EJERCICIOS Y PROBLEMAS

❻ Comprueba la continuidad de la siguiente función en el punto x_0 = 5:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ si } x<5 \\ 4x+4 \text{ si } x\geq 5\end{cases}$$

---ooOoo---

Para estudiar la continuidad en un punto hemos de comprobar si coinciden el valor de la función en ese punto con su límite :

f (5) = 4 · 5 + 4 = 24

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}(x^2-1)=5^2-1=24$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(4x+4)=4\cdot 5+4=24$$

Si es continua en x_0 = 5.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❼ Estudia la continuidad lateral de las siguientes funciones en el punto x_0 que se indica:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ si } x\leq -1 \\ 3 \text{ si } x>-1\end{cases}$ $(x_0=-1)$

Hemos de estudiar si coinciden los límites laterales con f (-1) :

f (-1) = -1 + 2 = 1 , pues el -1 está incluido en el primer intervalo.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+2)=-1=f(-1)$$

Sí es continua a la izquierda de -1.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}3=3\neq f(-1)$$

No es continua a la derecha de -1

b) g(x) = E(x) + x ($x_0=2$)

g(2) = E(2) + 2 = 2 + 2 = 4

$$\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-}E(x)+x=\lim_{x\to 2^-}1+x=3\neq g(2)$$

No es continua a la izquierda de 2.

$$\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+}E(x)+x=\lim_{x\to 2^+}2+x=4=g(2)$$

Sí es continua a la derecha de 2.

c) h(x) = $\sqrt{x^2-9}$ $(x_0=\pm 3)$

⌘ x_0 = - 3

$$h(-3)=\sqrt{(-3)^3-9}=0$$

$$\lim_{x\to -3^-} h(x)=\lim_{x\to -3^-}\sqrt{x^2-9}=0=g(-3)$$

Sí es continua a la izquierda de - 3.

$$\lim_{x\to -3^+} h(x)=\lim_{x\to -3^+}\sqrt{x^2-9}=\nexists$$

pues para valores próximos a -3 por su derecha el radicando es negativo.

No es continua a la derecha de - 3.

⌘ x_0 = 3

$$h(3)=\sqrt{x^2-9}=\sqrt{3^2-9}=0$$

$$\lim_{x\to 3^-} h(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x^2-9}=\nexists$$

ya que para valores próximos a 3 por su izquierda el radicando es negativo.

No es continua a la izquierda de 3.

$$\lim_{x\to 3^+} h(x)=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-9}=0=g(3)$$

Sí es continua a la derecha de 3.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❽ Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{si } x<2 \\ x-1 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ en [2, 4]

Hemos de estudiar la continuidad :

✦ A la derecha de 2.

f (2) = = 2 - 1 = 1

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-1) = 1 = f(2)$$

Continua a la derecha de 2.

✦ A la izquierda de 4.

f(4) = 4 -1 = 3

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x-1) = 3 = f(3)$$

Continua a la izquierda de 4.

✦ En el intervalo (2, 4).

Sea a ∈ (2, 4)

f (a) = a -1

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = a-1 = f(a)$$

Continua en el intervalo abierto (2, 4).

Por tanto es continua en [2, 4].

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ en [-3, ∞)

Hay que estudiar la continuidad en :

✪ El intervalo (- 3, ∞)

Sea a ∈ (- 3, ∞)

$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{a+3}}$$

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \frac{1}{\sqrt{a+3}} = g(a)$$

Continua en el intervalo (- 3, ∞)

✪ a la derecha de - 3

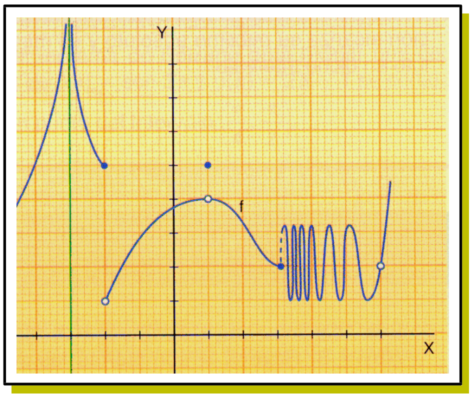
$$g(-3) = \frac{1}{\sqrt{-3+3}} = \pm\infty$$

No es continua a la derecha de -3.

La función sólo es continua en el intervalo (- 3, ∞), pero no en - 3.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❾ Considera la gráfica de la función f :



indica los puntos de discontinuidad de la función e indica de qué tipo son.

---oo0oo---

Recorremos la función de izquierda a derecha :

⦿ x = - 3

Discontinuidad no evitable de salto infinito pues ambos límites laterales tienden a infinito. Además no existe f (-3).

⦿ x = - 2

f(-2) = 5

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$$

Como los límites laterales son finitos y diferentes la discontinuidad es no evitable de salto 5 - 1 = 4 finito.

⦿ x = 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1) = 5$$

Como los límites laterales son finitos e iguales pero distintos de f(1), la discontinuidad es evitable (sin más que hacer que f(1) = 4)

⦿ x = 3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2;\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \nexists$$

Como no existe el límite lateral por la derecha, la discontinuidad es esencial.

⦿ x = 6

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 6^+} f(x);\ f(6) = \nexists$$

Como los límites laterales son finitos e iguales y no existe f(6), la discontinuidad es evitable (definiendo f(6) = 2).

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❿ Comprueba que la siguiente función es discontinua en el punto $x_0 = 3$ y determina el tipo de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 3 \\ 4x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

---ooOoo---

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 2) = 3^2 - 2 = 7$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (4x - 5) = 4\cdot 3 - 5 = 7$$

$$\nexists\ f(3)$$

Como los límites laterales son finitos e iguales pero no existe f(3), la discontinuidad es evitable (definiendo f(3) = 7)

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

⓫ Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son:

a) $f(x) = \frac{3x+3}{x^2-x-2}$

Es una función de tipo racional, las discontinuidades serán los puntos que no pertenecen a su dominio por anular el denominador. Si $x^2 - x - 2 = 0$; x = -1 ó x = 2

◎ x = -1

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

para resolver esta indeterminación factorizamos y simplificamos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-3} = -1$$

Como su límite es finito la discontinuidad en x = - 1 es evitable (definiendo f(-1) = -1.

◎ x = -1

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \frac{9}{0} = \infty$$

Al se los límites laterales infinitos, la discontinuidad es no evitable de salto infinito.

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En cada intervalo, al ser polinómicas son continuas, estudiemos la continuidad del punto x = 0:

$f(0) = 0^2 - 3 = -3$, ya que el cero pertenece al segundo intervalo.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (5x + 2) = 5\cdot 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 3) = -3$$

Los límites laterales son finitos y distintos, luego en x = 0 tiene una discontinuidad no evitable de salto finito (Salto 2 - (- 3) = 5).

c) $h(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ x-5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Las funciones definidas en cada intervalo son continuas en su intervalo de definición, habrá pues que estudiar el punto frontera :

❒ Continuidad en x = 0

f (0) = 0 - 5 = - 5 , pues el cero pertenece al segundo intervalo.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} = \nexists$$

pues al acercarse a cero por la izquierda y ser periódica oscila entre el infinito positivo y negativo.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-5) = -5$$

Como no existe el límite lateral por la izquierda la discontinuidad en x = 0 es esencial.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❷ Comprueba que la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-2}$$

presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 = 2, y define una función g que sea continua en ℝ y coincida con f en todo su dominio.

---ooOoo---

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

Indeterminación que resolvemos factorizando y simplificando :

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+4 = 6$$

Como los límites laterales son finitos pero no existe f(2) la discontinuidad es evitable (definiendo f(2) = 6).

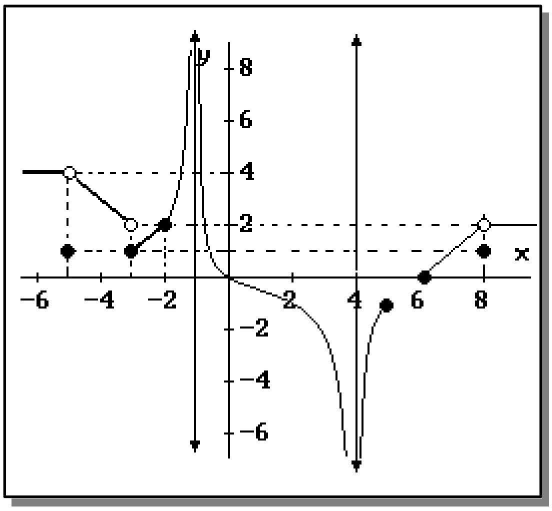
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❸ Dibuja una función que presente dos discontinuidades evitables, una discontinuidad no evitable de salto finito, dos discontinuidades no evitables de salto infinito y una discontinuidad no evitable esencial, de tal forma que tenga por asíntotas verticales las rectas x = -1 y x = 4.

- Da una expresión analítica de una de estas funciones.

---ooOoo---



$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \\ -x-1 & \text{si } -5 < x < -3 \\ x+4 & \text{si } -3 \leq x \leq -2 \\ \frac{-2}{x+1} & \text{si } -2 < x < -1 \\ \frac{3x}{(x+1)(x-4)} & \text{si } -1 < x < 4 \\ \frac{-1}{x-4} & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ x-6 & \text{si } 6 < x < 8 \\ 1 & \text{si } x = 8 \\ 2 & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Que posee :

- Dos discontinuidades evitables:

♦ en x = - 5

f (-5) = 1

$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^-} 4 = \lim_{x\to -5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^+} -x-1 =$$

= 4. Los límites laterales son finitos e iguales pero f(-5) es distinto.

♦ en x = 8

f (8) = 1

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} (x-6) = 2 = \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} 2$$

Los límites laterales son finitos e iguales pero f (8) = 1, es distinto.

- Una discontinuidad no evitable de salto finito, en x = - 3, ya que :

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (-x-1) = -(-3)-1 = 2$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (x+4) = -3+4 = 1$$

los límites laterales aunque finitos son diferentes.

- Dos discontinuidades no evitables de salto infinito :

♦ en x = - 1. Ya que :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3x}{(x+1)(x-4)} = -\infty$$

♦ en x = 4. Ya que :

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{3x}{(x+1)(x-4)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{-1}{x-4} = -\infty$$

- Una discontinuidad esencial en x = 6 pues el límite por la izquierda no existe.

- Dos asíntotas en x = -1 y x = 4, como ya hemos comprobado en las discontinuidades no esenciales de salto infinito.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❹ Estudia los puntos de discontinuidad de la siguiente función f y calcula los límites laterales de la función en dichos puntos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

---ooOoo---

Es una función racional luego las discontinuidades estarán en los valores que anulen el denominador (que no pertenecen al dominio).

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ó $x = 1$.

❄ x = - 1

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

pues para valores a la izquierda de -1, al estar elevados al cuadrado $x^2 - 1 > 0$.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0} = -\infty$$

pues para valores a la derecha de -1, se cumple que $x^2 - 1 < 0$, al ser $x^2 < 1$.

Discontinuidad no evitable de salto infinito en x = - 1.

❄ x = 1

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0} = -\infty$$

ya que a la izquierda de 1 $x^2 - 1 < 0$, por ser $x^2 < 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

pues para valores a la derecha de 1, como x >1, $x^2 > 1$ y $x^2 - 1 > 0$.

Discontinuidad no evitable de salto infinito en x = 1.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❺ Halla el valor de k para que la siguiente función tenga una discontinuidad evitable en $x_0 = 3$.

$$f(x) = \frac{x^2-4x+k}{2x-6}$$

---ooOoo---

Para que tenga una discontinuidad evitable el límite debe existir y ser finito en x = 3, hallémosle :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+k}{2x-6} = \frac{-3+k}{0} \text{ ind.}$$

para que sea del tipo 0 / 0 y se pueda resolver la indeterminación factorizando y simplificando ha de ser -3 + k = 0 es decir k = 3, con lo que :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{2} = 1$$

Luego la discontinuidad será evitable si k = 3 (se evitaría haciendo f(3) = 1).

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❻ Halla el valor de k para que la siguiente función tenga una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x_0 = -2$.

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-k}{2x+4}$$

---ooOoo---

Es racional y se anula para x = - 2

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+4x-k}{2x+4} = \frac{3(-2)^2+4\cdot(-2)-k}{2(-2)+4} = \frac{4-k}{0}$$

límite que depende de que k - 4 = 0, es decir k = 4 ó k ≠ 4 :

Si k = 4 la discontinuidad es evitable pues el límite :

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+4x-4}{2x+4} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x+2)(x-\frac{2}{3})}{2(x+2)} = -4$$

es finito.

Si k ≠ 4 la discontinuidad es no evitable de salto infinito pues el límite es ∞ .

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❼ Estudia la continuidad de las siguientes funciones :

a) $f(x) = x^2 + \ln(x-4)$

es una suma de funciones, la primera es polinómica y , por tanto, continua, pero la segunda es logarítmica y es continua en su dominio que son los valores que hacen x -4 > 0, es decir x > 4, luego **es continua para x > 4.**

b) $g(x) = e^{2\text{sen}x}$

Es composición de dos funciones continuas la exponencial y el seno, **luego es continua en ℝ.**

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3}$

Es un cociente, el denominador no se anula para ningún valor de x luego es continua, pero el numerador es irracional y por tanto no es continua para los valores que hacen el radicando negativo, es decir es continua si x + 1 ≥ 0 ⇒ x ≥ - 1.

Es continua en [- 1, ∞)

d) $i(x) = \frac{\cos 2^x}{\ln x^2}$

La función del numerador es continua al ser una composición de dos funciones continuas (la exponencial 2^x y el cosx).

La función del denominador es composición de una continua x^2 y otra que es continua en su dominio lnx, luego no es continua para los valores que no pertenecen a su dominio que son $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Al ser un cociente, además no es continua para los valores que anulan el denominador $\ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ó $x = 1$.

La función es continua en ℝ - { -1 , 0, 1 }

e) $j(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+5} & \text{si } x < 2 \\ 3x-1 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 2x+2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

En una función a trozos hay que estudiar la continuidad en cada trozo y después en los puntos "frontera":

❍ Intervalo de los $x < 2$

La función es racional, discontinuidades en los valores que anulan el denominador $x + 5 = 0$; $x = -5$.

❍ Intervalo $2 \le x < 3$

Función polinómica, luego continua.

❍ Intervalo de los $x \ge 3$

Función polinómica, luego continua.

❍ Punto $x = 2$

$j(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$$\lim_{x\to 2^-} j(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{4}{x+5} = \frac{4}{7} \ne j(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} j(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x-1) = 5 = j(2)$$

Discontinuidad lateral izquierda.

❍ Punto $x = 3$

$j(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

$$\lim_{x\to 3^-} j(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x-1) = 8 = j(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} j(x) = \lim_{x\to 3^+} (2x+2) = 8 = j(3)$$

Continua en $x = 3$.

Resumiendo :

La función es discontinua en $x = -5$ y $x = 2$, siendo continua en el resto de los números reales.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❽ Describe con brevedad qué significa que una función sea continua en un punto. ¿Es continua la función $f(x) = |x - 3|$ en el punto $x = 3$?

---oo0oo---

Que no hay ninguna interrupción en ese punto, se puede dibujar en un entorno de ese punto sin levantar el lápiz del papel. Para ello han de coincidir a lo que tiende la función (a la izquierda y a la derecha de ese punto) con el valor de la función en ese punto :

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en el punto $x = 3$:

$f(3) = 0$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x+3) = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+3) = 0 = f(3)$$

Sí es continua en $x = 3$.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❶❾ Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2+x}$$

calcula el valor que debe tener $f(-1)$ para que f sea continua en el punto de abscisa $x = -1$.

---oo0oo---

La función es racional y por tanto disconti-nua en los valores que anulan el denominador $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $x + 1 = 0$ es decir $x = -1$. Para que sea continua en $x = -1$ $f(-1)$ ha de ser iguala al límite de la función en este punto:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2+x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

Para resolver esta indeterminación descomponemos y simplificamos :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x} = 3$$

Por tanto f(-1) = 3

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷⓿ Determina los valores de **a** y **b** para que la siguiente función sea continua en ℝ :

$$f(x) = \begin{cases} 5\text{sen}x & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a\text{sen}x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x + 3 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La función es continua en los tres trozos independientemente de los valores de a y b pues las funciones definidas en cada intervalo son continuas. Estudiemos la continuidad en cada punto " frontera " :

⊙Continua en - π / 2

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} 5\text{sen}x = 5\text{sen}(-\tfrac{\pi}{2}) =$$
$= -5$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} a\text{sen}x + b =$$

$$= a\text{sen}(-\tfrac{\pi}{2}) + b = -a + b$$

Luego para que sea continua en este punto han de ser iguales los límites laterales y ha de cumplirse :

$-a + b = -5$ **(1)**

⊙ Continua en π / 2

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} a\text{sen}x + b = a\text{sen}\tfrac{\pi}{2} + b$$
$$= a + b$$
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} 2\cos x + 3 = 3$$

Igualando los límites laterales :

$a + b = 3$ **(2)**

Resolvemos el sistema formado por la ecuaciones **(1)** y **(2)** :

$$\begin{cases} -a+b = -5 \\ a+b = 3 \end{cases} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{cases} 2b = -2 \\ a+b = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} b=-1 \\ a=4 \end{matrix}$$

Para que sea continua a = 4, b = -1.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷❶ Sea la ecuación $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$. Comprueba que tiene dos raíces reales y determina para cada una de ellas su parte entera.

---ooOoo---

Utilizamos el teorema de Bolzano.

La función, al ser polinómica, es continua en ℝ .

Ha de haber do intervalos en que cambie de signo, los buscamos :

$f(0) = -20 < 0$

$f(1) = 3\cdot1^4 - 4\cdot1^3 - 6\cdot1^2 + 12\cdot1 - 20 = -15 < 0$

$f(2) = 3\cdot2^4 - 4\cdot2^3 - 6\cdot2^2 + 12\cdot2 - 20 = -4 < 0$

$f(3) = 3\cdot3^4 - 4\cdot3^3 - 6\cdot3^2 + 12\cdot3 - 20 = 97 > 0$

Luego en el intervalo [2, 3] cambia de signo y es continua, por tanto tendrá un cero comprendido en el intervalo (2, 3) es decir de parte entera 2.

Veamos a hora a la izquierda de 0 :

$f(-1) = 3\cdot(-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 + 12\cdot(-1) - 20 = -21 < 0$

$f(-2) = 3\cdot(-2)^4 - 4\cdot(-2)^3 - 6\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - 20 = 12 > 0$

Luego en el intervalo [-2, -1] cambia de signo y es continua, por tanto en el

intervalo (-2, -1) tendrá una raíz que tendrá de parte entera -1.

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆

❷❷ La función f (x) = x /(x-1) toma el valor -1 para x = 0 y el valor 2 para x = 3. ¿Podemos deducir de este hecho que existe un valor de x en el intervalo (0, 3) para el cual la función se anula? Justifica tu respuesta.

---ooOoo---

No pues para ello debía de ser continua en el citado intervalo y tiene una discontinuidad en x = 1, incumpliendo una de las hipótesis del teorema de Bolzano.

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆

❷❸ Sean f y g dos funciones continuas en [a, b] tales que f(a) < g(a) y f(b) > g(b). Demuestra que sus gráficas se cortan.

---ooOoo---

Si definimos una nueva función :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

cuando encontremos algún x_0 tal que $h(x_0) = 0$, $f(x_0) - g(x_0) = 0$, es decir $f(x_0) = g(x_0)$ y las gráficas se cortan en ese punto.

Para demostrar que existe ese punto hemos de comprobar si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano :

- La función es continua en [a, b] pues es suma de dos funciones que son continuas en ese intervalo.

- La función h(a) = f(a) - g(a) < 0 pues f(a) < g(a) y h(b) = f(b) - g(b) > 0 pues f(b) > g(b), luego en los extremos cambia de signo.

Al cumplir las dos hipótesis del teorema de Bolzano ∃ x_0 / h(c) = 0 y por tanto $f(x_0) = g(x_0)$ y las gráficas se cortan en ese punto.

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆

❷❹ Estudia si la ecuación 3 ln x = x tiene alguna solución real en el intervalo (1, 3).

---ooOoo---

Estudiar las soluciones de la ecuación lnx = x equivale a comprobar si existen ceros de la función f(x) = lnx - x, lo que hacemos mediante el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 3] :

◈ La función es continua en el intervalo citado pues es suma de dos funciones que lo son (lnx es continua para x > 0 y x en todo ℝ).

◈ f(1) = 3ln1 -1 = 0 - 1 = -1 < 0
f(3) = 3ln3 - 3 3 (ln3 -1) > 0

Por tanto ∃ c ∈ (1,3) / f(c) = 0 y por tanto 3lnc - c = 0 ⇔ 3lnc = c.

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆

❷❺ Comprueba que la ecuación $x^4 - x^2 - 20 = 0$ tiene alguna solución real y determina un intervalo de amplitud menor o igual que 0,5 donde se encuentre dicha solución.

---ooOoo---

Comprobar que tiene alguna solución real es buscar los ceros de $f(x) = x^4 - x^2 - 20$ mediante el teorema de Bolzano :

▣ La función es continua por ser polinómica.

▣ Busquemos un intervalo en que cambie de signo :

f(0) = -20 < 0

$f(1) = 1^4 - 1^2 - 20 = - 20 < 0$

f(2) = $2^4 - 2^2 - 20 = 16 - 4 - 20 = -8 < 0$

f(3) = $3^4 - 3^2 - 20 = 81 - 9 - 20 = 52 > 0$

Como pide de amplitud 0' 5 :

f(2'5) = $2'5^4 - 2'5^2 - 20 = 12'8125 > 0$

Luego el intervalo buscado es (2, 2,5).

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷❻ Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. ¿Se puede afirmar lo mismo si el polinomio tiene grado par?

---ooOoo---

Para que haya al menos una raíz real ha de cumplirse el teorema de Bolzano en algún intervalo [a, b] :

◊ La función, al ser polinómica es continua en todo ℝ, por tanto en cualquier intervalo [a, b] .

◊ Hemos de demostrar que un polinomio de grado impar siempre tiene un intervalo en cuyos extremos cambien de signo.

Sea el polinomio:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_o$
se cumple :

$$\lim_{x\to \pm\infty} P(x) = \lim_{x\to \pm\infty} a_n x^n = a_n(\pm\infty)$$

y sea el coeficiente del término de mayor del signo que sea tenderá a valores de signo contrario, es decir :

$$\begin{cases} \text{si } a_n < 0 \ \lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = +\infty \text{ y } \lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = -\infty \\ \text{si } a_n > 0 \ \lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = -\infty \text{ y } \lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = +\infty \end{cases}$$

y por tanto siempre existirá un intervalo en cuyos extremos cambie de signo.

Como se cumplen las dos hipótesis del teorema de Bolzano habrá al menos un intervalo en el cual se anule el polinomio, es decir tendrá al menos una raíz real.

Si el polinomio es par puede no cumplirse la segunda hipótesis (al elevar a potencia par siempre será positivo) y puede que no tenga raíz real. Ejemplo P(x) = $x^4 + 4$, no tiene raíces reales.

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷❼ Halla los valores de **a** y **b** para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}x + 3 & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\cos x}{a} & \text{si } 0 < x \le \pi \\ \cos x + b & \text{si } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

· Calcula el punto c ∈ (–π, 2π) en el que la función se anula.

---ooOoo---

Calculamos laos valores de a y b haciendo que se cumpla la hipótesis de continuidad. Como la función es continua en cada uno de sus tres trozos, independientemente de los valores de a y b, imponemos la condición de que los límites laterales en los puntos frontera sean iguales :

★ En x = 0

f(0) = sen0 + 3 = 3

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\text{sen}x + 3) = 3 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 0}{a} = \frac{1}{a}$$

Para que sea continua en x = 0 han de ser iguales ambos límites laterales :

$$\frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

★ En x = π

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} 3\cos x = 3\cos\pi = -3$$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} (\cos x + b) = -1 + b$$

y para que sea continua en este punto los límites laterales han de ser iguales :

-1 + b = -3 ; b = -2.

Para a = - 1/3 y b = - 2 la función es continua en el intervalo citado luego se cumple la primera hipótesis del teorema de Bolzano, veamos ahora en qué intervalo se cumple la segunda :

$$f(-\pi) = \text{sen}(-\pi) + 3 = 3 > 0$$
$$f(0) = \text{sen}0 + 3 = 3 > 0$$
$$f(\pi) = 3\cos\pi = -3 < 0$$
$$f(2\pi) = \cos 2\pi - 2 = -1 < 0$$

Se cumple la segunda hipótesis (cambio de signo en los extremos) en el segundo intervalo, por lo que existirá un c perteneciente al intervalo para el cual se anule la función :

f(c) = 0 ; 3cosc = 0; cos c = 0 ; **c = π / 2**

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷❽ Comprueba que la función f (x) = 3 tg^2 x + 1 toma el valor 2 en el intervalo (0, π /4) y calcula el valor c de este intervalo para el cual f (c) = 2.

---ooOoo---

Es un ejercicio de aplicación del teorema de conservación del signo.

⌘ La función es continua en el intervalo [0, π /4] pues es una suma de funciones que lo son.

⌘ Comprobemos si el valor 2 está comprendido entre los valores de la función en los extremos del intervalo :

f(0) = 3tg ^{2} 0 + 1 = 1

f(π / 4) = 3 tg^2(π / 4) +1 = 3 · 1 + 1 = 4

El teorema de los valores intermedios nos asegura que :

∃ c ∈ (0, π / 4) f(c) = 2

Para encontrarlo resolvemos la ecuación:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 3tg^2x + 1 = 2 \Leftrightarrow tg^2x = \tfrac{1}{3}$$

$tgx = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ pues x ha de pertenecer al intervalo citado.

c = π / 6

☆☆☆⌗⌗◎⌗⌗☆☆☆

❷❾ Comprueba si puede aplicarse el teorema de Weierstrass a las siguientes funciones en el intervalo indicado.

· En caso afirmativo, halla el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo correspondiente.

a) f(x) = $2x^2 - 4x + 5$ en [-1, 2]

b) g(x) = $\frac{5}{x-2}$ en [0, 3]

c) h(x) = $x^3 - 1$ en (-2,2)

d) i(x) = - $x^2 + 2x + 3$ en [-3,4]

---ooOoo---

Para poder aplicar el teorema de Weierstrass la función ha de ser continua en un intervalo cerrado.

a) La función es continua por ser polinómica (de 2ª grado) y el intervalo es cerrado luego tendrá máximo y mínimo en el intervalo.

Como es un trinomio de 2º grado veamos primero si el vértice pertenece al intervalo:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 2} = 1$$

que está incluido en el intervalo dado.

Como el coeficiente a del término de segundo grado es 2 > 0, el vértice será el mínimo **m = (1, f(1)) = (1, 3**).

El máximo será uno de los extremos del intervalo (ya que la función será creciente a derecha e izquierda del mínimo) :

f (-1) = 2·(-1)^2 - 4·(-1) + 5 = 11

f (2) = 2·2^2 - 4·2 + 5 = 5

Como f (-1) > f (2), el máximo es :

M = (-1, 11)

b) La función g(x) **no es continua** en el intervalo dado, pues al ser racional tiene una discontinuidad en el valor que anula su denominador: x - 2 = 0 ; x = 2, que pertenece al intervalo [0,3], por lo cual **no es aplicable el teorema de Weierstrass.**

c) El intervalo dado no es cerrado luego no es aplicable el teorema de Weierstrass.

d) La función es polinómica y por tanto continua, como además el intervalo es cerrado, se puede aplicar el teorema de Weierstrass y asegurar que tendrá un máximo y un mínimo en el intervalo dado. Calculémoslos :

Como es una parábola de a = -1 < 0, el vértice será el máximo, veamos si pertenece al intervalo :

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$$

que sí pertenece al intervalo [-3,4], luego el máximo es **M = (1, i(1)) = (1, 4).**

El mínimo estará en uno de los dos extremos del intervalo :

f(-3) = - (-3)^2 + 2·(-3) + 3 = -12

f (4) = - 4^2 + 2·4 +3 = -5

Como f (-3) < f (4) el mínimo es :

m = (-3 , -12) .

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆

❸⓿ Una empresa fabrica un determinado artículo que vende a 10,2 euros por unidad. Si un pedido supera las 100 unidades, la empresa hace una rebaja. El precio de x unidades viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 10'2x & \text{si } x \leq 100 \\ kxe^{-0'001x} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Halla el valor de k para que el precio de las x unidades aumente de forma continua.

b) En la situación del apartado a), ¿cuánto cuesta cada unidad si se compran 400 unidades?

---ooOoo---

a) Las funciones dadas en los dos intervalos son continuas luego hemos de igualar los límites laterales en la “frontera “ de separación de ambos intervalos o trozos:

$$\lim_{x\to 100^-} f(x) = \lim_{x\to 100^-} 10'2x = 1020$$

$$\lim_{x\to 100^+} f(x) = \lim_{x\to 100^+} kxe^{-0'001x} = 100ke^{-0'1}$$

igualando :

$$100ke^{-0'1} = 1020 \Rightarrow k = \frac{1020}{100}e^{0'1} = 11'27$$

b) x 0 400 pertenece al 2º trozo, luego sustituyendo :

f(400) = 11’27·400·e$^{0'001\cdot 400}$ = 3 022’5

El precio por unidad :

$$p = \frac{f(400)}{400} = \frac{3022'5}{400} \simeq 7'56 \text{ euros/unidad}$$

☆☆☆⌖⌖◎⌖⌖☆☆☆