Preparación de la unidad

❶ *Resuelve las siguientes inecuaciones :*

a) $3x + 7 - 5(2x-3) \geq \frac{x-1}{2} - 1$

$6x + 14 - 10(2x-3) \geq x - 1 - 2 \Leftrightarrow 6x + 14 - 20x + 30 \geq x - 3 \Leftrightarrow 6x - 20x - x \geq -3 - 14 - 30$

$-15x \geq -47 \Leftrightarrow 15x \leq 47 \Rightarrow x \leq \frac{47}{15}$ es decir $(-\infty, \frac{47}{15}]$

b) $\frac{2x-3}{8} - \frac{5x-1}{2} < -\frac{3x}{4}$ m.c.m.(2,4,8) = 8

$2x - 3 - 4(5x - 1) < -6x \Leftrightarrow 2x - 3 - 20x + 4 < -6x \Leftrightarrow 2x - 20x + 6x < 3 - 4 \Leftrightarrow -12x < -1 \Leftrightarrow 12x > 1 \Leftrightarrow x > 1/12$ es decir el intervalo $(1/12, +\infty)$

c) $\frac{3(x-1)}{2} - x > \frac{x-3}{2}$

$3(x-1) - 2x > x - 3 \Leftrightarrow 3x - 3 - 2x > x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x - x > 3 - 3 \Leftrightarrow 0 > 0$ lo que no es verdad, luego no tiene solución.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Resuelve las siguientes inecuaciones :*

a) $x^2 + 1 \leq 0$

$x^2 \leq -1$, lo que no se cumple pues $x^2 \geq 0$, positivo o nulo, luego no tiene solución.

b) $(x - 3)^2 \leq 4$

❍ $x^2 - 6x + 9 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0$ y para resolver esta inecuación resolvemos primero la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y $x = 5$, teniendo tres intervalos posibles $(-\infty, 1)$, $[1, 5]$ y $(5, \infty)$, para saber cuáles de los tres son válidos, tal vez la forma más rápida sea dar un valor dentro de los intervalos :

- $x = 0 \in (-\infty, 1) \Rightarrow 0^2 - 6\cdot 0 + 5 = 5 > 0$ no válido
- $x = 2 \in [1, 5] \Rightarrow 2^2 - 6\cdot 2 + 5 = -3 < 0$ válido. Solución : **[1, 5]**

❍ $|x - 3| \leq 2$; $-2 \leq x \leq 2$, es decir $-2 + 3 \leq x \leq 2 + 3$; $1 \leq x \leq 5$, intervalo **[1, 5]**.

c) $2(5 - x^2) > 3x$

$10 - 2x^2 > 3x \Rightarrow -2x^2 - 3x + 10 > 0$, resolviendo la ecuación tenemos tres intervalos :

$(-\infty, \frac{-3-\sqrt{89}}{4})$, $[\frac{-3-\sqrt{89}}{4}, \frac{-3+\sqrt{89}}{4}]$ y $(\frac{-3+\sqrt{89}}{4}, +\infty)$

y es positiva en el segundo pues para x = 0 queda 10 > 0. La solución es, pues :

$$\left[\frac{-3-\sqrt{89}}{4}, \frac{-3+\sqrt{89}}{4}\right]$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ *Halla la derivada de las funciones :*

a) f(x) = 4lnx + x^2 ; $f'(x) = (4\ln x)' + (x^2)' = 4(\ln x)' + 2x = 4 \cdot \frac{1}{x} + 2x = \frac{4}{x} + 2x$

b) g(x) = $\frac{x^2}{x^2-4}$; $g'(x) = \frac{(x^2)'(x^2-4)-x^2(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

c) h(x) = $\sqrt{x^2-9}$; $h'(x) = \frac{(x^2-9)'}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x\sqrt{x^2-9}}{x^2-9}$

d) k(x) = x^2e^x; $k'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(x+2)$

e) m(x) = tgx^2; $m'(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2} = 2x\sec^2 x^2 = 2x(1+tg^2x^2)$

f) i(x) = $\frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $i'(x) = \frac{(\sqrt{x})'\cdot e^x - \sqrt{x}\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x - \sqrt{x}\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{e^x(1-2x)}{2\sqrt{x}}}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-2x)}{2\sqrt{x}\,(e^x)^2} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\,e^x}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

DERIVADA Y MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN.

❶ *Estudia el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos de abscisas indicados*

a) f(x) = $2x^3 - x^2$, en x = 2; f ’(x) = $6x^2 - 2x \Rightarrow f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20 > 0 \Rightarrow \nearrow$

b) f(x) = $\frac{x^2+1}{x-1}$, en x = 5 ; $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$; $f'(5) = \frac{5^2-2\cdot 5-1}{4^2} = \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow \nearrow$

c) f(x) = $\sqrt{2-x^3}$, en x = 1; $f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-3\cdot 1^3}{2\sqrt{2-1^3}} = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \searrow$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ *Estudia los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.*

En el ejercicio anterior ya hemos hallado sus derivadas.

a)

◉ Resolvemos la ecuación f ’(x) = 0

$$6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ 3x - 1 = 0 & \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

◉ Hallamos la derivada segunda de la función: *f ’’* (x) = 12x - 2

◉ Analizamos el signo de la segunda derivada para los valores obtenidos al igualar a cero la derivada primera :

f ''(0) = 12·0 -2 = -2 < 0 ⇒ **f tiene un máximo en (0, f(0))=(0, 0)**

f '' (1/3) = 12·(1/3) - 2 = 4 - 2 = 2 > 0 ⇒ **f tiene un mínimo en (1/3, f(1/3)) = (1/3, -1/27)**

b)

◉ Resolvemos la ecuación f '(x) = 0

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1-\sqrt{2}\simeq -0'41 \\ x=1+\sqrt{2}\simeq 2'41 \end{array} \right\}$$

◉ Estudiamos la monotonía mediante tabla, teniendo en cuenta que al ser f una función racional tiene una discontinuidad en x -1 = 0, es decir x = 1:

x	(- ∞, - 0'41...)	-0'41...	(- 0'4, 2'41)	2'41	(2'41,∞)
f '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	↗	∩	↘	∪	↗

En donde hemos utilizado, para estudiar el signo de cada intervalo :

f '(-1) = (1+2-1)/4=1/2 >0
f ' (0) = -1 < 0
f '(3) = (9 - 6 - 1)/ 4 = ¾ > 0

◉ **Tenemos un máximo en (- 0'41 , f(-0'41)) y un mínimo en (2'41, f(2'41))**

c)

◉ Resolvemos f '(x) = 0

$$\frac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}}=0 \Leftrightarrow 3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

◉ Estudiamos la tabla (que es más corto que hallar la derivada segunda, que además no decide pues saldrá también cero)

x	(∞, 0)	0	(0, $2^{1/3}$)
f '(x)	< 0	0	< 0
f (x)	↘	No	↘

Sólo llegamos hasta $2^{1/3}$ pues al ser irracional su dominio llega hasta ahí.

En donde para estudiar el signo hemos usado :

f '(-1) = -3/2 < 0 y f ' (1) = -3/2 < 0

◉ No tiene máximos ni mínimos relativos.

❸ *Determina los intervalos de monotonía de las siguientes funciones :*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

❍ *Discontinuidades* : No tiene pues es una función polinómica

❍ *Ceros de la primera derivada*:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -1 \\ x = 3 \end{Bmatrix}$$

❍ *Intervalos* : (- ∞, -1) , (-1, 3) y (3, ∞)

❍ *Tabla de monotonía* :

Para comprobar el signo de la derivada en cada intervalo, damos un valor perteneciente a cada intervalo:

$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) - 9 = 12+12-9 = 15 > 0$
$f'(0) = -9 < 0$
$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6\cdot 4 - 9 = 48 - 24 - 9 = 15 > 0$

x	(- ∞, - 1)	-1	(-1, 3)	3	(3, ∞)
f '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	↗	∩	↘	∪	↗

b) $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

❍ *Discontinuidades* : Al ser racional son los valores que anulan el denominador 2x + 1 = 0 ⇔ x = -1/2.

❍ *Ceros de la primera derivada*:

$$f'(x) = \frac{2x+1-2(x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2x+2}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)^2} \neq 0 \text{ no tiene}$$

❍ *Intervalos* : (- ∞, -1/2) y (-1/2,+∞)

❍ *Tabla de monotonía* :

Para comprobar el signo de la derivada en cada intervalo, damos un valor perteneciente a cada intervalo:

$f'(-1) = 3 > 0$
$f'(0) = 3 > 0$

x	(- ∞, - 1/2)	-1/2	(-1/2,∞)
f '(x)	> 0		> 0
f (x)	↗	A. V.	↗

c) f(x) = $\sqrt{x^2-1}$

- *Discontinuidades* : Los puntos que no pertenecen a su dominio que son (-1, 1) que hacen el radicando negativo, solución de inecuación $x^2 - 1 \le 0$
- *Ceros de la primera derivada*:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \mathrm{Dom}(f)$$

- *Intervalos* : (- ∞, -1] y [1, ∞)
- *Tabla de monotonía* :

Para comprobar el signo de la derivada en cada intervalo, damos un valor perteneciente a cada intervalo:

$$f'(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2-1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} < 0$$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$$

x	(- ∞, - 1]	[1,∞)
f '(x)	< 0	> 0
f (x)	↘	↗

d) f(x) = e^{-x^2}

- *Discontinuidades* : Continua en ℝ por ser exponencial.
- *Ceros de la primera derivada*:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- *Intervalos* : (- ∞, 0) y (0, ∞)
- *Tabla de monotonía* :

Para comprobar el signo de la derivada en cada intervalo, damos un valor perteneciente a cada intervalo:

$$f'(-1) = -2 \cdot (-1) \cdot e^{-(-1)^2} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$$

$$f'(1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = -2 \cdot e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$$

x	(- ∞, 0)	0	(0 , ∞)
f '(x)	> 0	0	< 0
f (x)	↗	∩	↘

❹ *Estudia la convexidad o concavidad de las funciones :*

Hay que estudiar el signo de la segunda derivada en esos puntos.

a) $f(x) = x^3 - x^2$, en $x = -3$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f''(-3) = 6\cdot(-3) - 2 = -18 - 2 = -20 < 0 \Rightarrow$ **Cóncava (⌢)**

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, en $x = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f''(0) = 12\cdot0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow$ **Cóncava (⌢)**

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, en $x = 5$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-1)]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(5) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{4^2} > 0 \Rightarrow \text{Cx}$$

d) $f(x)$) $\sqrt{x^2-1}$, en $x = 3$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \text{ , luego :}$$

$$f''(3) = \frac{-1}{(9-1)\sqrt{9-1}} = \frac{-1}{8\sqrt{8}} = \frac{-1}{16\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \text{Cóncava (cc).}$$

e) $f(x) = \sqrt{2-x^3}$, en $x = 1$

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-6x\cdot2\sqrt{2-x^3} - (-3x^2)\cdot\frac{-3x^2}{\sqrt{2-x^3}}}{4(2-x^3)} = \frac{\frac{-12x(2-x^3)-9x^4}{\sqrt{2-x^3}}}{4(2-x^3)} = \frac{3x^4-24x}{4(2-x^3)\sqrt{2-x^3}} \Rightarrow$$

$$f''(1) = \frac{3-24}{4(2-1)\sqrt{2-1}} = \frac{-21}{4} < 0 \Rightarrow \text{Cóncava (cc).}$$

f) $f(x) = \text{tg } x$, en $x = \frac{3\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(x) = -2\cos^{-3}x(-\text{sen}x) = \frac{2\text{sen}x}{\cos^3 x} \Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = -4$$

luego es **Cóncava (cc)**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ *Estudia los puntos de inflexión de las funciones del ejercicio anterior :*

Para el estudio de los puntos de inflexión hay que estudiar si la derivada tercera para los valores que anulan la segunda no son cero:

a) $f(x) = x^3 - x^2$

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

f ‘‘(x) = 0 ; 6x - 2 = 0 ⇨ x = 2/6 = **1/3**

◎ Derivada tercera en los puntos que anulan la segunda derivada :

f ‘’’ (x) = 6 ⇨ f ‘’’(1/3) = 6 > 0 , **hay un punto de inflexión en x = 1/3**.

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

f ‘‘(x) = 0 ; 12x - 6 = 0 ⇨ x = 6/12 = **1/2**

◎ Derivada tercera en los puntos que anulan la segunda derivada :

f ‘’’ (x) = 12 ⇨ f ‘’’(1/2) = 12 > 0 , **hay un punto de inflexión en x = 1/2**.

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0 \Rightarrow$ No existe punto de inflexión

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \neq 0 \Rightarrow$ No tiene punto de inflexión.

e) $f(x) = \sqrt{2 - x^3}$

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^4-24x}{4(2-x^3)\sqrt{2-x^3}} = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(3x^3 - 24) = 0 \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = 2 \end{array} \right\}$$

◎ Derivada tercera en los puntos que anulan la segunda derivada :

$$f'''(x)=\frac{(12x^3-24)\cdot 4\cdot(\sqrt{2-x^3})^3-(3x^4-24x)\cdot 4\cdot 3(2-x^3)\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}}}{16(\sqrt{2-x^3})^6}=\frac{\frac{4(12x^3-24)(2-x^3)+18x^2(2-x^3)(3x^4-24x)}{\sqrt{2-x^3}}}{16(\sqrt{2-x^3})^6}=$$

$$=\frac{2(2-x^3)[2(12x^3-24)+9x^2(3x^4-24x)]}{16\sqrt{(2-x^3)^7}}=\frac{(2-x^3)[2(12x^3-24)+9x^2(3x^4-24x)]}{8(2-x^3)^3\sqrt{2-x^3}}=\frac{24x^3-48+27x^6-216x^3}{8(2-x^3)^2\sqrt{2-x^3}}=$$

$$=\frac{27x^6-192x^3-48}{8(2-x^3)^2\sqrt{2-x^3}}$$

x = 2 no pertenece al dominio de f(x) pues anula el denominador, luego sólo queda ver el signo de :

$f'''(0)=\frac{-48}{8\cdot 4\cdot\sqrt{2}}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}<0$, punto de inflexión en x = 0.

f) f(x) = tgx

◎ Valores que anulan la derivada segunda (ya calculada en el ejercicio anterior) :

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{2\text{senx}}{\cos^3x}=0\Leftrightarrow \text{senx}=0\Leftrightarrow x=180^{o}k \text{ y } k\in Z$$

◎ Derivada tercera en los puntos que anulan la segunda derivada :

$$f'''(x)=\frac{2\cos x\cdot\cos^3x-2\text{senx}\cdot 3\cos^2x\cdot(-\text{senx})}{\cos^6x}=\frac{2\cos^2x[\cos^2x+3\text{sen}^2x]}{\cos^6x}=\frac{2(\cos^2x+3\text{sen}^2x)}{\cos^4x}=$$

$$=\frac{2(\cos^2x+\text{sen}^2x+2\text{sen}^2x)}{\cos^4x}=\frac{2(1+2\text{sen}^2x)}{\cos^4x}=\frac{2+4\text{sen}^2x}{\cos^4x}$$

$f'''(180k)=\frac{2+4\text{sen}^2(180k)}{\cos^4(180k)}=\frac{2+0}{1^4}=2>0$ punto de inflexión en x = 180k = πk

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ *Determina los intervalos de curvatura de las siguientes funciones :*

a) f(x) = x^3-x^2-8x

⌗ Discontinuidades.

Como es una función polinómica, es continua en ℝ .

⌗ Derivada segunda

f '(x) = $3x^2$ - 2x - 8 ; f ''(x) = 6x - 2.

⌗ Ceros de la derivada segunda.

f ''(x) = 0 ⇨ 6x - 2 = 0⇔ x = 1/3

⌖ Tabla en que estudia la curvatura a partir del signo de la derivada segunda :

f ''(0) = 6·0 - 2 = - 2 < 0.

f ''(1) = 6·1 - 2 = 4 > 0 .

x	(- ∞, 1/3)	1/3	(1/3 , ∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f (x)	**cc**	P.I.	**cx**

b) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

⌖ Discontinuidades.

Como es una función polinómica, es continua en ℝ .

⌖ Derivada segunda

$g'(x) = 3x^2 - 3$; $g''(x) = 6x$.

⌖ Ceros de la derivada segunda.

$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

⌖ Tabla en que estudia la curvatura a partir del signo de la derivada segunda :

g''(-1) = 6·(-1) = - 6 < 0.

g''(1) = 6·1 = 6 > 0 .

x	(- ∞, 0)	0	(0 , ∞)
g''(x)	< 0	0	> 0
g(x)	**cc**	P.I.	**cx**

c) $h(x) = \frac{x^2}{1-x}$

⌖ Discontinuidades.

Como es una función racional es discontinua en $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

⌖ Derivada segunda

$$h'(x) = \frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \Rightarrow h''(x) = \frac{(-2x+2)\cdot(1-x)^2-(-x^2+2x)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(1-x)[(-2x+2)(1-x)+2(-x^2+2x)]}{(1-x)^4} = \frac{(-2x+2)(1-x)+2(-x^2+2x)}{(1-x)^3} = \frac{-2x+2+2x^2-2x-2x^2+4x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

⌖ Ceros de la derivada segunda. Intervalos

$h''(x)=0$, pero como la derivada segunda no se anula $(2 \neq 0) \Rightarrow$ No tiene ceros

Los intervalos de signo constante se forman pues con las discontinuidades:

(- ∞, 1) , (1, ∞)

⌖ Tabla en que estudia la curvatura a partir del signo de la derivada segunda :

$h''(0)=\frac{2}{(1-0)^3}=2>0$ y $h''(2)=\frac{2}{(1-2)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0$

x	(- ∞, 1)	1	(1 , ∞)
h‘‘(x)	> 0	∄	< 0
h(x)	**cx**	A. vertical	**cc**

d) i(x) = 2senx

⌖ Discontinuidades.

Como es una función seno es continua en ℝ .

⌖ Derivada segunda

$i'(x)=2\cos x \Rightarrow i''(x)=-2\operatorname{sen} x$

⌖ Ceros de la derivada segunda.Intervalos

$i''(x)=0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow \operatorname{sen}x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ y $k\in Z$

Los intervalos de signo constante son (k π, (k+1) π)

⌖ Tabla en que estudia la curvatura a partir del signo de la derivada segunda :

$i''(-\frac{\pi}{4})=-2\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})=-2\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0$

$i''(\frac{\pi}{4})=-2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0$

$i''(\frac{7\pi}{6})=-2\operatorname{sen}(\frac{7\pi}{6})=-2\cdot\frac{-1}{2}=1>0$

x	...	(-π, 0)	0	(0 ,π)	π	(π, 2 π)	...
i‘‘(x)		> 0	0	< 0	0	> 0	
i(x)		**cx**	P.I.	**cc**	P.I.	**cx**	

e) $j(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} i(x)$

i(x) y j(x) sólo se diferencian en una constante (1/2), todo lo dicho para i(x) es válido para j(x), es decir tienen los mismos intervalos de concavidad y convexidad.

f) $k(x) = xe^x$

⌗ Discontinuidades.

Como es una función exponencial es continua en $\mathbb{R}$.

⌗ Derivada segunda

$k'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x (x+1)$; $k''(x) = e^x (x+1) + e^x = e^x (x+2)$

⌗ Ceros de la derivada segunda.Intervalos

$$k''(x) = 0 \Rightarrow e^x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} e^x = 0 & x = -\infty \\ x+2 = 0 & x = -2 \end{array} \right\}$$

Los intervalos de signo son :

$(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$

⌗ Tabla en que estudia la curvatura a partir del signo de la derivada segunda :

$k''(-3) = e^{-3} (-3 +2) = -e^{-3} = - 1/ e^3 < 0$

$k''(0) = e^0 (0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$

x	(- ∞, -2)	-2	(-2 , ∞)
k''(x)	< 0	0	> 0
k(x)	**cc**	P.I.	**cx**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ *Representa gráficamente las funciones de los apartados a, b y c del ejercicioNº* ❻.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$

① **Dominio**

Dom(f) = $\mathbb{R}$, pues es una función polinómica.

② **Simetría**

f(- x) = $(-x)^3 - (-x)^2 - 8(-x) = -x^3 - x^2 + 8x \neq f(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u **OX*** (f(x) = 0)

$$x^3 - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 8) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ x^2 - x - 8 = 0 & \begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{1+33}}{2} = 3'37 \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{2} = -2'37 \end{array} \end{array} \right\}$$

Luego los puntos de corte son (0, 0), (3'37, 0) y (-2'37, 0)

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u **OY*** (x = 0).

f(0) = 0 , luego es el origen (0,0).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

▣ Al ser una función polinómica no tiene asíntotas verticales, ni horizontales ni oblicuas.

▣ Ramas infinitas :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 - 8x) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 - 8x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿*Discontinuidades:*

Es continua en R, por ser polinómica.

⦿*Ceros de la derivada primera.*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2-\sqrt{4+96}}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \\ x = \frac{2+\sqrt{4+96}}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{array} \right\}$$

⦿ *Intervalos y tabla :*

x	(- ∞, -4/3)	-4/3	(-4/3, 2)	2	(2 , ∞)
f '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	⬀	∩	⬂	∪	⬀

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

◎Ceros de la derivada segunda

f '' (x) = 6x - 2 ⇨ 6x - 2 = 0⇔ x = 2/6 = 1/3

◎Intervalos y tabla

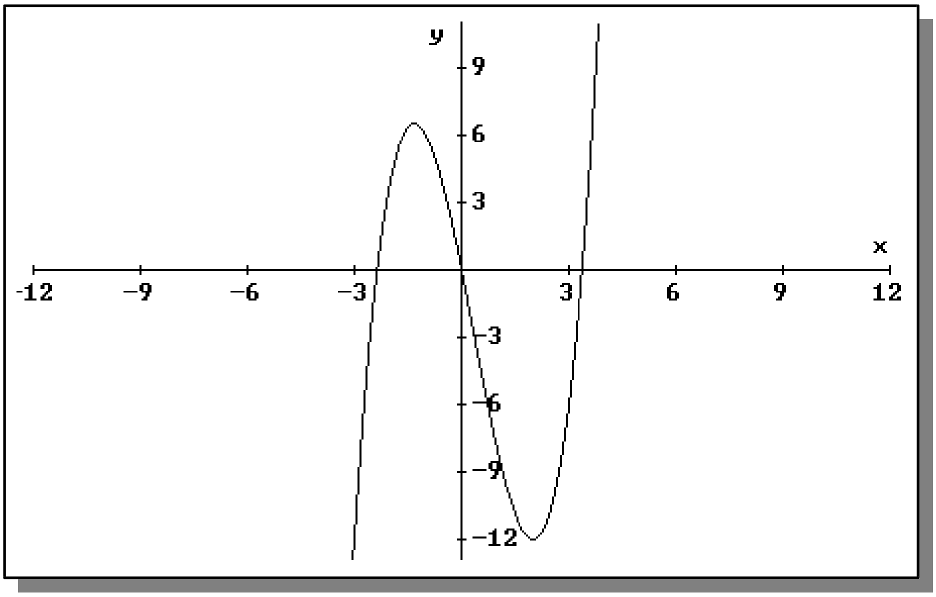
x	(- ∞, 1/3)	1/3	(1/3 , ∞)
f ''(x)	< 0	0	> 0
f(x)	cc	P.I.	cx

⑧ **Resumen de la información obtenida**:

x	-∞	(- ∞, -2'37)	-2'37	(-2'37,-4/3)	-4/3	(-4/3,0)	0	(0,1/3)	1/3	(1/3,2)	2	(2,3'37)	3'37	(3'37,∞)	∞
f '(x)		> 0			0	< 0					0	> 0			
f ''(x)		<0							0	> 0					
f(x)		↗			∩	↘					∪	↗			
		cc							P.I	cx					
	-∞		0		6'5		0		-2'74		-12		0		∞

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**

Con la información de la tabla anterior se traza la curva de la función :



b) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

① **Dominio**

Dom(g) = ℝ , pues es una función polinómica.

② **Simetría**

$g(-x) = (-x)^3 - 3\cdot(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq g(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u **OX*** (g(x) = 0)

$x^3 - 3x + 2 = 0$, hay que probar por Ruffini entre div(2) = { ±1, ± 2 }

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Luego los puntos de corte son (-2, 0) y (1, 0)

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u **OY*** (x = 0).

g(0) = 2 , luego es (0, 2).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

▣ Al ser una función polinómica de grado superior a uno, no tiene asíntotas verticales, ni horizontales ni oblicuas.

▣ Ramas infinitas :

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = (+\infty)^3 = +\infty$$

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

◉*Discontinuidades:*

Es continua en ℝ, por ser polinómica.

◉*Ceros de la derivada primera.*

$$g'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-\sqrt{\frac{3}{3}} \; = \; -1 \\ x=+\sqrt{\frac{3}{3}} \; = \; \;\; 1 \end{array} \right\}$$

◉ *Intervalos y tabla :*

x	(- ∞, -1)	-1	(-1, 1)	1	(1 , ∞)
g '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
g(x)	⬀	∩	⬂	∪	⬀

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

◎Ceros de la derivada segunda

g''(x) = 6x ⇨ 6x = 0 ⇔ x = 0

◎Intervalos y tabla

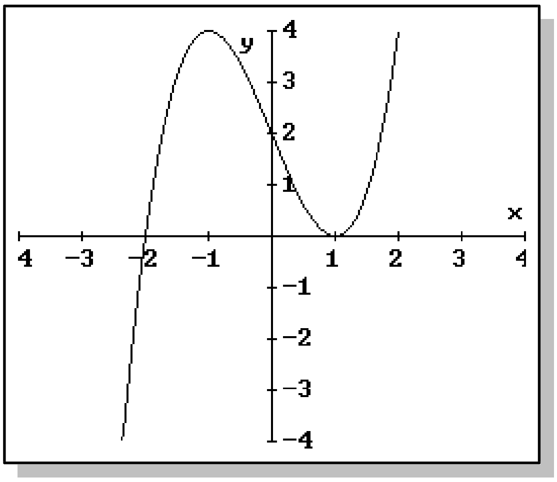
x	(- ∞, 0)	0	(0 , ∞)
g ''(x)	< 0	0	> 0
g(x)	cc	P.I.	cx

⑧ **Resumen de la información obtenida**:

x	-∞	(- ∞, -2)	-2	(-2, -1)	-1	(-1, 0)	0	(0 , 1)	1	(1 , ∞)	∞
g'(x)		> 0			0	< 0			0	> 0	
g''(x)		<0					0	> 0			
g(x)		⬀			∩	⬂			∪	⬀	
		cc					P.I.	cx			
	-∞		0		4		2		0		∞

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**

Con la información de la tabla anterior se traza la curva de la función :



c) $h(x) = \frac{x^2}{1-x}$

① **Dominio**

Al ser una función racional, no pertenecen al dominio los valores de x que anulan el denominador : 1 - x = 0 ⇨ x = 1⇨Dom(h) = ℝ - {1}

② **Simetría**

$h(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x} \neq h(x) \Rightarrow$ No tiene

③ **Periodicidad.**

No es periódica.

④ **Cortes con los ejes**.

◈ *Con el eje de abscisas, horizontal u* ***OX*** (h(x) = 0)

$\frac{x^2}{1-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Luego el punto de corte es el (0, 0)

◈ *Con el eje de ordenadas, vertical u* ***OY*** (x = 0).

h(0) = 0 , luego es el origen (0,0).

⑤ **Asíntotas y ramas infinitas**

▣Verticales
x = 1 como hemos visto en el dominio pues

$\lim_{x \to 1^{\mp}} h(x) = \pm\infty$

▣Horizontales.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-x} = \frac{\infty^2}{1+\infty} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x} = \frac{\infty^2}{-\infty} = -\infty \text{ No tiene}$$

▣Oblicuas

Puede tener, pues no tiene horizontales:

Realizamos la división (x^2) : (- x + 1) :

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x+1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & -x-1 \\ \cline{1-1} x & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Luego la asíntota oblicua es y = -x - 1 por ambos lados.

⑥ **Monotonía y extremos relativos.**

⦿*Ceros de la derivada primera.*

$$h'(x) = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ 2-x=0 \Rightarrow \ x=2 \end{array} \right\}$$

⦿ *Intervalos y tabla :*

Teniendo en cuenta la discontinuidad x = 1 y los ceros de h'(x) , x = 0 y x = 2, la tabla queda :

x	(- ∞, 0)	0	(0, 1)	1	(1 , 2)	2	(2 , ∞)
h '(x)	< 0	0	> 0	∄	> 0		< 0
h(x)	↘	∪	↗	∄	↗	∩	↘

En donde, para averiguar el signo de cada intervalo, hemos tomado :

$$h'(-1) = \frac{2(-1)-(-1)^2}{(1-(-1))^2} = \frac{-2-1}{4} = -\frac{3}{4} < 0; h'(\tfrac{1}{2}) = \frac{2\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3 > 0$$

$$h'(\tfrac{3}{2}) = \frac{2\frac{3}{2}-(\frac{3}{2})^2}{(1-\frac{3}{2})^2} = \frac{3-\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3 > 0; h'(3) = \frac{2\cdot 3-3^2}{(1-3)^2} = \frac{6-9}{4} = \frac{-3}{4} < 0$$

⑦ **Curvatura y puntos de inflexión.**

No es necesario hallarla para no complicar la resolución.

⑧ **Resumen de la información obtenida**:

x	-∞	(- ∞, 0)	0	(0, 1)	1	(1 , 2)	2	-2	∞
h '(x)		< 0	0	>0	∄	> 0	0	< 0	
h(x)		⇘	∪	⇗	∄	⇗	∩	⇘	
	+∞		0		A.V.		-4		–∞

⑨ **Dibujo de la curva de la función:**

Con la información de la tabla anterior se traza la curva de la función :