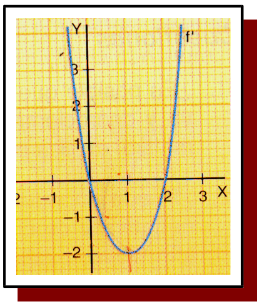
❶❻ *La figura muestra la gráfica de una función polinómica de segundo grado que pasa por el origen y que es la derivada de una función f.*

Resuelve los apartados



a) *Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

b) *Determina los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de f.*

c) *Traza un esbozo de la gráfica de f. Justifícalo.*

---oo0oo---

a) Si elaboramos, fijándonos en la figura, la tabla de intervalos, teniendo en cuenta que cuando f '(x) > 0 es creciente y viceversa :

x	**(- ∞, 0)**	**0**	**(0 , 2)**	**2**	**(2 , ∞)**
f '(x)	> 0	0	<0	0	> 0
f(x)	⇗	∩	⇘	∪	⇗

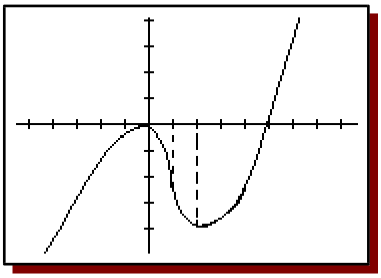
b) En la tabla anterior podemos apreciar que tiene un máximo en x = 0 (pasa de ser creciente - f '(x) > 0 - a la izquierda a decreciente - f' (x) < 0 - a la derecha) y un mínimo en x = 2 (f '(2^-) < 0 y f '(2^+) > 0).

Para hallar los puntos de inflexión confeccionamos la tabla de variación de la derivada segunda fijándonos en el crecimiento u decrecimiento de la derivada primera, es decir en el intervalo (- ∞, 1) la derivada primera es decreciente luego su derivada f ''(x) < 0 y en el intervalo (1 ,∞) la derivada primera es creciente luego su derivada f ''(x) > 0 :

x	**(- ∞, 1)**	**1**	**(1 , ∞)**
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I.	cx

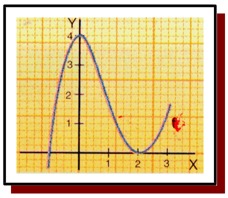
Como en x = 1 pasa de ser cc. a cx. ese es el punto de inflexión.

c) Con la información obtenida en los apartados anteriores podemos dibujar de forma aproximada la gráfica de f(x) :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❼ *Determina los coeficientes a, b, c, y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra la figura.*



---oo0oo---

Al ser una función polinómica de tercer grado tendrá la forma :

f(x) = **a**x^3 + **b**x^2 +**c**x + **d**

en donde tenemos cuatro incógnitas, luego son necesarias cuatro ecuaciones linealmente independientes. Veamos lo que deducimos de la observación de la figura :

❍ Punto de corte con el eje horizontal en (-1, 0):

f(-1) = 0 ⇔ $a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0$⇔ **-a + b - c + d = 0 (1)**

❍ Punto de corte con el eje horizontal en (2, 0), luego f(2) = 0 :

$a(2)^3 + b(2)^2 + c\cdot 2 + d = 0$⇔ **8a + 4b +2 c + d = 0 (2)**

❍ Máximo relativo en x = 0 , luego f ‘(0) = 0, como f ‘(x) = $3ax^2 + 2bx + c$:

$3a(0)^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$ ⇔ **c = 0** (**3**)

❍ Mínimo relativo en x = 2 , luego f ‘(2) = 0

$3a(2)^2 + 2b\cdot 2 + c = 0$ ⇔ **12a+4b+ c = 0** (**4**).

❍ Punto de corte con el eje vertical en (0, 4),luego f(0) = 4

$a(0)^3 + b(0)^2 + c\cdot 0 + d = 4$ ⇔ **d = 4** (**5**)

Con cuatro de las ecuaciones anteriores formamos un sistema (que no sea homogéneo), que resuelto nos proporcionará las cuatro incógnitas buscadas :

$$\left\{\begin{array}{ll} -a+b-c+d & =0 \\ d & =4 \\ c & =0 \\ 12a+4b+c & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -a+b & =-4 \\ 12a+4b & =0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2+12F_1 \end{array} \left.\begin{array}{ll} -a+b & =-4 \\ 16b & =-48 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a=b+4=1 \\ b=\frac{-48}{16}=-3 \end{array}$$

Hemos obtenido a = 1, b = -2 , c = 0 y d = 4, luego la función es :

f(x) = x^3 - $2x^2$ + 4.

❶❽ *Halla las funciones polinómicas* **a** x^3 + **b**x^2 + **c**x+ **d** *cuya derivada segunda sea x - 1. ¿Cuál o cuales de ellas tienen un mínimo relativo en el punto* **(4, -1/3).**

---oo0oo---

Sea f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, la función buscada, ya que su derivada segunda es de grado uno:

f '(x) = $3ax^2 + 2bx + c$; f ''(x) = 6ax + 2b = x - 1 , luego:

6a = 1⇔ **a = 1/6** y 2b = -1⇔ **b = -1/2**

La función es , pues :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$$

Si ha de tener un mínimo en (4, -1/3), se ha de cumplir que f '(4) = 0 y f(4) = -1/3 :

$$\left.\begin{cases} f(4) & = -\frac{1}{3} \\ f'(4) & = 0 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} \frac{1}{6}4^3 - \frac{1}{2}4^2 + 4c + d & = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}4^2 - 4 + c & = 0 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} 4c + d & = -3 \\ c & = -4 \end{cases}\right\} \to d = -3 - 4c = 13$$

La función es :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❾ *Una agencia inmobiliaria tiene alquilados 200 apartamentos en una ciudad a 160 euros al mes cada uno. Por cada 5 euros de aumento en el alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro apartamento más económico. ¿Cuál es el alquiler que produce mayor beneficio a la agencia?*

---oo0oo---

Sea:
x = precio de alquiler de cada apartamento.
y = número de apartamentos alquilados.

◈ Función a optimizar:

Beneficio máximo ≡ B(x,y) = x· y **(1).**

◈ Ecuaciones de condición.

p_o = precio mensual inicial de alquiler = 160 €

n_o = número de apartamentos alquilados al precio inicial (p_o) = 200 apartamentos.

Inquilinos perdidos = $\Delta n = n_o - y = 200 - y$.

Aumento de precio = $\Delta p = x - p_o = x - 160$.

La relación entre ambas variaciones se nos dice y es :

$$\frac{\text{Aumento de precio}}{\text{Decremento en lo inquilinos}} = \frac{\Delta p}{\Delta n} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{x-160}{200-y} = 5 \Leftrightarrow x-160 = 5(200-y) \Leftrightarrow x-160 = 1000-5y$$

$$5y = -x+1160 \Leftrightarrow y = -\tfrac{1}{5}x + 232 \quad \textbf{(2)}$$

◈ Optimización

Sustituyendo la ecuación (2) en la función (1) queda la función :

$$B(x) = x(-\tfrac{1}{5}x + 232) = -\tfrac{1}{5}x^2 + 232x$$

que hemos de derivar e igualar a cero:

$$B'(x) = -\tfrac{2}{5}x + 232 \Rightarrow -\tfrac{2}{5}x + 232 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\cdot 232}{2} = 580$$

Para comprobar que es el máximo :

$$B''(x) = -\tfrac{2}{5} \Rightarrow B''(580) = -\tfrac{2}{5} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

◈ Solución

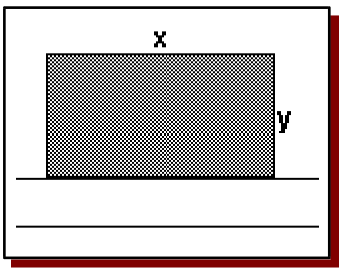
Precio mensual de alquiler óptimo = x = **580 €**
Número de apartamentos alquilados y = (-1/5)·580 + 232= -116 +232 =116

Beneficio B(x,y) = 580·116 = **67 280 €**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷⓿ *Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Halla el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.*

---oo0oo---



Sean x e y los lados del campo rectangular a vallar.

La función a optimizar es el área :

$$a(x,y) = x\cdot y \quad \textbf{(1)}$$

La condición es el dinero máximo que nos podemos gastar :

5x + 0'625 (x +2y) = 1 800 **(2)**

puesto que el lado del camino de longitud x cuesta a 5 €/m y el resto (el otro lado de longitud x y los dos lados de longitud y) a 0'625 €/m.

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1) obtenemos una función de una variable que optimizamos :

$$5x + 0'625x + 1'25y = 1800 \Rightarrow 1'25y = 1800 - 5'625x \Leftrightarrow y = \frac{1800}{1'25} - \frac{5'625}{1'25}x = 1440 - 4'5x$$

a(x) = x·(1440-4'5x) = 1440 x - 4'5 x^2

a'(x) = 1440 - 9x =0 ⇨ x = 1440/9 = **160 m** ⇨ y = 1440 - 4'5·160 = **720 m**

Comprobamos que es el máximo : a''(x) = -9 ⇨ a''(160) = - 9 < 0 ⇨ Máximo

a(x,y) = x·y = 160 m · 720 m = 115 200 m^2.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❶ *Una esmeralda pesa 16 g y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.*

---oo0oo---

Sean x e y los pesos de los trozos en que vamos a dividir la esmeralda.

⌘ Función objetivo : Valor = v(x,y) = k (x^2 + y^2) **(1)**

⌘ Ecuación de condición : x + y = 16 gr **(2)**

⌘ Optimización :

Despejamos y de (2), sustituimos en (1) y optimizamos :

y = 16 -x ➡ v(x) = k (x^2 + $(16-x)^2$)= k (x^2 + 256 -32x + x^2) = k (2x^2 -32x + 256) ➡ v'(x) = k (4x - 32) ➡ v'(x) = 0 ➡ 4x - 32 = 0 ➡ x = 32/4 = 8 gr.

para comprobar que es mínimo v''(x) = 4k y k>0 ➡ v''(8) = 4k > 0 ➡ Mínimo.

Para que el valor sea mínimo hemos de dividirla en dos trozos de 8 gr.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❷ *La evolución del número de socios de un equipo de fútbol fundado en 1945 viene dada por:*

$$\mathbf{S(t)= -0{,}2\ (2\ t^3 - 45\ t^2 - 4200\ t - 60)}$$

donde t se expresa en años. Calcula el número mínimo y el número máximo de socios que ha tenido dicho club hasta el momento presente.

---oo0oo---

Derivada primera:

$S'(t) = -0'2(6t^2 - 90t - 4200)$.

Ceros de la derivada primera:

$$-0'2(6t^2-90t-4200)=0 \Leftrightarrow t^2-15t-700=0 \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{15-\sqrt{225+2800}}{2}=\dfrac{15-55}{2}=-20 \\ t=\dfrac{15+\sqrt{225+2800}}{2}=\dfrac{15+55}{2}=35 \end{cases}$$

Condición suficiente para los extremos:

$S''(t) = -0'2(12t - 90) \Rightarrow S''(-20) = -0'2(12(-20) - 90) = 30 > 0$ Mín

$S''(35) = -0'2(12 \cdot 35 - 90) = -0'2(330) = -66 < 0$ Máximo.

Hay un problema, que el tiempo no puede ser negativo, el tiempo t = 0 sería el año de fundación 1945, hasta el 2000 han transcurrido 55 años.

Como la función es continua, lo será en el intervalo [0, 55] y por tanto tendrá su máximo y su mínimo absoluto en dicho intervalo, veamos los valores de los extremos :

$S(0) = -0'2(2\cdot 0^3 - 45\cdot 0^2 - 4200\cdot 0 - 60) =$ **12 socios**.

$S(55) = -0'2(2\cdot 55^3 - 45\cdot 55^2 - 4200\cdot 55 - 60) = 6887$ socios

Luego el mínimo es el año de fundación que tiene 12 socios fundadores y el máximo en el año 35 (1945+35 = 1980) con:

$S(35) = -0'2(2\cdot 35^3 - 45\cdot 35^2 - 4200\cdot 35 - 60) =$ **23 287 socios**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❸ *La cantidad de madera, en metros cúbicos, que se extrae de un bosque viene dada por:*

$V(t) = e^{0'05t}$ *donde t se expresa en años.*

Cierto año, el precio de la madera es 4 euros/m^3 y, a partir de ese año, la madera se deprecia 0,125 euros/m^3 cada año. Halla qué momento es el más rentable para talar los árboles.

---oo0oo---

p(t) = precio del m^3 de madera = $4 - 0'125(t - t_0)$

El año en que será más rentable será aquel en que los ingresos sean máximos. Los ingresos es el producto de la cantidad vendida por su precio :

$I(t) = V(t) \cdot p(t) = e^{0'05t}(4 - 0'125(t - t_0))$ función en la que se ha de hallar el máximo :

■ Derivada primera :

$$I'(t)= 0'05e^{0'05t}(4 - 0'125(t - t_0)) + e^{0'05t}(-0'125) = e^{0'05t}(-0'00625(t - t_0) + 0'075)$$

■ Ceros de la derivada primera:

$$e^{0'05t}(-0'00625(t - t_0) + 0'075) = 0 \Rightarrow t - t_0 = 0'075/0'00625 = 12.$$

Luego el año más adecuado para talar los árboles es **12 después del que estaban a 4 € /m^3**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❹ *Tras la ingestión de una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en la sangre (en g·l^{-1}) evoluciona según la función:*

$$C(t) = t \cdot e^{1-t}, \text{ en } g \cdot l^{-1}$$

donde t es el tiempo, en horas, transcurrido desde el instante de la ingestión.

Calcula el momento en el que se alcanzará la concentración máxima y cuánto valdrá ésta.

---oo0oo---

Hemos de hallar la primera derivada primera, sus ceros y sustituir estos en la derivada segunda para ver cuál es el máximo :

$C'(t) = e^{1-t} + t(-1)e^{1-t} = e^{1-t}(1 - t)$, que igualamos a cero para hallar sus ceros:

$$e^{1-t}(1-t) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} e^{1-t} = 0 & \Rightarrow 1-t = -\infty \Leftrightarrow t = \infty \\ 1-t = 0 & \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\}$$

para comprobar que t = 1 es máximo podemos usar el criterio de la derivada segunda o el de la derivada primera, viendo si a la izquierda es creciente (C' > 0) y a la derecha decreciente (C' < 0) :

C'(0) = e > 0 , C'(2) = e^{1-2} (1-2) = $-e^{-1}$ < 0, luego efectivamente t = 1 es un máximo.

la concentración máxima será, como hemos demostrado, la alcanzada al cabo de una hora :

C(1) = 1·e^{1-1} = 1· e^0 0 1 g/l

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

❷❺ *El número de unidades de un cierto artículo fabricadas cada mes, x, influye en el precio en euros de cada unidad según la función:*

$$P(x) = 580 - \frac{x^2}{16000}$$

Sabiendo que la fabricación tiene unos gastos fijos de 250000 euros y unos gastos variables de 125 euros por cada unidad producida:

a) *Escribe la fórmula de la función B(x) que expresa el beneficio obtenido por la venta de x unidades (los ingresos obtenidos menos los gastos totales).*

b) *Calcula qué número de unidades hay que fabricar para obtener el máximo beneficio.*

c) *¿ Cuál es entonces el precio de cada unidad?*

---oo0oo---

a) x = unidades vendidas.

Ingresos = I(x) = unidades vendidas· precio de venta = x · (580-x^2/16000).

Gastos = G(x) = 250 000 + 125x .

Beneficios = Ingresos - Gastos = I(x) - G(x) = B(x)

$$B(x) = I(x) - G(x) = x(580 - \frac{x^2}{16000}) - (250000 + 125x) = -\frac{x^3}{16000} + 455x - 250000$$

b)

▣ Derivada primera :

$$B'(x) = -\frac{3x^2}{16000} + 455$$

▣ Ceros de la derivada primera, B'(x) = 0 :

$$-\frac{3x^2}{16000} + 455 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{16000} = 455 \Leftrightarrow x^2 = \frac{455 \cdot 16000}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{455 \cdot 16000}{3}} = \pm 1557'776$$

Como el número de unidades vendidas no puede ser negativo el máximo será la solución positiva x = 1 557'776, de todas formas lo comprobamos:

Criterio de la derivada segunda:

$$B''(x) = -\frac{6x}{16000} \Rightarrow B''(1557'776) = -\frac{6 \cdot 1557'776}{16000} \simeq -0'58 < 0 \text{ luego máximo}$$

Tenemos otro problema y es que el número de unidades ha de ser un entero (positivo), cuál tomamos x = 1 557 o x = 1 558, nos lo dice el beneficio máximo :

$$B(1557) = -\frac{1557^3}{16000} + 455 \cdot 1557 - 250000 = 222525'269$$

$$B(1558) = -\frac{1558^3}{16000} + 455 \cdot 1558 - 250000 = 222525'4305$$

Por poca diferencia, **el beneficio máximo se alcanza con x = 1 558 unidades producidas.**

c)

$$P(1558) = 580 - \frac{1558^2}{16000} \simeq 428'3 \text{ euros.}$$

❷❻ *El consumo de gasolina de un automóvil en l/km depende de la velocidad que desarrolla, en km·h^{-1} , según la función:*

$$C(v) = \frac{3e^{0'011v}}{v}$$

a) *Calcula la velocidad más económica.*

b) *¿ Cuánto consume el coche cada 100 kilómetros si circula a la velocidad más económica ?*

---oo0oo---

a) La velocidad pedida es aquella a la cual el consumo sea mínimo.

❍ Derivada primera :

$$C'(v) = \frac{3 \cdot 0'011 \cdot e^{0'011v} . v - 3e^{0'011v}}{v^2} = \frac{3e^{0'011v}(0'011v - 1)}{v^2}$$

❍ Ceros de la derivada primera, C'(v) =0 :

$$\frac{3e^{0'011v}(0'011v - 1)}{v^2} = 0 \Rightarrow 0'011v - 1 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{0'011} \simeq 90'9090...$$

❍ Criterio de la derivada primera para el mínimo:

$$C'(89) = \frac{3e^{0'011\cdot 89}(0'011\cdot 89-1)}{89^2} = -2'1\cdot 10^{-5} < 0 \Rightarrow \searrow$$

$$C'(91) = \frac{3e^{0'011\cdot 91}(0'011\cdot 91-1)}{91^2} = 9'8\cdot 10^{-7} > 0 \Rightarrow \nearrow$$

Como pasa de ser decreciente a la izquierda de x = 90'90 a ser creciente a la derecha, en x = 90'90 tiene un mínimo.

La velocidad más económica es v = 90'9 km /h.

b)

Consumo a los 100 km = consumo / km · 100 km = C (90'9)·100=

$$= \frac{3e^{0'011\cdot 90'9}}{90'9^2}\cdot 100 \simeq 8'97\frac{l}{100km}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❼ *El precio en euros de un artículo que estuvo diez años en el mercado evolucionó según la función:*

$$P(t) = \begin{cases} 7+t^2 & 0\le t<2 \\ t+9 & 2\le t\le 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo expresado en años. Halla cuál ha sido su precio mínimo y su precio máximo.

---oo0oo---

❍ **Derivada primera** :

$$P'(t) = \begin{cases} 2t & 0\le t<2 \\ 1 & 2<t\le 10 \end{cases}$$

❍ **Ceros de la derivada primera:**

En el primer intervalo 2t = 0 ⇔ t = 0

❍ **Criterio de la derivada segunda :**

$$P''(t) = \begin{cases} 2 & 0\le t<2 \\ 0 & 2<t\le 10 \end{cases} \; ; \text{ luego } P''(0) = 2 > 0 \Rightarrow t = 0 \text{ es un mínimo}$$

❍ **Calculo del máximo :**

Como la función es continua, según el teorema de Weierstrass, la función alcanzará su máximo y mínimo absolutos en las fronteras de los intervalos :

P(0) = 7 , P(2) = 2 + 9 = 11 y P(10) = 10 + 9 = 19, luego :

El mínimo es (0,7) como ya habíamos deducido y el máximo (10, 19).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❸ *Demuestra que la ecuación* $\mathbf{x^3 - 36\,x + 10 = 0}$ *no puede tener dos raíces reales en el intervalo* **(-1, 2).** *¿ Tiene alguna raíz en este intervalo ?*

---oo0oo---

Sea $f(x) = x^3 - 36x + 10$ una función cuyas raíces son las mismas que las soluciones de la ecuación propuesta.

① Primero comprobaremos si tiene alguna raíz real en el intervalo (-1, 2) mediante el teorema de Bolzano. Comprobemos si cumple las hipótesis del teorema :

- La función, al ser polinómica, es continua en ℝ y por tanto en el intervalo [-1, 2].

- La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo :

$$f(-1) = (-1)^3 - 36\,(-1) + 10 = -1 + 36 + 10 = 45 > 0,$$

$$f(2) = 2^3 - 36 \cdot 2 + 10 = 8 - 72 + 10 = -54 < 0$$

Por tanto, se cumple la tesis del teorema :

$$\exists c \in (-1, 2) \mid f(c) = 0$$

② Demostremos que esa solución ha de ser única, lo que haremos mediante el teorema de Rolle y por reducción al absurdo :

- Supongamos que existe otra raíz d > c y comprobemos que se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle :

  - f es continua en [c, d] pues es polinómica.
  - f es derivable en (c, d) pues polinómica.
  - f (c) = f(d) según hemos supuesto.

Se cumplirá la tesis del teorema de Rolle :

$$\exists\, e \in (c, d) \subset (-1, 2) \mid f'(e) = 0$$

Encontremos ese valor e : f ’ (x) = 3x^2 - 36, como f ‘(x) = 0 :

$$3x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{3} = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \simeq \pm 3'46...$$

pero, en contra de los supuesto, ninguna de las dos soluciones obtenidas pertenecen al intervalo (-1, 2), luego hemos llegado a una contradicción que nos demuestra que las soluciones no pueden ser dos y por tanto **ha de ser única**.