f) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}$

① **Dominio**

Al ser una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0,2\}$.

② **Simetría**

$f(-x)=\frac{(-x-1)^3}{x^2+2x}\neq \pm f(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u **OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Luego el punto de corte es : (1, 0) .

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u **OY*** (x = 0).

f(0) no pertenece al dominio, luego no tiene.

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

● Verticales.

x = 0 y x = 2 que anulan el denominador, pues :

$$\lim_{x\to 0^{\mp}}\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}=\frac{-1}{0}=\mp\infty \text{ y } \lim_{x\to 2^{\mp}}\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}=\frac{1}{0}=\mp\infty$$

● Horizontales.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}=\pm\infty \text{ No tiene.}$$

● Oblicuas.

- y = mx + n, hallando m y n por sus fórmulas.

- Realizamos la división y tomamos el cociente :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -3x^2 & +3x & -1 & x^2-2x \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x-1 \\ \cline{1-3} & -x^2 & +3x & & \\ & x^2 & -2x & & \\ \cline{2-4} & & x & -1 & \end{array}$$

y = x - 1

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2(x^2-2x)-(x-1)^3(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{(x-1)^2[3x^2-6x-2x^2+2x+2x-2]}{(x^2-2x)^2}=\frac{(x^2-2x+1)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x)^2}=$$

$$=\frac{x^4-4x^3+3x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}\Rightarrow\frac{x^4-4x^3+3x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}=0\Leftrightarrow x^4-4x^3+3x^2+2x-2=0$$

Que resolvemos por Ruffini entre los Div(2)={ ±1,± 2 }

	1	-4	3	2	-2
1		1	-3	0	2
	1	-3	0	2	0
1		1	-2	-2	
	1	-2	-2	0	

hasta bajar a una de segunda grado que resolvemos por la fórmula :

$$x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2-\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}\simeq-0'73 \\ x=\frac{2+\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}\simeq2'73 \end{array}\right\}$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

Las discontinuidades x = 0, x = 2 y los ceros de la derivada primera x= -0’73, x = 1 y x = 2’73 dividen el dominio en seis intervalos en los que la función derivada tiene signo constante.

Para estudiar el signo de la derivada primera, como el denominador está al cuadrado (siempre positivo) estudiamos el signo del numerador :

- $(-1)^4 - 4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) - 2 = 1 + 4 + 3 - 2 - 2 = 4$ ⇨ f’(-1) > 0.
- $(-1/2)^4 - 4(-1/2)^3 + 3(-1/2)^2 + 2(-1/2) - 2 = 1/16 + 1/2 + 3/4 - 1 - 2 = -27/16$ ⇨ f’(-1/2) < 0

- $(1/2)^4 - 4(1/2)^3 + 3(1/2)^2 + 2(1/2) - 2 = 1/16 - 1/2 + 3/4 + 1 - 2 = -11/16 \Rightarrow f'(1/2) < 0$
- $(3/2)^4 - 4(3/2)^3 + 3(3/2)^2 + 2(3/2) - 2 = 81/16 - 27/2 + 27/4 + 3 - 2 = -11/16 \Rightarrow f'(3/2) < 0$
- $(5/2)^4 - 4(5/2)^3 + 3(5/2)^2 + 2(5/2) - 2 = 625/16 - 125/2 + 75/4 + 5 - 2 = -27/16 \Rightarrow f'(5/2) < 0$
- $(3)^4 - 4(3)^3 + 3(3)^2 + 2(3) - 2 = 81 - 108 + 27 + 6 - 2 = 4 \Rightarrow f'(4) > 0$

x	(- ∞, -0'73)	- 0'73	(- 0'73, 0)	0	(0 , 1)	1	(1 , 2)	2	(2 , 2'73)	2'73	(2'73, ∞)
f '(x)	> 0	0	<0	∄	<0	0	<0	∄	<0	0	> 0
f(x)	⇗	∩	⇘	A.V.	⇘		⇘	A.V	⇘	∪	⇗

⑦ Curvatura y puntos de inflexión.

✪ Discontinuidades.

Las ya calculadas x = 0 y x = 2 , que anulan el denominador.

✪ Ceros de la derivada segunda.

$$f''(x) = \frac{(4x^3-12x^2+6x+2)(x^2-2x)^2-(x^4-4x^3+3x^2+2x-2)2(x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-2x)[(4x^3-12x^2+6x+2)(x^2-2x)-(x^4-4x^3+3x^2+2x-2)(4x-4)]}{(x^2-2x)^4} =$$

$$= \frac{4x^5-8x^4-12x^4+24x^3+6x^3-12x^2+2x^2-4x-4x^5+4x^4+16x^4-16x^3-12x^3+12x^2-8x^2+8x+8x-8}{(x^2-2x)^3} =$$

$$= \frac{2x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-2x)^3} \Rightarrow \frac{2x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-2x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2(x^3-3x^2+6x-4) = 0$$

Ecuación que resolvemos descomponiendo mediante Ruffini entre los Div(4) = { ±1, ± 2 , ± 4 }

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 6 & -4 \\ 1 & & 1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Como la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 4 = 0$ No tiene soluciones reales, el único cero de la derivada segunda es x = 1 .

✪ Intervalos y tabla de curvatura.

Las dos discontinuidades (x = 0 y x = 2) y el cero (x = 1) forman en la recta real cuatro intervalos en los que la derivada tiene signo constante :

$$f''(-1)=\frac{2((-1)^3-3(-1)^2+6(-1)-4)}{((-1)^2-2(-1))^3}=\frac{2(-1-3-6-4)}{3^3}=\frac{-28}{27}<0\Rightarrow cc$$

$$f''(\tfrac{1}{2})=\frac{2\left((\frac{1}{2})^3-3(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})-4\right)}{\left((\frac{1}{2})^2-2(\frac{1}{2})\right)^3}=\frac{2(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+3-4)}{(\frac{-3}{4})^3}=\frac{208}{27}>0\Rightarrow cx$$

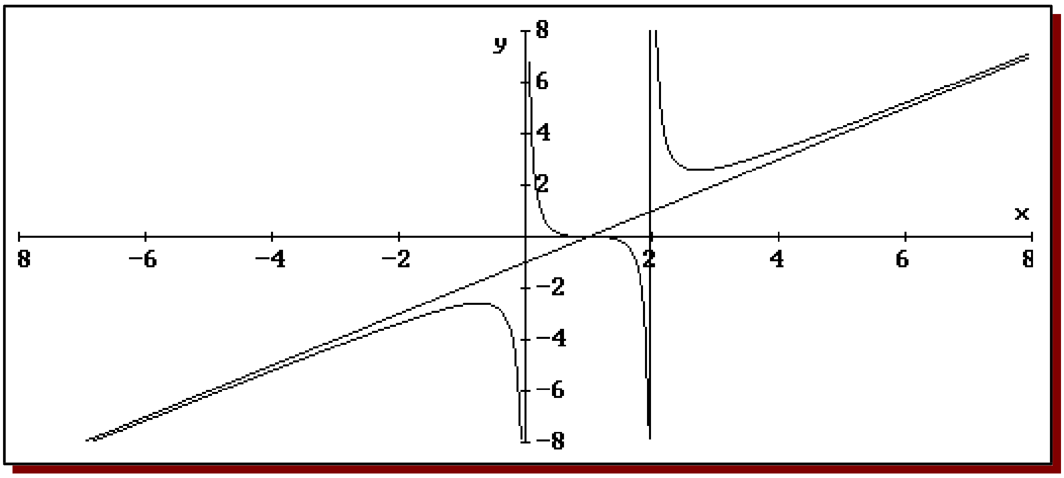
$$f''(\tfrac{3}{2})=\frac{2\left((\frac{3}{2})^3-3(\frac{3}{2})^2+6(\frac{3}{2})-4\right)}{\left((\frac{3}{2})^2-2(\frac{3}{2})\right)^3}=\frac{2(\frac{27}{8}-\frac{27}{4}+9-4)}{(\frac{-3}{4})^3}=-\frac{208}{27}<0\ cc$$

$$f''(3)=\frac{2((3)^3-3(3)^2+6\cdot 3-4)}{(3^2-2\cdot 3)^3}=\frac{2(27-27+18-4)}{3^3}=\frac{28}{27}>0\Rightarrow cx$$

x	(- ∞, 0)	0	(0 , 1)	1	(1, 2)	2	(2 , ∞)
f ''(x)	< 0	∄	> 0	0	< 0	∄	> 0
f(x)	cc	A.V.	cx	P.I. (1, 0)	cc	A.V.	cx

⑧ Dibujo de la curva de la función:

Con la información obtenida en los apartados anteriores ya puede dibujarse la gráfica pedida :



g) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

① Dominio

Al ser un producto de funciones cuyo dominio es ℝ, Dom(f) = ℝ.

② Simetría

$f(-x)=(-x)^2\cdot e^{-x}=x^2\cdot e^{-x}\neq \pm f(x)\Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**
No es periódica.
④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$x^2 \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Luego el punto de corte es : (0, 0) .

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

$f(0)= 0^2 \cdot e^0 = 0$, que nos da , como ya habíamos visto, el (0, 0)

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

● Verticales.

No tiene

● Horizontales.

$$y = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = (-\infty)^2 e^{-\infty} = \infty \cdot 0 \text{ ind.}$$

Resolvemos por la regla de L`Hopital, derivando numerador y denominador hasta quitar la indeterminación:

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$y = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = (\infty)^2 e^{\infty} = \infty \text{ No tiene por la derecha.}$$

● Oblicuas.

Al tener asíntota horizontal por la izquierda , no tiene oblicuas.

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(x^2+2x) \Rightarrow e^x(x^2+2x) = 0 \left\{ \begin{array}{ll} e^x = 0 & \text{No} \\ x^2+2x = 0 & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

- $f'(-3) = e^{-3}((-3)^2 + 2(-3)) = 3e^{-3} > 0$
- $f'(-1) = e^{-1}(1-2) = -e^{-1} < 0$
- $f'(1) = e^{1}(1+2) = 3e < 0$

x	**(- ∞, -2)**	**-2**	**(- 2, 0)**	**0**	**(0 , ∞)**
f '(x)	> 0	0	<0	0	> 0
f(x)	⇗	∩ (**-2, 0'54**)	⇘	∪ (**0 , 0**)	⇗

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

✪ Ceros de la derivada segunda.

$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x+2) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$e^x(x^2+4x+2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x \neq 0 \\ x^2+4x+2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-4-\sqrt{16-8}}{2} = -2-\sqrt{2} \simeq -3'41 \\ x = \frac{-4\sqrt{16-8}}{2} = -2+\sqrt{2} \simeq -0'59 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

✪ Intervalos y tabla de curvatura.

$$f''(-4) = e^{-4}(16-16+2) = 2e^{-4} > 0 \Rightarrow cx$$

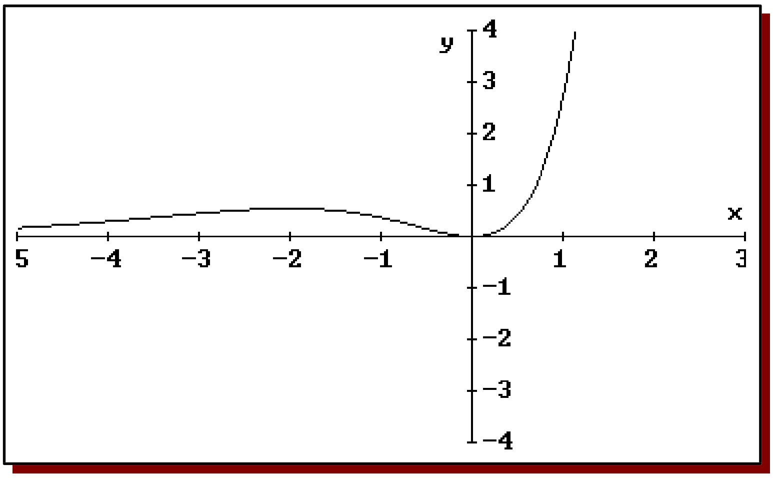
$$f''(-2) = e^{-2}(4-8+2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow cc$$

$$f''(0) = e^{0}(0+0+2) = 2 > 0 \ cx$$

x	**(- ∞, - 3'41)**	**- 3'41**	**(-3'41 , - 0'59)**	**- 0'59**	**(- 0'59 , ∞)**
f ''(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	**cx**	**P.I. (-3'41 , 0'38)**	**cc**	**P.I. (-0'59, 0'19)**	**cx**

⑧ **Dibujo de la curva de la función:**

Con la información obtenida en los apartados anteriores ya puede dibujarse la gráfica pedida :



h) $f(x) = x^2 \ln x$

① **Dominio**

Al ser un producto de funciones: la primera de dominio ℝ, y la segunda de dominio los x > 0 Dom(f) = { x ∈ ℝ | x > 0 }

② **Simetría**

No existe f(-x) al tener dominio x > 0.

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$x^2 \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom(f)} \\ \ln x = 0 \quad \Rightarrow x = 10^0 = 1 \end{array} \right\}$$

Luego el punto de corte es : (1, 0) .

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0) no existe pues el 0 no pertenece a Dom(f).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

● Verticales.

No tiene

● Horizontales.

$y = \lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = \infty$ No tiene por la derecha.

● Oblicuas.

y = mx + n

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} x \ln x = \infty \Rightarrow$ No tiene.

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1); x(\ln x^2 + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \notin \mathrm{Dom}(f) \\ \ln x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

● f '(1/2) = (1/2)(ln(1/2)^2 +1) = -0'19 < 0

● f' (1)= ln1 +1 = 1 > 0

x	(0 , 0'61)	0'61	(0'61 , ∞)
f '(x)	< 0	0	> 0
f(x)	⬂	∪ (0'61, -0'18)	⬀

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

✪ Ceros de la derivada segunda.

$$f''(x) = \ln x^2 + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = \ln x^2 + 3$$

$$\ln x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \ln x^2 = -3 \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0'22$$

✪ Intervalos y tabla de curvatura.

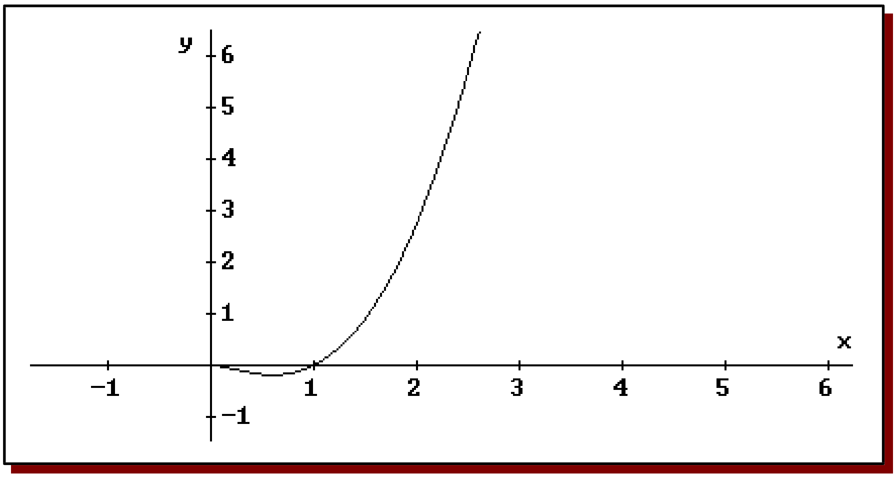
$f''(0'1) = \ln 0'01 + 3 = -1'61 < 0 \Rightarrow$ cc

$f''(1) = \ln 1 + 3 = 0 + 3 = 0 > 0 \Rightarrow$ cx

x	(0 , 0'22)	0'22	(0'22 , ∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I. (0'22, - 0'07)	cx

⑧ **Dibujo de la curva de la función:**

Con la información obtenida en los apartados anteriores ya puede dibujarse la gráfica pedida :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❹ *Representa la gráfica de* **f(x) = (x + 2)² (x - 1)** *y determina los intervalos de monotonía, los extremos relativos y los intervalos de curvatura.*

---oo0oo---

① **Dominio**

Al ser una función polinómica su dominio es ℝ, Dom(f) = ℝ.

② **Simetría**

$f(-x) = (-x+2)^2 \cdot (-x-1) \neq \pm f(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$(x+2)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2=0 \ \Leftrightarrow x=-2 \\ x-1=0 \ \Leftrightarrow x=1 \end{array} \right\}$$

Luego los puntos de corte son : (-2, 0) y (1, 0) .

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0)= 2^2 · (-1) = -4, que nos da el (0, -4)

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

● Verticales.

No tiene pues polinómica

● Horizontales.

No tiene pues al ser:

$$\lim_{x\to\mp\infty}(x+2)^2(x-1)=\mp\infty$$

son ramas infinitas

● Oblicuas.

No tiene oblicuas.

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x)=2(x+2)(x-1)+(x+2)^2=3x(x+2)$$

$$3x(x+2)=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x=0 & \Leftrightarrow x=0 \\ x+2=0 & \Leftrightarrow x=-2 \end{array} \right\}$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

● f '(-3) = -9·(-1)=9 > 0

● f' (-1)= -3·1= - 3< 0

● f' (1) = 3·3 = 9 > 0

x	**(- ∞, -2)**	**-2**	**(- 2, 0)**	**0**	**(0 , ∞)**
f '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	⇗	∩ (**-2, 0**)	⇘	∪ (**0 , -4**)	⇗

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

✪ Ceros de la derivada segunda.

$$f''(x)=3(x+2)+3x=6x+6 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-6}{6}=-1$$

✪ Intervalos y tabla de curvatura.

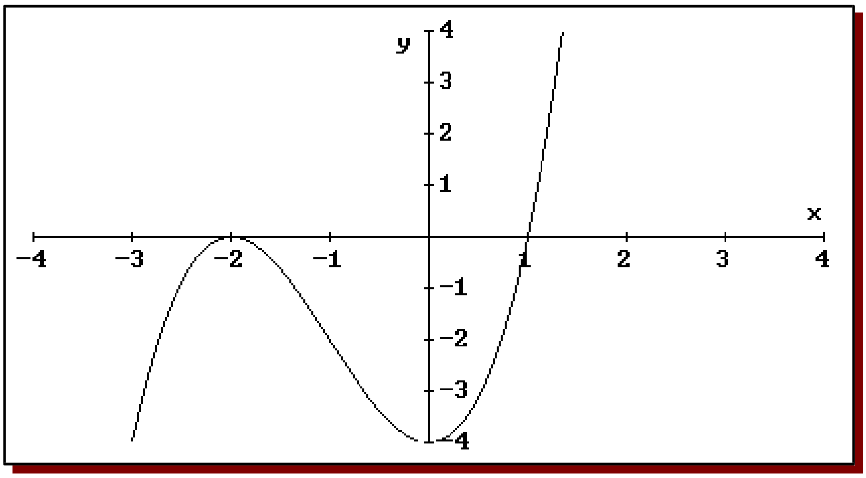
f ''(-2) = 6(-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0

f ''(2) = 6·2 + 6 = 12 + 6 = 18 > 0

x	(- ∞, - 1)	-1	(- 1 , ∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I. (-1 , -2)	cx

⑧ Dibujo de la curva de la función:

Con la información obtenida en los apartados anteriores ya puede dibujarse la gráfica pedida :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❺ *Sea la función f(x) = | x^2 - 4 |. Resuelve los apartados siguientes:*

a) *¿ En qué puntos es derivable y en cuáles no lo es?*

b) *Determina la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.*

c) *Representa su gráfica.*

---oo0oo---

Lo primero es transformar la función en valor absoluto en una función a trozos:

Como x^2 - 4 se anula para x = -2 y x = 2, tendremos tres intervalos :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2< x\leq 2 \\ x^2-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

a) Estudio de la derivabilidad:

❅ En cada intervalo es derivable pues son funciones polinómicas.

❅ En x = -2, hemos de estudiar las derivadas laterales:

$$f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)^2-4-[(-2)^2-4]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-4h+h^2-4-4+4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h-4)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}(h-4)=0-4=-4$$

$$f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(-2+h)^2+4-[-(-2)^2+4]}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-4+4h-h^2+4+4-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(4-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}(4-h)=4-0=4\neq -4=f'(-2^-)\Rightarrow \text{No es derivable en } x=-2$$

❅ En x = 2, hemos de estudiar las derivadas laterales:

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)^2+4-[-(2)^2+4]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-4-4h-h^2+4+4-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(h+4)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-(h+4)=-(0+4)=-4$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-4-[2^2-4]}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4+4h+h^2-4-4+4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(4+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}(4+h)=4+0=4\neq -4=f'(2^-)\Rightarrow \text{No es derivable en } x=2.$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<-2 \\ -2x & \text{si } -2<x<2 \\ 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

b) Extremos :

✷ La derivada primera se anula para x = 0 que pertenece al segundo intervalo y como es f ''(x) = -2, f ''(0) = .2 < 0 será un máximo relativo en x = 0, f(0) = 4 (0, 4).

Pero nos queda estudiar los puntos en los cuales no es derivable :

✷ En x = -2 , se cumple que f (-2) = 0 y como f es siempre de signo positiva (al ser valor absoluto) será un mínimo absoluto (y relativo)

✷ En x = 2 , se cumple que f (2) = 0 y como f es siempre de signo positiva (al ser valor absoluto) será un mínimo absoluto (y relativo).

Resumiendo : **(-2, 0) y (2, 0) son mínimos absolutos y relativos y (0, 4) es un máximo relativo.**

c) Representación :

Como se nos recomienda representamos primero f(x) = x^2 -4y después la parte negativa (la que está por debajo del eje horizontal) que es el intervalo (-2, 2) la trasladamos mediante un giro alrededor de OX a la parte positiva :