❶ *Indica cuáles de las funciones siguientes son primitivas de f(x) =* $\mathbf{xe^x}$ *:*

Si al derivarlas dan la función f(x), sí son primitivas, en caso contrario no.

a) $F(x) = e^x (x-1)$

$F'(x) = e^x (x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x (x - 1 + 1) = x e^x = f(x)$ **Sí**.

b) $G(x) = xe^x - e^x + 2$.

$G'(x) = 1\cdot e^x + x e^x - e^x = x e^x = f(x)$ **Sí**.

c) $H(x) = x e^x - x - 2$

$H'(x) = 1\cdot e^x + x e^x - 1 = e^x(x+1) - 1 \neq f(x)$ **No.**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Sabiendo que :*

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ y } \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

aplica las propiedades de las integrales indefinidas para hallar las integrales de las funciones :

a) $f(x) = e^x - \cos x$

$$\int f(x)dx = \int (e^x - \cos x)dx = \int e^x dx - \int \cos x dx = e^x + C_1 - (\operatorname{sen} x + C_2) = e^x - \operatorname{sen} x + C$$

b) $f(x) = 3\cos x + e^x$

$$\int f(x)dx = \int (3\cos x + e^x)dx = \int 3\cos x dx + \int e^x dx = 3\int \cos x dx + \int e^x dx = 3(\operatorname{sen} x + C_1) +$$

$$+ e^x + C_2 = 3\operatorname{sen} x + e^x + (3C_1 + C_2) = 3\operatorname{sen} x + e^x + C$$

c) $f(x) = 5e^x + \cos x$

$$\int f(x)dx = \int (5e^x + \cos x)dx = \int 5e^x dx + \int \cos x dx = 5\int e^x dx + \int \cos x dx = 5(e^x + C_1) +$$

$$+ \operatorname{sen} x + C_2 = 5e^x + \operatorname{sen} x + (5C_1 + C_2) = 5e^x + \operatorname{sen} x + C$$

d) $f(x) = e^x/12 - \cos x$.

$$\int f(x)dx = \int \left(\tfrac{e^x}{12} - \cos x\right)dx = \int \tfrac{e^x}{12}dx - \int \cos x dx = \tfrac{1}{12}\int e^x dx - \int \cos x dx = \tfrac{1}{12}(e^x + C_1) -$$

$$- \operatorname{sen} x + C_2 = \tfrac{e^x}{12} - \operatorname{sen} x + \left(\tfrac{C_1}{12} + C_2\right) = \tfrac{e^x}{12} - \operatorname{sen} x + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *Halla las integrales* :

a) $\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C$

b) $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

c) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} dx = \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + C = \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + C$

e) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

f) $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8} + C = \frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Utiliza las propiedades de las integrales para calcular las siguientes:*

a) $\int -2\sqrt[5]{x^3}\, dx = -2\int x^{\frac{3}{5}} dx = -2\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = -2\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + C = -\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{4} + C$

b) $\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx + \int x^{-3}dx = \ln x + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$

c) $\int (x+1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx = \int x^2 dx + 2\int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

d) $\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^3+2 \Rightarrow \ dt = 3x^2 dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{array} \right. = \int \frac{x^2}{t}\frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t = \frac{1}{3}\ln|x^3+2| + c$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Halla las integrales siguientes :*

a) $\int (x^4-3x)^5(4x^3-3)dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^4-3x \\ dt = (4x^3-3)dx \ \Rightarrow dx = \frac{dt}{4x^3-3} \end{array} \right\} =$

$= \int t^5(4x^3-3)\frac{dt}{(4x^3-3)} = \int t^5 dt = \frac{t^{5+1}}{5+1} = \frac{t^6}{6} = \frac{1}{6}(x^4-3x)^6 + C$

b) $\int \cot g x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x dx \ \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos x}{t}\frac{dt}{\cos x} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln|\operatorname{sen}x| + C$$

c) $$\int \frac{x^3+2}{(x^4+8x+1)^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^4+8x+1 \\ dt = (4x^3+8)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4(x^3+2)} \end{array} \right\} = \int \frac{x^3+2}{t^2}\frac{dt}{4(x^3+2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{4}\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{4t} = -\frac{1}{4(x^4+8x+1)} + C$$

d) $$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dx = 2\sqrt{x}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{3^t}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\,dt = 2\int 3^t dt = \frac{2\cdot 3^t}{\ln 3} + C =$$

$$= \frac{2}{\ln 3}3^{\sqrt{x}} + C$$

e) $$\int x^2 e^{x^3}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{array} \right\} = \int x^2 e^t \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

f) $$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{sen}x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

g) $$\int \frac{x^2}{x^3+2}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^3+2 \Rightarrow dt = 3x^2dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{array} \right\} = \int \frac{x^2}{t}\cdot\frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+2| + C$$

h) $$\int \frac{2^x}{5^x}dx = \int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Utiliza el método de descomposición para hallar las integrales :*

a) $\int (\sqrt{x}+2)^4 dx$

Para resolver esta integral hemos de recordar la fórmula del binomio de Newton para realizar la potencia del binonmio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

En nuestro caso :

$$(\sqrt{x}+2)^4 = \binom{4}{0}(\sqrt{x})^4 + \binom{4}{1}(\sqrt{x})^3 2 + \binom{4}{2}(\sqrt{x})^2 2^2 + \binom{4}{3}\sqrt{x}\,2^3 + \binom{4}{4}2^4 =$$

$$= x^2 + 8\sqrt{x^3} + 24x + 32\sqrt{x} + 16$$

Entonces :

$$= \int(\sqrt{x}+2)dx = \int\left(x^2+8\sqrt{x^3}+24x+32\sqrt{x}+16\right)dx = \int x^2dx + 8\int x^{\frac{3}{2}}dx +$$

$$+24\int xdx + 32\int x^{\frac{1}{2}}dx + 16\int dx = \frac{x^3}{3} + 8\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 24\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 16x + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{16\sqrt{x^5}}{5} + 12x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 16x + C = \frac{x^3}{3} + \frac{16}{5}x^2\sqrt{x} + 12x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 16x + C$$

b) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$

$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

c) $\int \frac{9^x+6^x}{3^x}dx = \int(\frac{9}{3})^x dx + \int(\frac{6}{3})^x dx = \int 3^x dx + \int 2^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

d) $\int \frac{x^3+4x+3}{x}dx = \int \frac{x^3}{x}dx + 4\int \frac{x}{x}dx + 3\int \frac{dx}{x} = \int x^2dx + 4\int dx + 3\int \frac{1}{x}dx =$

$= \frac{x^3}{3} + 4x + 3\ln|x| + C$

e) $\int \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x^2}dx = \int \frac{x^2-1}{x^2}dx = \int \frac{x^2}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \int dx - \int x^{-2}dx = x - \frac{x^{-1}}{-1} =$

$= x + \frac{1}{x} + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Utiliza el cambio de variable indicado para calcular las integrales siguientes :*

a) $\int(\frac{1}{3}x+2)^8dx = \left\{\begin{matrix} t = \frac{1}{3}x+2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{3} \\ dx = 3dt \end{matrix}\right\} = \int t^8 3dt = 3\int t^8dt = 3\frac{t^9}{9} =$

$= \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x+2)^9 + C$

b) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen}x}}dx = \left\{\begin{matrix} t = \text{sen}x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{matrix}\right\} = \int \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt =$

$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\text{sen}x} + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ *Utiliza el método de integración por partes para hallar las integrales :*

a) $\int x\,\text{sen}x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}x\,dx & \Rightarrow v = \int dv = \int \text{sen}x\,dx = -\cos x \end{array} \right\} = -x\cos x -$

$-\int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen}x + C$

b) $\int 3x \cdot e^x dx = 3\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = 3\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$

$= 3(xe^x - e^x) + C = 3e^x(x-1) + C$

c) $\int x^5 \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^5 dx & \Rightarrow v = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} \end{array} \right\} = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6} \cdot \frac{1}{x}dx =$

$= \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\frac{x^6}{6} + C = \frac{x^6}{6}(\ln x - \frac{1}{6}) + C$

d) $\int xe^{3x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx & \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx =$

$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}e^{3x}(x - \frac{1}{3}) + C$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ *Calcula las siguientes integrales de funciones racionales :*

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx$

① Descomponemos el denominador : $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

② Integrando como suma de fracciones simples :

$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$, igualamos numeradores $2x+1 = A(x-2) + B(x+2)$

y dando valores :

$\left\{ \begin{array}{ll} x = 2 \Rightarrow & 2\cdot 2 + 1 = A(2-2) + B(2+2) \Leftrightarrow 5 = 4B \Leftrightarrow B = \frac{5}{4} \\ x = -2 \Rightarrow & 2(-2) + 1 = A(-2-2) + B(-2+2) \Leftrightarrow -3 = -4A \Leftrightarrow A = \frac{3}{4} \end{array} \right\}$ luego :

③ Integración de las fracciones obtenidas :

$\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx = \int \frac{3/4}{x+2}dx + \int \frac{5/4}{x-2}dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C =$

$= \ln\sqrt[4]{|x+2|^3} + \ln\sqrt[4]{|x-2|^5} + C = \ln\sqrt[4]{|x+2|^3 \cdot |x-2|^5} + C$

b) $\int \frac{1}{x^2-3}dx$

① Descomponemos el denominador :

$x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

② Integrando como suma de fracciones simples :

$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x+\sqrt{3}}+\frac{B}{x-\sqrt{3}}=\frac{A(x-\sqrt{3})+B(x+\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$, igualamos numeradores $1=A(x-\sqrt{3})+B(x+\sqrt{3})$

y dando valores :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \Rightarrow \quad 1=A(\sqrt{3}-\sqrt{3})+B(\sqrt{3}+\sqrt{3}) \Leftrightarrow 1=2\sqrt{3}\,B \Leftrightarrow B=\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ x=-\sqrt{3} \Rightarrow 1=A(-\sqrt{3}-\sqrt{3})+B(-\sqrt{3}+\sqrt{3}) \Leftrightarrow 1=-2\sqrt{3}\,A \Leftrightarrow A=\frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{array}\right\}$$

③ Integración de las fracciones obtenidas :

$$\int \frac{1}{x^2-3}dx=\int \frac{1/2\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}dx+\int \frac{-1/2\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\ln|x-\sqrt{3}|-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}\ln|x+\sqrt{3}|+C=\frac{\sqrt{3}}{6}(\ln|x-\sqrt{3}|-\ln|x+\sqrt{3}|)+C=\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$$

c) $\int \frac{4x+3}{x^2-6x-7}dx$

① Descomponemos el denominador :

$$x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{6-\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6-8}{2}=-1 \\ x=\frac{6+\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6+8}{2}=7 \end{array}\right\}$$

② Integrando como suma de fracciones simples :

$\frac{4x+3}{x^2-6x-7}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-7}=\frac{A(x-7)+B(x+1)}{(x+1)(x-7)}$, igualamos numeradores $4x+3=A(x-7)+B(x+1)$

y dando valores :

$$\left\{\begin{array}{l} x=7 \Rightarrow \quad 4\cdot 7+3=A(7-7)+B(7+1) \Leftrightarrow 31=8B \Leftrightarrow B=\frac{31}{8} \\ x=-1 \Rightarrow 4(-1)+3=A(-1-7)+B(-1+1) \Leftrightarrow -1=-8A \Leftrightarrow A=\frac{-1}{8} \end{array}\right\} \text{luego :}$$

③ Integración de las fracciones obtenidas :

$$\int \frac{4x+3}{x^2 6x-7}dx=\int \frac{-1/8}{x+1}dx+\int \frac{31/8}{x-7}dx=\frac{-1}{8}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{31}{8}\int \frac{dx}{x-7}=\frac{-1}{8}\ln|x+1|+\frac{31}{8}\ln|x-7|+C=$$

$$= \frac{31}{8} \ln|x-7| - \frac{1}{8} \ln|x+1| + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Resolución de ejercicios y problemas

❶ *Dada la función f(x)* = $x^2 + 4x - 1$. *calcula :*

a) *La primitiva cuya gráfica pasa por* A = (1, 1).

b) *La primitiva que se anula para* x = -1.

---oo0oo---

El conjunto de todas las primitivas es su integral definida :

$$F(x) = \int (x^2 + 4x - 1)dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - x + C$$

a) F(1) = 1 pues pasa por el A = (1, 1)

$\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1 + 1 - 2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, y , por tanto, la primitiva es:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - x - \frac{1}{3}$$

b) F(-1) = 0

$$\frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + C = 0 \Rightarrow C = -1 - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - x - \frac{8}{3}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Dada la función f(x)* = lnx, *calcula :*

a) *La primitiva cuya gráfica pasa por* A = (1, 3).

b) *La primitiva que se anula para* x = e.

---oo0oo---

Hallamos, por partes, la integral indefinida:

$$F(x) = \int \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow & v = \int dx = x \end{matrix} \right\} = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

a) Si pasa por el (1, 3) , F(1) = 3 :

$$F(1)=1(\ln 1-1)+C=-1+C=3 \Leftrightarrow C=3+1=4$$

y por tanto **F(x) = x(lnx-1) + 4**

b) F(e) = 0;⇨ e(lne - 1) + C = 0 ⇔0 + C = 0⇔ C = 0, y por tanto :

F(x) = x(lnx - 1)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *La figura muestra la gráfica de la función f. Determina a partir de la figura, la monotonía y los extremos relativos de cualquier primitiva F de f.*

---oo0oo---

Por definición la derivada de cualquier primitiva es la función original es decir F'(x) = f(x), luego es como si se nos proporcionase la gráfica de la derivada de una función, en donde el signo nos informa de la monotonía y los cambios de signo de los extremos relativos, construimos la tabla de intervalos, signos de la derivada y características de la función :

x	**(- ∞, -3)**	**-3**	**(-3 , -1)**	**-1**	**(-1 , 0)**	**0**	**(0 , 2)**	**2**	**(2 , ∞)**
F'(x)=f(x)	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
F(x)	↗	∩	↘	∪	↗	∩	↘	∪	↗

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Calcula las integrales :*

a) $\int e^{3x}\operatorname{sen}x\,dx$, es una integral "cíclica" en la que hay que utilizar un procedimiento especial, después de utilizar dos veces el método " por partes" :

$$\int e^{3x}\operatorname{sen}x\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=e^{3x}\Rightarrow & du=3e^{3x}dx \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx & \Rightarrow v=\int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x \end{array}\right\}=-e^{3x}\cos x-\int -\cos x\cdot 3e^{3x}dx$$

$$=-e^{3x}\cos x+3\int \cos x\cdot e^{3x}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=e^{3x}\Rightarrow & du=3e^{3x}dx \\ dv=\cos x\,dx & \Rightarrow v=\int \cos x\,dx=\operatorname{sen}x \end{array}\right\}=$$

$$=-e^{3x}\cos x+3\left(e^{3x}\operatorname{sen}x-\int \operatorname{sen}x\cdot 3e^{3x}dx\right)=-e^{3x}\cos x+3e^{3x}\operatorname{sen}x-9\int \operatorname{sen}x\cdot e^{3x}dx$$

y pasando esta última integral al primer miembro :

$$\int \operatorname{sen}x\cdot e^{3x}dx+9\int \operatorname{sen}x\cdot e^{3x}dx=10\int \operatorname{sen}x\cdot e^{3x}dx=e^{3x}(3\operatorname{sen}x-\cos x),\text{ despejando:}$$

$$\int \operatorname{sen}x \cdot e^{3x}dx = e^{3x}(3\operatorname{sen}x - \cos x)/10 + C$$

b) $\int \cos x e^{x}dx$, otro caso de integral cíclica:

$$\int \cos x e^{x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos x \Rightarrow & du = -\operatorname{sen}xdx \\ dv = e^{x}dx \Rightarrow & v = \int e^{x}dx = e^{x} \end{array} \right\} = e^{x}\cos x - \int e^{x}(-\operatorname{sen}x)dx =$$

$$= e^{x}\cos x + \int e^{x}\operatorname{sen}xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}x \Rightarrow & du = \cos xdx \\ dv = e^{x}dx \Rightarrow & v = \int e^{x}dx = e^{x} \end{array} \right\} =$$

$= e^{x}\cos x + e^{x}\operatorname{sen}x - \int e^{x}\cos xdx$, y pasando esta ultima integral al primer miembro:

$$\int \cos x e^{x}dx + \int e^{x}\cos xdx = 2\int e^{x}\cos xdx = e^{x}(\operatorname{sen}x + \cos x), \text{luego}:$$

$$\int e^{x}\cos xdx = \tfrac{e^{x}}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x) + C$$

c) $\int -2e^{x}\cos xdx$

Esta integral es igual a la anterior multiplicada por -2 :

$$\int -2e^{x}\cos xdx = -2\int e^{x}\cos xdx = -2 \cdot \tfrac{e^{x}}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x) = -e^{x}(\operatorname{sen}x + \cos x) + C$$

d) $\int \cos(\ln x)dx$, otra integral del tipo "cíclico"

$$\int \cos(\ln x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \tfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow & v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\cos(\ln x) - \int x(-\operatorname{sen}(\ln x)\tfrac{dx}{x} =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(\ln x) & \Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \tfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow & v = \int dx = x \end{array} \right\} =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int x\cos x(\ln x)\tfrac{dx}{x} = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos x(\ln x)dx$$

y, pasando esta última integral al primaer miembro :

$$\int \cos x(\ln x)dx + \int \cos x(\ln x)dx = 2\int \cos x(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x), \text{luego}:$$

$$\int \cos x(\ln x)dx = \tfrac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Calcula las integrales:*

a) $\int \frac{5x-8}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{8dx}{\sqrt{x}} = 5\int x^{\frac{1}{2}}dx - 8\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} - 8\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C =$

$$=\frac{10}{3}x\sqrt{x}-16\sqrt{x}+C$$

b) $\int \frac{4x}{\sqrt{2x+7}}dx=\left\{\begin{array}{l} t=2x+7\Rightarrow x=\frac{t-7}{2} \\ dt=2dx\Rightarrow dx=dt/2 \end{array}\right\}=\int \frac{4\frac{t-7}{2}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\int \frac{t-7}{\sqrt{t}}dt=\int \frac{t}{\sqrt{t}}dt-$

$$-\int \frac{7}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt-7\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}-7\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}-14\sqrt{t}=\frac{2}{3}\sqrt{(2x+7)^3}-14\sqrt{2x+7}+C$$

c) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x-1}}dx=\left\{\begin{array}{c} t=x-1\Rightarrow x=t+1 \\ dx=dt \end{array}\right\}=\int \frac{3(t+1)+2}{\sqrt{t}}dt=\int \frac{3t+5}{\sqrt{t}}dt=\int \frac{3t}{\sqrt{t}}dt+\int \frac{5}{\sqrt{t}}dt=$

$$=3\int t^{\frac{1}{2}}dt+5\int t^{-\frac{1}{2}}dt=3\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}+5\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}=2\sqrt{t^3}+10\sqrt{t}=2\sqrt{(x-1)^3}+10\sqrt{x-1}+C$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *El coste marginal de fabricar la unidad x + 1 de un determinado producto viene dado por la función :*

$$CMg(x+1)=6-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

a) *Sabiendo que el coste de funcionamiento asciende a 84 000 €, halla la función que expresa el coste total de fabricación de x unidades de dicho producto.*

b) *Calcula cuánto cuesta fabricar 400 unidades de dicho producto.*

---oo0oo---

Como hemos visto en el tema anterior, usando el concepto de diferencial de una función, se cumple que CMg(x+1) ≈ C'(x), luego la función de costes C(x) es una primitiva de CMg(x+1) :

$$C(x)=\int CMg(x+1)dx=\int\left(6-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=6\int dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=6x-2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}=6x-4\sqrt{x}+C$$

a) Determinamos el valor de la constante teneiendo en cuenta que C(0) = 84 000 euros :

$$6\cdot 0-4\cdot\sqrt{0}+C=84000\Rightarrow C=84000$$

y ala función de costes:

$$C(x)=6x-4\sqrt{x}+84000$$

b) Hemos de hallar C(400)

$$C(400)=6\cdot 400-4\sqrt{400}+84000=2400-80+84000=86320 \text{ euros.}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈