarrow \ 1 = 0 + B(3-2) \Leftrightarrow B = 1 \\ x=2 \Rightarrow \ 1 = A(2-3)+0 \Leftrightarrow A = -1 \end{array} \right\}$$

③ Integración de las fracciones simples :

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\ln|x-2| + \ln|x-3| = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

e) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x-7}dx$, racional

① Descomponer el denominador :

$$x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6-\sqrt{36+28}}{2} = \frac{6-8}{2} = -1 \\ x = \frac{5+\sqrt{36+28}}{2} = \frac{6+8}{2} = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2-6x-7 = (x-7)(x+1)$$

② Descomponer el integrando en fracciones simples :

$$\frac{2x+3}{x^2-6x-7} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-7)}{(x-7)(x+1)} \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow 2(-1)+3 = 0 + B(-1-7) \Leftrightarrow 1 = -8B \Rightarrow B = \frac{-1}{8} \\ x = 7 \Rightarrow 2\cdot 7 + 3 = 8A \Rightarrow A = \frac{17}{8} \end{array} \right\}$$

③ Integración de las fracciones simples :

$$\int \frac{2x+3}{x^2-6x-7}dx = \frac{17}{8}\int \frac{dx}{x-7} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{17}{8}\ln|x-7| - \frac{1}{8}\ln|x+1| + C$$

f) $\int \frac{3x-1}{x^2-3x-4}dx$, racional

① Descomponer el denominador :

$$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{3-\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3-5}{2}=-1 \\ x=\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3+5}{2}=4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

② Descomponer el integrando en fracciones simples :

$$\frac{3x-1}{x^2-3x-4}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)} \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow 3(-1)-1=0+B(-1-5) \Leftrightarrow -4=-5B \Rightarrow B=\frac{4}{5} \\ x=4 \Rightarrow 3\cdot 4-1=A(4+1) \Rightarrow 11=5A \Rightarrow A=\frac{11}{5} \end{array} \right\}$$

③ Integración de las fracciones simples :

$$\int \frac{3x-1}{x^2-3x-4}dx = \frac{11}{5}\int \frac{dx}{x-4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{11}{5}\ln|x-4| + \frac{4}{5}\ln|x+1| + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❻ *¿Qué significa que una función F es primitiva de otra función f ? ¿Cuántas primitivas tiene una función?*

◆ *Halla la primitiva de la función* cotg x = cos x /sen x *cuya gráfica pasa por el punto* (π/ 2,π/ 2).

---oo0oo---

Significa que F' = f y tiene infinitas pues el conjunto de las primitivas de una función es F + C, C ∈ ℝ .

$$F(x)=\cot gx dx=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx=\ln|\operatorname{sen} x|+C, \text{ y como } F(\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \ln|\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}|+C=\tfrac{\pi}{2}$$

$$\ln 1+C=\tfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow C=\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow F(x)=\ln|\operatorname{sen} x|+\tfrac{\pi}{2}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❼ *Halla la primitiva de la función f(x)* = $3x^2$ - 4 x+ 3 *cuya gráfica pasa por el punto* (-1, 3).

---oo0oo---

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 3)dx = x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

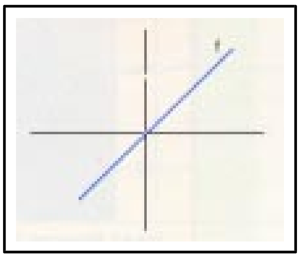
Como ha de pasar por (-1, 3) :

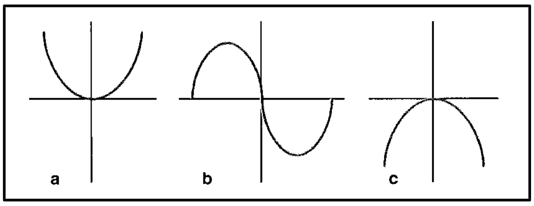
$F(-1) = 3$ es decir $(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + C = 3 \Leftrightarrow -1 - 2 - 3 + C = 3 \Leftrightarrow C = 9$

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 9$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❽ *La figura muestra la gráfica de una función f. ¿ Cuál de las funciones representadas a continuación es una primitiva de la función f ? Razona tu respuesta.*



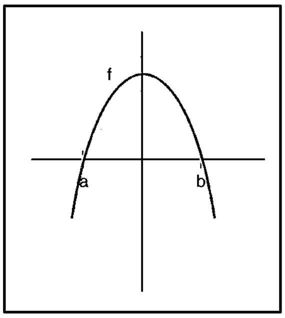


---oo0oo---

Si las gráficas representan una primitiva de f ha de cumplirse F'(x) = f, es decir representa las gráficas de su derivada, como la función f es negativa (-∞ , 0) F(x) será decreciente, en el intervalo (0, ∞) es positiva luego F(x) será creciente y en el punto x = 0 al ser f(0) = F'(0) = 0 y pasar de decreciente a creciente tendrá un mínimo. De las tres posibilidades la que se ajusta a lo dicho es la **(a)** que será una primitiva F(x) de f(x).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❾ *La figura muestra la gráfica de una función f que corta el eje de abscisas en los puntos (a, 0) y (b, 0). Si F es una de sus primitivas, razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*



a) *El valor F(a) es un máximo o un mínimo de F.*

b) *En el intervalo (a, 0) la primitiva F es decreciente.*

c) *En el intervalo (b, +∞) la primitiva F es decreciente.*

---oo0oo---

Como F(x) es una primitiva de f, F'(x) = f(x), luego podemos estudiar la monotonía y los extremos relativos de F(x) a partir de la gráfica de f(x) (su derivada) y construir la tabla :

x	(- ∞, a)	a	(a, b)	b	(b, ∞)

F'(x) = f (x)	< 0	0	<0	0	< 0
F(x)	↘	∪	↗	∩	↘

Y ahora podemos responder las cuestiones :

a) Vemos que F(a) es un mínimo.

b) El intervalo (a, 0) está incluido en el (a, b) y la función es creciente, luego falso.

c) Verdadero.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

20 *El crecimiento de la población de un país en función del tiempo sigue, aproximadamente, la expresión siguiente:*

$$p(t)=\frac{0'8e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4e^{\frac{-t}{100}}+1\right)^2}$$

Sabiendo que la población actual del país (t = 0) es de 4 millones de habitantes, utiliza el cambio de variable:

$$4e^{\frac{-t}{100}}+1=x$$

para encontrar la función P que rige la población de dicho país.

- ¿Cuál sería la función P si la población actual fuese de 5,5 millones de habitantes?

---oo0oo---

$$P(t)=\int p(t)dt=\int\frac{0'8e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4e^{\frac{-t}{100}}+1\right)^2}dt=\left\{\begin{array}{c}x=4e^{\frac{-t}{100}}+1\Rightarrow dx=4\frac{-1}{100}e^{\frac{-t}{100}}dt\\ dt=-25dx/e^{\frac{-t}{100}}\end{array}\right\}=\int\frac{0'8e^{\frac{-t}{100}}}{x^2}\frac{-25dx}{e^{\frac{-t}{100}}}=$$

$$=-20\int\frac{1}{x^2}dx=-20\int x^{-2}dx=-20\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{20}{x}+C=\frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}}+1}+C$$

Como P(0) = 4 millones:

$$P(0)=\frac{20}{4e^{\frac{-0}{100}}+1}+C=\frac{20}{4e^0+1}+C=\frac{20}{5}+C=4\Leftrightarrow C=4-4=0 \text{ y por tanto :}$$

$$P(t)=\frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}}+1}$$

Si P(0) = 5' 5 millones :

$$P(0)=\frac{20}{4e^{\frac{-0}{100}}+1}+C=\frac{20}{4e^0+1}+C=\frac{20}{5}+C=5'5\Leftrightarrow C=5'5-4=1'5 \text{ y por tanto :}$$

$$P(t)=\frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}}+1}+1'5$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❶ *En el proceso de recuperación de un determinado enfermo, se ha observado que el ritmo con el que elimina una sustancia tóxica viene dado por la función:*

$$f(t)=-0'198e^{-0'22t}$$

donde t es el tiempo en horas transcurrido a partir de la ingestión de dicha sustancia.

Halla la función F(t) *que expresa la concentración de la sustancia en la sangre en gramos por litro, sabiendo que una hora después de la ingestión la concentración es* 1 g/l .

---oo0oo---

$$F(t)=\int f(t)dt=\int -0'198e^{-0'22t}=-0'198\int e^{-0'22t}dt=-0'198\frac{e^{-0'22t}}{-0'22}+C=0'9e^{-0'22t}+C$$

Y como F(1) = 1, hallamos la constante C :

$$F(1)=0'9e^{-0'22\cdot 1}+C=1\Leftrightarrow C=1-0'9e^{-0'22}=0'27773...\simeq 0'28$$

La función buscada es :

$$F(t)=0'9e^{-0'22t}+0'28$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈