ACTIVIDADES

Cuestiones

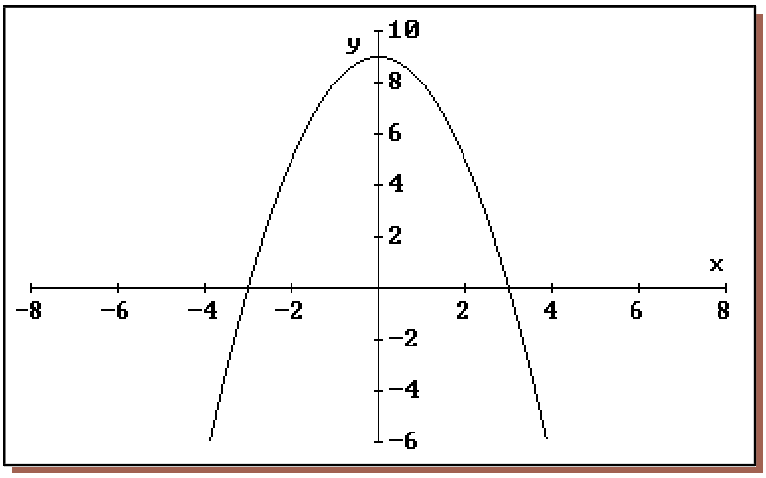
❶ *¿ Es posible que una función sea á la vez positiva y decreciente en un intervalo ? En caso afirmativo, explica por qué y pon un ejemplo gráfico.*

---oo0oo---

Sí pues la monotonía tiene que ver con el signo de la primera derivada y no de la función, positiva significa que toma valores positivos de y (está por encima del eje horizontal) pero puede ser creciente o decreciente.

Ejemplo:

La función $f(x)= -x^2 + 9$ es positiva en el intervalo (-3, 3) y es creciente en (-3, 0) y decreciente en (0, 3) :



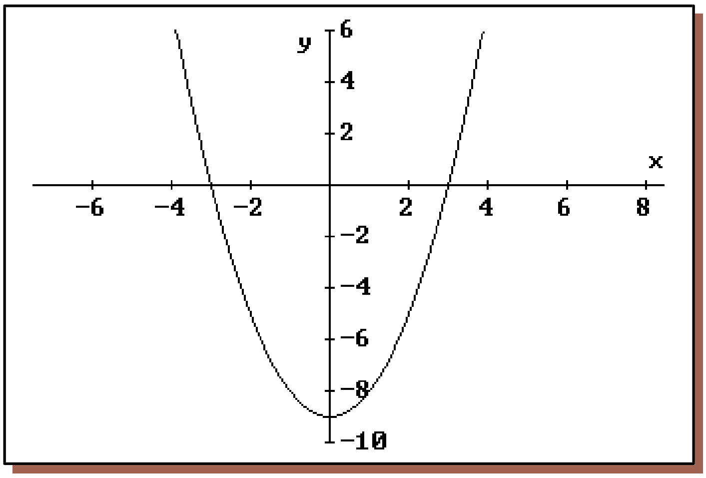
❷ *¿Puede suceder que una función sea a la vez negativa y creciente en un intervalo? En caso afirmativo, explica por qué e ilustra el razonamiento con un ejemplo gráfico.*

---oo0oo---

Sí pues la monotonía tiene que ver con el signo de la primera derivada y no de la función, negativa significa que toma valores negativos de y (está por encima del eje horizontal) en el intervalo, pero puede ser creciente o decreciente.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2 - 9$ es negativa en el intervalo (-3, 3) y es decreciente en (-3, 0) y creciente en (0, 3) :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *¿ Puede ocurrir que una función sea creciente en un intervalo, pero que su derivada sea decreciente en ese intervalo ? En caso afirmativo, explica por qué y pon un ejemplo.*

---oo0oo---

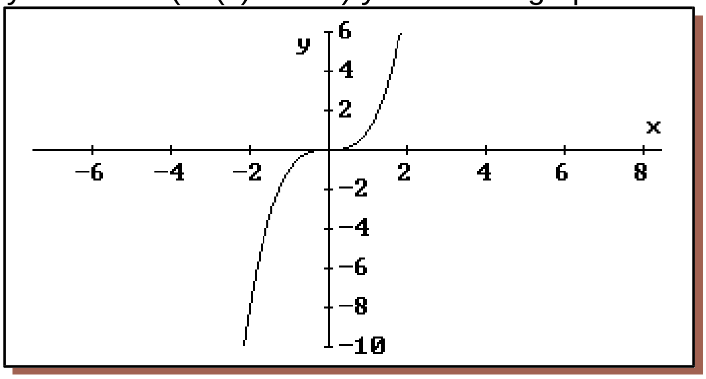
Sí pues la monotonía depende del signo de la derivada primera y la curvatura del de la derivada segunda, en la función de la cuestión ❶ , la función es creciente en el intervalo (- ∞ , 0) y sin embargo la derivada de la derivada primera derivada segunda) es negativa f ''(x) = -2, f' (x) = -2x es decreciente.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ *Sea f una función creciente y derivable en un intervalo. ¿ Es posible que f '(a) = 0 para algún punto x = a perteneciente a dicho intervalo? En caso afirmativo, haz una representación gráfica.*

---oo0oo---

Sí, si en x = a tiene un punto de inflexión. Por ejemplo : $f(x) = x^3$, que es creciente ($-\infty$, ∞) y derivable ($f'(x) = 3x^2$) y sin embargo para x = 0, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Pon un ejemplo de una función continua y derivable en un punto x = a, con derivada nula en dicho punto, es decir, f'(a) = 0, y que, sin embargo, f no tenga ni un máximo ni un mínimo en x = a.*

---oo0oo---

El caso anterior:

Por ejemplo : $f(x) = x^3$, que es continua en $(-\infty, \infty)$ y derivable ($f'(x) = 3x^2$) y sin embargo para x = 0, $f'(0) = 3\cdot 0^2 = 0$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

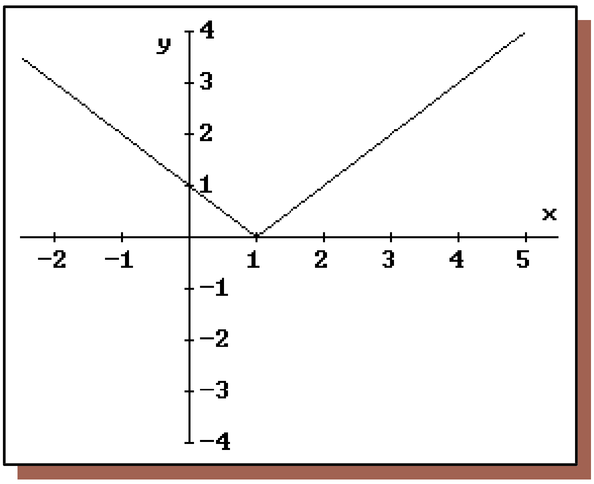
❻ *¿ Es posible que la gráfica de una función continua y no derivable en un punto presente un extremo en ese punto ? En caso afirmativo, pon un ejemplo.*

---oo0oo---

Sí, si tiene un punto anguloso, por ejemplo f(x) = |x -1|, es continua y no derivable en x = 1, pues :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} -x+1 \ \text{ si } x \le 1 \\ \ \ x-1 \ \text{ si } x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x\to 1^-}(-x+1) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \Rightarrow \text{Continua}$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{l} -1 \ \text{ si } x < 1 \\ \ \ 1 \ \text{ si } x > 1 \end{array} \right\}, \text{ no derivable en } x = 1, \text{ tiene un mínimo en } x = 1$$



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Sea f una función con derivada tercera. Razona si las afirmaciones siguientes son ciertas o falsas:*

a) Si f'(a) = 0, x = a es un extremo de f.

b) Si f''(a) = 0, la recta tangente a la gráfica de f en x = a es horizontal.

c) En los intervalos en que f ''' > 0 la función es estrictamente creciente.

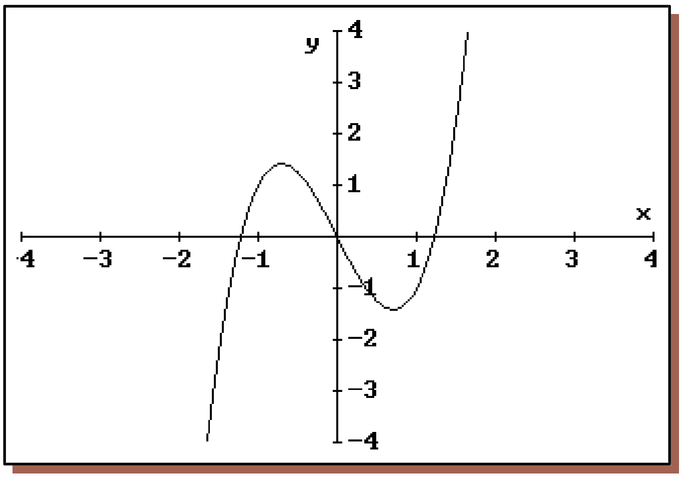
---oo0oo---

a)

Falso pues puede ser un punto de inflexión f ‘(a) = 0 y f ‘‘ (a) = 0. Es válido lo dicho en las dos cuestiones anteriores para $f(x) = x^3$.

b)

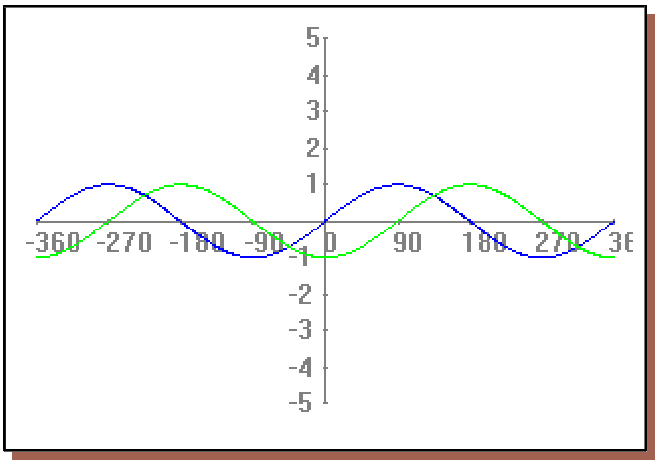
Falso, pues podemos tener un punto de inflexión (f ‘’(a) = 0) de tangente no horizontal (f ‘(a) ≠ 0). Por ejemplo $f(x) = 2x^3 - 3x$ cumple que f ‘’(0) = 12·0 = 0 y sin embargo f ‘(0) = 6·0 - 3 = -3 ≠ 0y por tanto la tangente no es horizontal.



c)

Falso, pues la monotonía viene dada por la derivada primera. Ejemplo:

f(x) = senx ; f ‘(x) = cosx ; f ‘’(x) = - sen x ; f ‘’’(x) = - cosx



En donde puede apreciarse que en el intervalo (90, 180) f(x) = sen x (en color azul) es decreciente y f '''(x)= -cosx (en color verde) es positiva (está por encima del eje horizontal.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ejercicios y problemas

❽ *Di si las siguientes funciones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes en los puntos que se indican:*

Hemos de calcular la derivada primera y estudiar su signo en los puntos dados.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$, en x = 0.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+2)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2+2-2x^2+2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \nearrow \text{en } 0$$

b) f(x) = $x^2 + \cos x$, en x = π y en x = - π

$$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f'(\pi) = 2\cdot\pi - \operatorname{sen}\pi = 2\pi > 0 & \nearrow \text{ en } x = \pi \\ f'(-\pi) = 2\cdot(-\pi) - \operatorname{sen}(-\pi) = -2\pi < 0 & \searrow \text{ en } x = -\pi \end{array} \right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ *Determina los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:*

a) f(x) = $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$

❍ **Discontinuidades**

No tiene por ser polinómica.

❍ **Ceros de la derivada primera:**

f '(x) = $4x^3$ -$12x^2$ + 8x ; f '(x) = 0 ⇨ $4x^3$ -$12x^2$ + 8x = 0 $4x(x^2 - 3x + 2) = 0$, las soluciones son x = 0 , x = 1 y x = 2.

❍ **Intervalos y tabla :**

Para ver el signo en cada intervalo, damos un valor del intervalo:

- f'(-1) = $4\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1)$ = - 4 - 12 - 8 = -24 < 0
- f'(1/2) = $4\cdot(1/2)^3 - 12\cdot(1/2)^2 + 8\cdot(1/2)$ = 1/2 - 3 + 4 = 3/2 > 0
- f'(3/2) = $4\cdot(3/2)^3 - 12\cdot(3/2)^2 + 8\cdot(3/2)$ = 27/2 - 27 +12 = -3/2 < 0

- f'(3) = 4·(3)³ - 12·(3)² + 8·(3) = 108 - 108 +24 = 24 > 0

x	(–∞ , 0)	0	(0, 1)	1	(1, 2)	2	(2 ,∞)
f '(x)	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	↘	∪	↗	∩	↘	∪	↗

b) f(x) = $\frac{4}{x} + \ln x^2$

❍ **Discontinuidades**

La parte racional es discontinua si el denominador es nulo x = 0 y la parte logarítmica al estar la x elevada al cuadrado su dominio es ℝ, luego la única discontinuidad es x = 0.

❍ **Ceros de la derivada primera:**

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{2x}{x^2} = \frac{2x-4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

❍ **Intervalos y tabla :**

Para construir los intervalos de signo constante hemos de tener en cuenta la discontinuidad x = 0 y el cero de la derivada primera x = 2, son (- ∞ , 0) , (0, 2) y (2,∞).

Para ver el signo en cada intervalo, damos un valor del intervalo y estudiamos el signo del numerador (el denominador, al estar al cuadrado, siempre será positivo) :

- f'(-1) = 2·(-1) - 4 = -2 - 4 = - 6 < 0
- f'(1) = 2·1 - 4 = -2 < 0
- f'(3) = 2·3 - 4 = 2 > 0

x	(–∞ , 0)	0	(0, 2)	2	(2 ,∞)
f '(x)	< 0	∄	< 0	0	> 0
f(x)	↘	∄	↘	∪	↗

c) f(x) = $\sqrt{3-x}$

❍ **Discontinuidades**

Es continua en su dominio , pero este es el que hace 3- x ≥ 0 es decir x ≤ 3.

❍ **Ceros de la derivada primera:**

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \neq 0 \Rightarrow$ No tiene ceros.

❍ **Intervalos y monotonía :**

Solo estudiamos el intervalo (-∞, 3) en el cual f'(x) <0 luego decreciente.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ *Determina si las siguientes funciones son cóncavas o convexas en los puntos que se indican:*

a) $f(x) = e^{-3x}$, en x = -2

$f'(x) = -3 \cdot e^{-3x}$; $f''(x) = 9 \cdot e^{-3x} \Rightarrow f''(-2) = 9 \cdot e^{-3\cdot(-2)} = 9 \cdot e^{6} > 0 \Rightarrow$cx.

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, en x = 2

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x+4)(x^2+1)^2-(-x^2+4x+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)[(-2x+4)(x^2+1)-4x(-x^2+4x+1)]}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^3-2x+4x^2+4+4x^3-16x^2-4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-12x^2-6x+4}{(x^2+1)^3}, \text{ luego:}$$

$$f''(2) = \frac{2\cdot 2^3-12\cdot 2^2-6\cdot 2+4}{(2^2+1)^3} = \frac{16-48-12+4}{125} = \frac{-40}{125} < 0 \Rightarrow \text{cc.}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❶ *Halla los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:*

a) *$f(x) = 2x^2 + \ln x$* ***b)*** *$f(x) = (x + 1)^5$*

---oo0oo---

a)

❍ **Dominio y discontinuidades**.

Es una suma de funciones, la primera polinómica, de dominio todo ℝ y continua en su dominio y la segunda logarítmica de dominio los x > 0 y continua en su dominio, luego Dom(f) = { x∈ ℝ | x > 0 }.

❍ **Derivada segunda.**

$f'(x) = 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2+1}{x}$; $f''(x) = \frac{8x\cdot x-4x^2-1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$

❍ **Ceros de la derivada segunda.**

$$\frac{4x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-\frac{1}{2} \notin \text{Dom(f)} \\ x=\frac{1}{2} \in \text{Dom(f)} \end{Bmatrix}$$

❍ **Intervalos y tabla de curvatura.**

Teniendo en cuenta el dominio y los ceros de la derivada segunda los intervalos a considerar son : (0, 1/2) y (1/2, ∞)

$$f''\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{16}}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}}=-12<0$$

$$f''(1)=\frac{4-1}{1}=3>0$$

x	(0, 1/2)	1/2	(1/2 ,∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I.(1/2, -0'19)	cx

b)

❍ **Dominio y discontinuidades**.

Es una función polinómica, de dominio todo ℝ y continua en su dominio.

❍ **Derivada segunda.**

$$f'(x)=5(x+1)^4;\ f''(x)=20\cdot(x+1)^3$$

❍ **Ceros de la derivada segunda.**

$$20(x+1)^3=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

❍ **Intervalos y tabla de curvatura.**

Teniendo en cuenta el dominio y los ceros de la derivada segunda los intervalos a considerar son : (-∞, -1) y (-1, ∞)

$$f''(-2)=20(-2+1)^3=-20<0$$

$$f''(0)=20(0+1)^3=20>0$$

x	(- ∞, -1)	-1	(-1 , ∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I.(-1, 0)	cx

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❷ *A partir de la gráfica de f, determina:*

a) Dominio de f, puntos de corte con los ejes y asíntotas.
b) Intervalos de monotonía y extremos relativos. intervalos de curvatura y puntos de inflexión.

---oo0oo---

a)

➨ **Dominio**.
Dom(f) = ℝ - {-1, 5}

➨ **Puntos de corte con los ejes**.

▶ *Con el eje horizontal*: (-3, 0), (1/2,0), (4, 0) y (6, 0).

▶ *Con el eje vertical*: (0,1).

➨ **Asíntotas.**

▶ *Verticales* : x = -1 y x = 5. los puntos que no pertenecen al dominio.

▶ *Horizontales*: y = 2 por la derecha.

▶ *Oblicuas* : No tiene.

b)

➨ **Monotonía y extremos relativos.**

x	**(- ∞, -1)**	**-1**	**(-1 , 3)**	**3**	**(3, 5)**	**5**	**(-5 , ∞)**
f ‘(x)	> 0	∄	< 0	0	> 0	∄	> 0
f(x)	↗	∄	↘	**Min(3, -2)**	↗	∄	↗

➨ **Curvatura y puntos de inflexión**.

x	**(- ∞, - 3)**	**-3**	**(- 3 ,- 1)**	**-1**	**(-1, 5)**	**5**	**(- 5 , ∞)**
f ‘‘(x)	< 0	0	> 0	∄	> 0	∄	< 0
f(x)	**cc**	P.I.(-3, 0)	**cx**	∄	**cx**	∄	**cc**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❸ *Representa gráficamente las siguientes funciones:*

a) f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

① **Dominio**
Al ser una función polinómica Dom(f) = ℝ.

② **Simetría**

$f(-x) = 2\cdot(-x)^3 + 3(-x)^2 - 12(-x) + 7 = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 7 \neq \pm f(x)$ ⇨ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u **OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación de tercer grado :

$2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$, probando por Ruffini entre Div(7) = { ±1, ±7 }

	2	**3**	**-12**	**7**
1		**2**	**5**	**-7**
	2	**5**	**-7**	**0**
1		**2**	**7**	
	2	**7**	**0**	
-3,5		**-7**		
	2	**0**		

Luego los puntos de corte son : (- 7/2, 0), y (1, 0).

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u **OY*** (x = 0).

f(0) = 7. El punto de corte es (0, 7).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

- Al ser polinómica no tiene verticales no horizontales ni oblicuas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7) = 2\cdot(\mp\infty)^3 = \mp\infty$$

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow 6(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{-1-\sqrt{1+8}}{2} = -2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{2} = 1 \end{Bmatrix}$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

f ‘(-3) = 6($(-3)^2$ +(-3) -2) = 6 (4) = 24 > 0

f ‘(0) = 6(0^2 +0 -2) = 6 (-2) = -12 < 0

f ‘(2) = 6(2^2 +2 -2) = 6 (4) = 24 > 0

x	(- ∞, -2)	-2	(- 2 , 1)	1	(1 , ∞)
f ‘(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	↗	**Máx(-2, 27)**	↘	**Mín(1, 0)**	↗

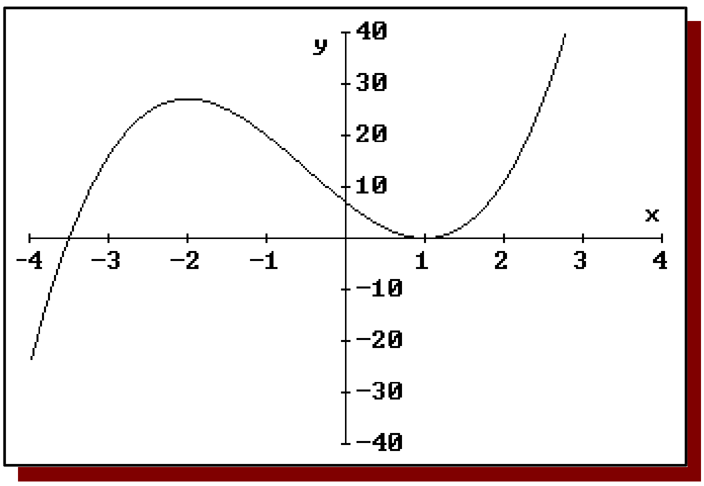
⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

No la estudio pues la información que suministra no es relevante y para no complicar la resolución.

⑧ **Resumen de la información obtenida**:

Los puntos de corte, las ramas infinitas y la tabla anterior nos sirven para trazar la función.

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**



b) f(x) = $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$

① **Dominio**

Al ser una función polinómica Dom(f) = ℝ.

② **Simetría**

f(-x) = $(-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2 - 9 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 \neq \pm f(x)$ ⇨ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación de cuarto grado :

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = 0$, probando por Ruffini entre Div(9) = { ±1, ± 3, ±9 }

	1	**-4**	**4**	**0**	**-9**
-1		**-1**	**5**	**-9**	**9**
	1	**-5**	**9**	**-9**	**0**
3		**3**	**-6**	**9**	
	1	**-2**	**3**	**0**	

y la ecuación de 2º grado $x^2 - 2x + 3 = 0$ no tienen soluciones reales

Luego los puntos de corte son : (- 1, 0), y (3, 0).

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0) = -9. El punto de corte es (0, -9).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

- Al ser polinómica no tiene verticales no horizontales ni oblicuas.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x) = \lim_{x\to \mp\infty} (x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9) = (\mp \infty)^4 = +\infty$$

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

◉ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

f '(-1) = 4 ·$(-1)^3$ - $12(-1)^2$ + 8·(-1) = -4 - 12 -8 = - 24 < 0

f '(1/2) = 4 ·$(1/2)^3$ - $12(1/2)^2$ + 8·(1/2) = ½ -3 + 4 = 3/2 >0.

f '(3/2) =4 ·$(3/2)^3$ - $12(3/2)^2$ + 8·(3/2) = 27/2 - 27 + 12 = -3/2 < 0

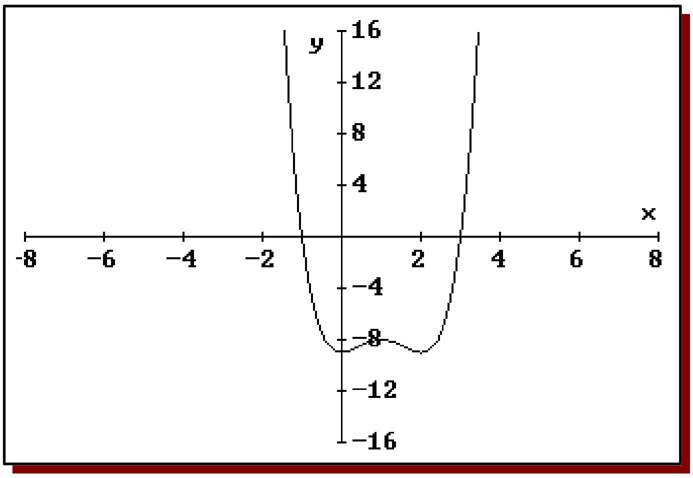
f '(3) = 4 ·3^3 - 12·3^2 + 8·3 = 108 - 108 + 24 = 24 > 0

x	(- ∞, 0)	0	(0 , 1)	1	(1, 2)	2	(2 , ∞)
f '(x)	< 0	0	> 0	0	< 0		> 0
f(x)	↘	Mín(0, - 9)	↗	Máx(1, -8)	↘	Mín(2, -9)	↗

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

No la estudio para no complicar la resolución.

⑧ **Dibujo de la curva de la función:**



c) f(x) = $x^8 - 1$

① **Dominio**

Al ser una función polinómica Dom(f) = ℝ.

② **Simetría**

f(-x) = $(-x)^8$ - 1 = x^8 - 1 = f(x) ⇨ Par, simétrica respecto del eje vertical.

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación degrado ocho :

$$x^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^8 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[8]{1} = \pm 1$$

Luego los puntos de corte son : (- 1, 0) y (1, 0).

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0) = -1. El punto de corte es (0, -1).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

- Al ser polinómica no tiene verticales no horizontales ni oblicuas.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x) = \lim_{x\to \mp\infty} (x^8 - 1) = (\mp\infty)^8 = +\infty$$

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 8x^7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

f ‘(-1) = 8 ·$(-1)^7$ -1 = - 8 - 1 = - 9 < 0

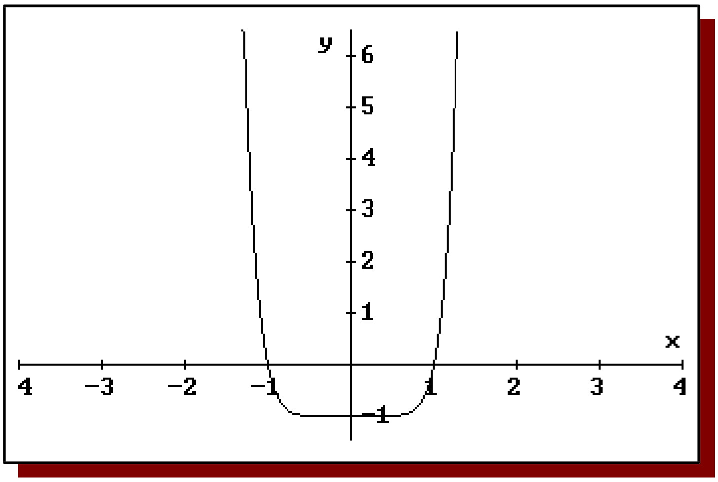
f ‘(1) = 8 ·1^7 -1 = 8 - 1 = 7 > 0

x	**(- ∞, 0)**	**0**	**(0 , ∞)**
f ‘(x)	< 0	0	> 0
f(x)	↘	**Mín(0, - 1)**	↗

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**
No la estudio para no complicar la resolución.
⑧ **Resumen de la información obtenida :**

<table>
<tr><th>x</th><th>- ∞</th><th>(- ∞, -1)</th><th>-1</th><th>(-1 , 0)</th><th>0</th><th>(0, 1)</th><th>1</th><th>(1 , ∞)</th><th>∞</th></tr>
<tr><td>f ‘(x)</td><td></td><td colspan="3">< 0</td><td>0</td><td colspan="3">> 0</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">f(x)</td><td></td><td colspan="3">↘</td><td>Mín y OY</td><td colspan="3">↗</td><td></td></tr>
<tr><td>∞</td><td></td><td>OX (-1, 0)</td><td></td><td>(0, - 1)</td><td></td><td>OX (1, 0)</td><td></td><td>∞</td></tr>
</table>

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**



d) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

① **Dominio**

Al ser una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador x - 2 = 0 ; x = 2 , Dom(f) = ℝ - {2}.

② **Simetría**

$f(-x) = \frac{-x-1}{-x-2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$\frac{x-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Luego el punto de corte es : (1, 0).

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0) = 1/2. El punto de corte es (0, ½).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

● Verticales.

x = 2, que anula el denominador, pues :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}=\infty$$

● Horizontales.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

No tiene oblicuas, pues tiene horizontales.

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x)=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}\neq 0$$ No tiene ceros.

⦿ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

La discontinuidad en x = 2 divide el dominio en dos intervalos en los que la función decrece, pues la derivada primera, al estar el denominador al cuadrado, siempre será negativa.

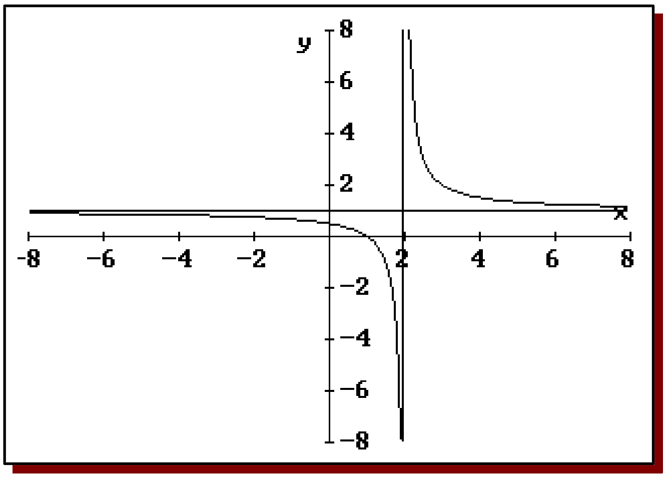
x	**(- ∞, 2)**	**2**	**(2 , ∞)**
f '(x)	< 0	∄	< 0
f(x)	↘	A. V.	↘

Luego no tiene extremos.

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**
No la estudio para no complicar la resolución.
⑧ **Resumen de la información obtenida :**

x	**- ∞**	**(- ∞, 0)**	**0**	**(0 , 1)**	**1**	**(1, 2)**	2	**(2 , ∞)**	∞
f '(x)		< 0						< 0	
f(x)		↘					A. V.	↘	
	1		**OY** (0, 1/2)		O.X.(1,0)		**∞**		**1**

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**



e) $f(x) = \frac{x^2-8x+12}{x-4}$

① **Dominio**

Al ser una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador x - 4 = 0 ⇔ x = 4 ⇨ Dom(f) = ℝ - {4}.

② **Simetría**

$f(-x) = \frac{(-x)^2-8(-x)+12}{-x-4} = \frac{x^2+8x+12}{-x-4} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (f(x) = 0)

Hay que resolver la ecuación :

$$\frac{x^2-8x+12}{x-4} = 0 \Leftrightarrow x^2-8x+12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8-\sqrt{64-48}}{2} = \frac{8-4}{2} = 2 \\ x = \frac{8+\sqrt{64-48}}{2} = \frac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son : (2, 0) y (6, 0).

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

f(0) = 12/ (-4) = -3. El punto de corte es (0, -3).

⑤ Asíntotas y ramas infinitas

- Verticales.

x = 4, que anula el denominador, pues :

$$\lim_{x\to 4^{\mp}} \frac{x^2-8x+12}{x-4} = \frac{-4}{0} = \pm\infty$$

- Horizontales.

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8x+12}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-8\frac{x}{x^2}+\frac{12}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{8}{x}+\frac{12}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}+\frac{12}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{4}{\infty}} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

No tiene.

- Oblicuas.

  - y = mx + n, hallando m y n por sus fórmulas.

  - Realizamos la división y tomamos el cociente :

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -8x & +12 & x-4 \\
\cline{4-4}
x^2 & +4x & & x-4 \\
\hline
 & -4x & +12 & \\
 & 4x & -16 & \\
\cline{2-3}
 & & -4 &
\end{array}$$

y = x - 4

⑥ Monotonía y extremos relativos.

◉ *Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-4)-(x^2-8x+12)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-8x+32-x^2+8x-12}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+20}{(x-4)^2}$$

Que no tiene raíces reales, luego no tiene ceros la primera derivada.

◉ *Intervalos, tabla de monotonía y extremos relativos.*

La discontinuidad en x = 4 divide el dominio en dos intervalos en los que la función crece, pues la derivada primera, al estar el denominador al cuadrado, siempre es positiva.

x	**(- ∞, 4)**	**4**	**(4 , ∞)**
f '(x)	> 0	∄	> 0
f(x)	$\nearrow$	A. V.	$\nearrow$

Luego no tiene extremos.

⑦ Curvatura y puntos de inflexión.

No la estudio para no complicar la resolución.

⑧ Resumen de la información obtenida :

x	- ∞	(- ∞, 0)	0	(0 , 2)	2	(2, 4)	4	(4, 6)	6	(6 , ∞)	∞
f '(x)		> 0					∄	> 0			
f(x)		⇗					A. V.	⇗			
	- ∞		OY (0, -3)		O.X.(2,0)		± ∞		O.X(6,0)		∞

Y la asíntota oblicua y = x - 4

⑨ Dibujo de la curva de la función: