PREPARACIÓN DE LA UNIDAD

ACTIVIDADES.

❶ Resuelve la ecuación $x^3 + 4x^2 - 2x = 8$, y define una función cuyos ceros coincidan con las soluciones de dicha ecuación

---oo0oo---

Pasando el 8 al primer miembro : $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$, que resolvemos factorizando mediante Ruffini :

	1	4	-2	-8
-4		-4	0	8
	1	0	-2	0

Luego:

$$x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = (x + 4) \cdot (x^2 - 2)$$

y resolviendo las ecuaciones asociadas a los factores :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{array} \right\}$$

que son las tres soluciones de la ecuación.

La función asociada es :

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

❷ Halla los ceros de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$

---oo0oo---

$$x^3 - 3x^2 - 10x = x\,(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{array} \right.$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

las tres soluciones son :

$x = -2,\ x = 0,\ x = 5$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

❶ Comprueba que las siguientes funciones son continuas en el punto $x_0 = 0$:

a) $f(x) = \frac{x-6}{x^2+2}$

para que una función sea continua en un punto x_0 ha de cumplirse :

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Veamos :

$$f(0) = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-6}{x^2+2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-6}{x^2+2} = \frac{-6}{2} = -3 = f(0)$$

Por tanto es continua en $x_0 = 0$

b) $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$

$$g(0) = \frac{1}{-1} = -1$$

en donde hemos sustituido en el primer intervalo que es al que pertenece el cero.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1;\ \lim_{x \to 0^+} 2x - 1 = -1$$

Como coinciden los límites laterales con f(0) **la función es continua en $x_0 = 0$**

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

❷ Comprueba que las siguientes funciones no son continuas en el punto $x_0 = -5$:

a) $f(x) = \frac{x-4}{x+5}$

Como $f(-5) = -9/0 = -\infty$, no existe, **no es continua en $x_0 = -5$** .

b) $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - 2 & \text{si } x < -5 \\ x + 8 & \text{si } x \ge -5 \end{array} \right.$

$$g(-5) = -5 + 8 = 3.$$

$$\lim_{x\to -5^-}(x^2-2) = (-5)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

$$\lim_{x\to -5^+}(x+8) = -5+8 = 3$$

Como $\lim_{x\to -5^-} g(x) \neq \lim_{x\to -5^+} g(x)$ No continua

✧✧✧⌗⌗⟡⌗⌗✧✧✧

❸ Estudia la continuidad lateral de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 0$.

---oo0oo---

Estudiar la continuidad lateral en un punto consiste en comprobar que los límites laterales en ese punto coinciden con el valor de la función en ese punto :

$$f(0) = -1$$

✳ Continuidad por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Como coincide con el valor de la función en cero, **sí es continua a la izquierda de cero.**

✳ Continuidad por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Como no coincide con el valor de la función en cero, **no es continua a la derecha de cero.**

✧✧✧⌗⌗⟡⌗⌗✧✧✧

❹ Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ -x^2+2x+5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

en los puntos $x_0 = -1$ y $x_0 = 3$.

---oo0oo---

☒ Continuidad en $x_0 = -1$

$$f(-1) = -1 - 1 = -2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} -x = -(-1) = 1$$

Como no tiene continuidad por la izquierda , **es discontinua en -1**.

☒ Continuidad en $x_0 = 3$

$$f(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = -9 + 6 + 5 = 2.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-1) = 3-1 = 2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(-x^2+2x+5) = 2$$

Al coincidir los límites laterales y el valor de la función, la función **es continua en 3**.

✧✧✧⌗⌗⟡⌗⌗✧✧✧

❺ Estudia la continuidad de las funciones siguientes en el intervalo que se indica :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2-11 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

en [0, 3].

Hay que estudiar la continuidad en el intervalo abierto (0, 3) y las continuidades laterales en los extremos, a la derecha de 0 y a la izquierda de 3:

☯ Estudio de la continuidad en (0, 3)

$\forall a \in (0, 3)$, se cumple :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x-2) = a-2 = f(a)$$

por tanto la función es continua en (0, 3).

☯ Estudio de la continuidad lateral en 0

$f(0) = 0 - 2 = -2$, pues el cero pertenece al segundo trozo.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-2) = -2$$

por tanto es continua a la derecha de cero.

☯ Estudio de la continuidad lateral en 3

f (3) = 3^2 -11 = -2, pues el 3 pertenece al tercer intervalo.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-2) = 3-2 = 1 \neq f(3)$$

Discontinua por la izquierda de 3.

Resumiendo **la función es continua en el intervalo [0, 3) y discontinua en 3.**

b) g(x) = $\sqrt{x-1}$ en [1, +∞)

Para estudiar la continuidad en el intervalo [1, +∞) hemos de estudiar la continuidad en (1, +∞) y a la derecha de 1:

☯ Estudio de la continuidad en (1, +∞)

$\forall a \in (1, +\infty)$, se cumple :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}\sqrt{x-1} = \sqrt{a-1} = g(a)$$

luego es continua en el intervalo (1, +∞)

☯ Estudio de la continuidad lateral en 1

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0 = g(1)$$

luego es continua a la derecha de 1 y por tanto es **continua en el intervalo [1, +∞)**

c) h(x) = x ·|x| en [-2, 2]

Primero expresamos la función en valor absoluto en función a trozos:

como x pasa de ser negativa a positiva en el 0 la función queda :

$$h(x) = \begin{cases} x\cdot(-x) & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x\cdot x & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

es decir :

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

para estudiar la continuidad en el intervalo pedido hemos de estudiar la continuidad en el intervalo (-2, 2) y a la derecha de -2 e izquierda de 2.

☯ Estudio de la continuidad en (-2,2)

Como en el intervalo no viene definida por una expresión única hay que estudiar la continuidad en cada trozo :

- $\forall a \in (-2, 0]$, se cumple que :

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} -x^2 = -a^2 = h(a)$$

- $\forall a \in (0, 2)$, se cumple que :

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2 = h(a)$$

luego es continua en el intervalo (-2, 2).

☯ Estudio de la continuidad a la derecha de -2 :

$$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} -x^2 = -4 = h(-2)$$

☯ Estudio de la continuidad a la izquierda de 2 :

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 = h(2)$$

La función es continua en [-2, 2].

✧✧✧❉❉❉❉❉✧✧✧

❻ Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y determina de qué tipo son :

a) f(x) = $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

Como es una función racional es continua en su dominio, siendo discontinua en los valores que anulan el denominador :

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 , x = 3$

Estudiemos el tipo de discontinuidad :

- En x = 2

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

Esta indeterminación la resolvemos factorizando, simplificando y volviendo a sustituir :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-3} = -1$$

Como el límite es finito la discontinuidad es evitable.

- En x = 3

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} \text{ ind.}$$

veamos los límites laterales :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} =$$

$= -\infty$, ya que el denominador es negativo para valores menores que 3.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} =$$

$= \infty$, ya que el denominador es positivo para valores mayores que 3.

La función f en 3 tiene una discontinuidad de salto infinito.

b) $g(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le -2 \\ \frac{x+3}{x-5} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Como es una función a trozos hemos de estudiar su continuidad en cada intervalo y en los puntos frontera.

⊙ Intervalo de $x \le -2$

Es una función polinómica de primer grado y, por tanto **continua en su intervalo**, pues :

$\forall a \in (-\infty, -2)$, se cumple que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (x+4) = a+4 = f(a)$$

⊙ Intervalo de $x \le -2$

Es una función racional, que será continua en su dominio o conjunto de puntos que no anulan el denominador.

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$. Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en este punto estudiando su límite :

$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x+3}{x-5} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} g(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x+3}{x-5} = +\infty$$

pues al acercarnos a 5 por su izquierda los valores del denominador son negativos y viceversa por la derecha.

La función en x = 5 presenta, pues, una discontinuidad de salto infinito.

⊙ Punto frontera x = -2 .

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^-} (x+4) = -2+4 = 2$$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+3}{x-5} = -\frac{1}{7}$$

Como los límites laterales son distintos y finitos es discontinua en x = -2 de salto finito, el salto es 2 + 1/7 = 15/7.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

❼ Comprueba que la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$$

presenta una discontinuidad evitable en el punto $x_0 = -1$, y define una nueva función que coincida con f en su dominio y sea continua en $x_0 = -1$.

---oo0oo---

Como es una función racional no será continua en los puntos que no pertenezcan a su dominio, que son los que anulan el denominador :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 2$$

por tanto hemos comprobado que la función es discontinua en x = .1, veamos el tipo de discontinuidad hallando el límite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{3}$$

Como existe límite en x = -1, pero no f (-1) la discontinuidad es evitable, ¿ cómo se puede evitar la discontinuidad ?, definiendo otra función que tenga en ese punto el valor del límite :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-x-2} & \text{si } x \neq -1 \\ -\frac{1}{3} & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

❽ Estudia la continuidad de las funciones :

a) $f(x) = (x-5)^3$

Como es una función polinómica es **conti-nua** en su dominio, **los números reales.**

b) $g(x) = x \cdot e^x$

Es el producto de dos funciones conti-nuas en $\Re$, una polinómica de primer grado y otra exponencial, luego **es continua para todo número real**.

c) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+6}$

Es racional, luego continua en su dominio que es R - { -6 }.

d) $i(x) = \log(x+3)$

Es una función logarítmica , luego **conti-nua** en su dominio que son los números reales tal que x + 3 > 0 , es decir **x > -3**.

e) $j(x) = x^3 - \sqrt{x+1}$

Tiene una expresión irracional, luego será **continua** para todos los valores que hagan el radicando positivo o nulo :

$$x + 1 \geq 0 \quad \mathbf{x \geq -1}$$

f) $k(x) = \text{sen } x^2 t \cos x$

Función trigonométrica en senos y cosenos, de funciones polinómicas, que es **continua en R**.

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

❾Comprueba, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ corta al eje de abscisas en un punto del intervalo (2, 3).

---oo0oo---

Comprobemos las hipótesis :

✦ La función, por ser polinómica, es continua en R y por tanto continua en [2, 3].

✦ $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 5 = -3$

$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 5 = 4$

Es continua en el intervalo [2,3], y en los extremos alcanza valores de signo opuesto ⇒ existe al menos un punto c ∈ (2, 3) tal que f (c) = 0, es decir corta al eje horizontal en al menos un punto c.

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

❿ Comprueba, utilizando el teorema de Bolzano que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene una solución en el intervalo (1, 2).

---oo0oo---

La función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$, tiene los mismos ceros que soluciones la ecuación, en ella estudiemos las hipótesis del teorema de Bolzano :

☒ Por ser polinómica es continua en R y ,por tanto, en el intervalo [1, 2].

☒ $f(1) = 1^3 + 4\cdot1^2 - 2\cdot1 - 8 = -5 < 0$

$f(2) = 2^3 + 4\cdot2^2 - 2\cdot2 - 8 = 12 > 0$

Es continua en [1, 2] y cambia de signo en los extremos del intervalo ⇒∃ c ∈ (1, 2) f (c) = 0 . Q..E. D.

✧✧✧☩☩⟡☩☩✧✧✧

❶❶ Comprueba que la función *f* (x) = e^x - 3 tiene un cero en el intervalo (1, 2) y halla dicho cero con un ` error menor que 0'1.

---oo0oo---

Comprobemos las hipótesis del teorema de Bolzano :

⊗ La función exponencial es continua en R y , por tato, continua en [1, 2]

⊗ $f(1) = e^1 - 3 < 0$

$f(2) = e^2 - 3 > 0$

Por tanto ∃ c ∈ (1, 2) tal que f (c) = 0

Si el valor de c = 1'5 (centro del intervalo, el error cometido será 2 - 1'5 = 1'5 -1 = 0'5, como se nos pide un error menor de 0'1 hemos de reducir la amplitud del intervalo hasta conseguir que la mitad de su amplitud sea menor que 0'1 :

⟡ Sea el intervalo [1, 1'5], se cumple la primera hipótesis (de continuidad) y por ser f (1'5) = $e^{1'5}$ - 3 = 1'4816.. > 0 también la segunda. El máximo error que podemos cometer ahora es 0'5/2 = 0'25, superior al pedido.

⟡ Sea el intervalo [1, 1'2], se cumple la primera hipótesis (de continuidad) y por ser f (1'2) = $e^{1'2}$ - 3 = 0'3201.. > 0 también la segunda. El máximo error que podemos cometer ahora es 0'2/2 = 0'1, superior al pedido.

⟡ Sea el intervalo [1, 1'1], se cumple la primera hipótesis (de continuidad) y por ser f (1'1) = $e^{1'1}$ - 3 = 0'00416.. > 0 también la segunda. El máximo error que podemos cometer ahora es 0'1/2 = 0'05, inferior al pedido.

Luego **el cero buscado estará en el intervalo (1, 1'1)**

✧✧✧☩☩⟡☩☩✧✧✧

❶❷ La función f (x) = x/tgx toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [π/4 , 3π/4]. Comprueba que f no se anula en ese intervalo.

- Razona el hecho de que no se contradice el teorema de Bolzano .

---oo0oo---

$$\frac{x}{tgx} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}]$$

Se anula en un punto fuera del intervalo.

No contradice el teorema de Bolzano pues no cumple la hipótesis de continuidad, ya que la función tgx no es continua en el intervalo citado, ya que π/2 (punto que sí pertenece al intervalo) no pertenece al dominio.

✧✧✧☩☩⟡☩☩✧✧✧

❶❸ Si f es una función continua en un intervalo [a, b] y, además, el signo de f(a) y el de f(b) coinciden, ¿puede ser que f tenga algún cero en dicho intervalo?

---oo0oo---

Sí, por ejemplo $f(x) = x^4$, es continua en el intervalo [-2, 2], f(-2) = f(2) = 16 > 0 y se anula para x = 0 que pertenece a ese intervalo.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

❶ Halla el valor que deben tener **a** y **b** para que la siguiente función sea continua en ℝ

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1<x<3 \\ x^2-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

---oo0oo---

Las funciones a trozos son continuas si lo son en cada intervalo o trozo y en sus puntos frontera o de separación de intervalos.

En este independientemente de los valores que puedan tomar a o b las tres funciones de cada intervalo son polinómicas, luego son continuas en sus respectivos intervalos.

Estudiemos la continuidad en los puntos frontera :

⊙ Continuidad en x = 1

$$f(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax-b)=a-b$$

Por tanto, para que sea continua en x = 1 ha de cumplirse :

$$a - b = 3 \qquad \textbf{(1)}$$

⊙ Continuidad en x = 3

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax-b)=3a-b$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2-3)=6=f(3)$$

Para que sea continua en x = 3 :

$$3a - b = 6 \quad \textbf{(2)}$$

las ecuaciones (1) y (2) son un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas compatible y determinado, que resuelto, nos proporciona los valores buscados :

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 3a-b=6 \end{cases} \xrightarrow[F_2-F_1]{} \begin{cases} a-b=3 \\ 2a=3 \end{cases}$$

luego **a = 3/2 y b = -3/2**.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

❷Halla el valor que deben tener m y n para que la siguiente función sea continua en ℝ.

$$(x)=\begin{cases} 4mx-2 & \text{si } x<2 \\ 6 & \text{si } x=2 \\ \frac{3x+n}{x+1} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

---oo0oo---

Las funciones dadas en los tres intervalos son continuas, en sus intervalos pues aunque la tercera, racional, no es continua en x = -1, este valor no pertenece a su intervalo de definición.

⊙ Continuidad en x = 2

$$f(2) = 6$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(4mx-2)=8m-2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+n}{x+1}=\frac{6+n}{3}$$

Igualando al valor de f (2) = 6 queda el sistema :

$$\begin{cases} 8m-2=6 \\ \frac{6+n}{3}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{6+2}{8}=1 \\ n=6\cdot 3-6=12 \end{cases}$$

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

❸ Halla el valor que debe de tener k para que la función :

$$f(x) = \frac{x^2-5x-2k}{x+3}$$

tenga una discontinuidad evitable en $x_0 = -3$

---oo0oo---

Independientemente del valor de *k,* la función es discontinua en x = -3, pues anula su denominador. Para que sea evitable su límite (cuando x tiende a -3) debe ser finito y para que eso ocurra el numerador tiene que tener un factor común con el denominador (x+3), lo que presupone que sustituyendo x por -3 en el numerador este ha de ser cero :

$(-3)^2 - 5\cdot(-3) - 2k = 0 \Rightarrow 9 + 15 - 2k = 0 \Rightarrow$ **$k = 24/2 = 12$**

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❹ Halla el valor que debe tener m para que la función :

$$(x) = \frac{mx^2-3x+7}{x-2}$$

tenga una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x_0 = 2$.

---oo0oo---

Como la función es racional y se anula el denominador para x = 2, la función es discontinua en x = 2 independientemente del valor de *m*. Para que sea no evitable de salto infinito, los límites laterales (cuando x tiende a 2) han de existir y, al menos uno, tender a infinito.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{mx^2-3x+7}{x-2} = \frac{m2^2-3\cdot 2+7}{2-2} = \frac{4m+1}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{mx^2-3x+7}{x-2} = \frac{m2^2-3\cdot 2+7}{2-2} = \frac{4m+1}{0}$$

Luego $4m + 1 \neq 0 \Rightarrow$ **$m \neq -1/4$**

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❺Aplica el teorema de Bolzano para probar que las gráficas de f(x) = sen2x y g(x) = 2x - 1 se cortan en algún punto del intervalo ($\pi/4$,$\pi/2$).

---oo0oo---

Para que se corten ha de cumplirse que f(x) = g(x) es decir que la función :

$$h(x) = \text{sen } 2x - 2x + 1$$

tenga algún cero en el citado intervalo.

Comprobemos las hipótesis :

■ La función h(x) es continua pues es diferencia de otras dos continuas, luego lo es en el intervalo pedido.

■ Veamos las imágenes en los puntos frontera :

$$h(\tfrac{\pi}{4}) = \text{sen}(2\cdot\tfrac{\pi}{4}) - 2\tfrac{\pi}{4} + 1 = 1 - \tfrac{\pi}{2} > 0$$

$$h(\tfrac{\pi}{2}) = \text{sen}(2\cdot\tfrac{\pi}{2}) - 2\tfrac{\pi}{2} + 1 = 1 - \pi < 0$$

Al cumplirse las dos hipótesis $\exists$ c ($\pi/4$, $\pi/2$) para el cual h(c) = 0 $\Rightarrow$ f(c) = g(c) y por tanto se cortan sus gráficas en ese punto c.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❻ Aplica el teorema de Bolzano para probar que las gráficas f(x) = 2^{x+1} y g(x) = 3^{1-x} se cortan en algún punto y determínalo en un intervalo de amplitud menor o igual que la unidad.

---oo0oo---

Como en el ejercicio anterior construimos la función :

$$h(x) = 2^{x+1} - 3^{1-x}$$

y estudiamos las hipótesis del teorema de Bolzano :

■ La función h(x) es continua pues es suma de otras dos continuas, luego lo es en cualquier intervalo.

■ Ahora hemos de encontrar un intervalo en cuyos extremos cambie de signo y tenga de amplitud uno o menos. Ese intervalo puede ser (0, 1) pues:

$h(0) = 2^{0+1} - 3^{1-0} = 2 - 3 = -1 < 0$

$h(1) = 2^{1+1} - 3^{1-1} = 2^2 - 3^0 = 3 > 0$

y además su amplitud es 1 - 0 = 1.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

❼ Encuentra una aproximación de ln 2 con un error menor que 0'05.

---oo0oo---

Queremos encontrar un número c tal que $|c - \ln 2| < 0'05$, si $x = \ln 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0$, luego basta encontrar un cero de la función $f(x) = e^x - 2$ con un error menor que 0'05.

Busquemos un intervalo en el se cumpla el teorema de Bolzano de amplitud 0'1 (para que el error sea menor que 0'05, mitad de su amplitud) :

❆ Intervalo (0,1)

$f(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$

$f(1) = e^1 - 2 > 0$

reduzcamos a la mitad :

❆ Intervalo (0, 0'5)

$f(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$

$f(0'5) = e^{0'5} - 2 = < 0$

no nos vale probemos en el otro sentido.

❆ Intervalo (0'5, 1)

$f(0'5) = e^{0'5} - 2 = < 0$

$f(1) = e^1 - 2 > 0$

reducimos más.

❆ Intervalo (0'5, 0'6)

$f(0'5) = e^{0'5} - 2 = < 0$

$f(0'6) = e^{0'6} - 2 = - 0'1778... < 0$

❆ Intervalo (0'6, 0'7)

$f(0'6) = e^{0'6} - 2 = - 0'1778... < 0$

$f(0'7) = e^{0'5} - 2 = 0'0137... > 0$

Luego el intervalo buscado es (0'6, 0'7) y considerando su punto medio c = (0'6 + 0'7) / 2 = 0'65 es una aproximación de ln2 con error menor que 0'05.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

❽ Demuestra que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada.

---oo0oo---

Queremos demostrar que $\forall\ x > 0$ existe :

$$\text{un } c = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = c^2$$

Luego buscamos solución de la ecuación equivalente $x^2 - a = 0$, que haremos probando el teorema de Bolzano para $f(x) = x^2 - a$.

☒ La función es polinómica y por tanto continua.

☒ Busquemos un intervalo en que cambie de signo :

$f(0) = - a < 0$

y como la función es creciente, sea cual sea a siempre existirá otro número b tal que $f(b) = b^2 - a > 0$

Por tanto existirá un $c \in (0, b)$ $/ f(c) = 0 \Leftrightarrow c^2 - a = 0 \Leftrightarrow c^2 = a$ y por tanto

$$\sqrt{c} = a$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

ACTIVIDADES

Cuestiones

❶ Dada una función f, demuestra que si f tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en x_0 la recta $x = x_0$ es asíntota vertical de f. ¿Es cierto el recíproco?

---ooOoo---

Si f tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito los límites laterales existen y al menos uno ha de tender a infinito :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ ó } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

y esta es precisamente la definición de asíntota vertical, q.e.d.

Si tiene una asíntota vertical pero uno de los límites laterales no existe, la discontinuidad no sería no evitable sino esencial, luego el recíproco no es cierto.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❷ Da un ejemplo de una función que presente discontinuidades de salto finito en los números enteros.

---ooOoo---

El ejemplo más clásico es la función parte entera:

$$E(x) = \begin{cases} \dots \\ -2 \text{ si } -2 \le x < -1 \\ -1 \text{ si } -1 \le x < 0 \\ 0 \text{ si } 0 \le x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \le x < 2 \\ 2 \text{ si } 2 \le x < 3 \\ \dots \end{cases}$$

pues si $a \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \to a^-} E(x) = \lim_{x \to a^-} (a-1) = a-1$$

$$\lim_{x \to a^+} E(x) = \lim_{x \to a^+} a = a$$

en donde comprobamos que los límites son finitos, distintos y enteros , luego tiene una discontinuidad de salto finito (1) en $\mathbb{Z}$.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❸ Sean f y g dos funciones tales que f (x) = g(x) en todos los puntos del dominio salvo en x_0. ¿Puede ocurrir que f tenga una discontinuidad no evitable en x_0 y que g sea continua en ese punto?

---ooOoo---

No, pues si g(x) es continua en x_0 su límite será finito, y si f(x) = g(x) para todo punto del dominio menos x_0 ha de cumplirse :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ya que el límite no depende del valor en el punto x_0 sino de los de su izquierda y derecha y estos son iguales. Pero si el límite de g(x) es finito, por ser continua, también lo será el de f(x) y por tanta, si tiene discontinuidad esta no puede ser no evitable (límite infinito), sino evitable.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❹Da un ejemplo de una función f discontinua en todos los puntos del intervalo [0, 1] y tal que |f| sea continua en todos los puntos del intervalo.

---ooOoo---

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ es racional} \\ -x \text{ si } x \text{ no lo es} \end{cases}$$

No existe límite pues no coinciden los límites a izquierda y derecha en cada punto. pero sin embargo |f| = x sí lo es.

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

❺ Sea f continua en [1, 5], f(1) = -2, f(2) = -1 y f(5) = 3. Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) f(x) > 0 ∀x ∈ (2, 5).
b) f corta al eje OX en el intervalo [1, 5].
c) f no corta al eje OX en el intervalo [1, 2].
d) f puede tener más de dos ceros en [1, 2].
e) Existe ∈ c [1, 5] tal que f(c) = 2,5.
f) f está acotada en el intervalo [1, 2].

---ooOoo---

a) Si f es continua en [1, 5], lo será en [2, 5] y además f(2) = -1 < 0 y f(5) = 3 > 3 según el teorema de Bolzano habrá algún c (2, 5) tal que f(c) = 0 contradiciendo la suposición de que f(x) >0 ∀ x ∈ (2, 5).

Además al ser continua y f(2) < 0, según el teorema de conservación del signo, existe un entorno de 2 en que es negativa en contra de la suposición.

b) Cierto pues se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.

c) Falso, ya vimos en la primera cuestión que el recíproco del teorema de Bolzano no es cierto.

d) Cierto, entre dos valores negativos puede haber varios positivos y al cambiar de signo y ser continua haber varios puntos en que se cumpla el teorema de Bolzano.

e) Cierto, por el teorema de los valores intermedios: es continua en [1, 5], f(1) = -2 y f(5) = 3, luego la función tomará todos los valores intermedios entre -1 y 3 para algún valor de x comprendido entre [1,5], y por tanto tomará el valor 2'5 (intermedio entre -1 y 3) para algún c que pertenezca a [1, 5].

f) Cierto, según nos dice el teorema de Weierstrass al ser continua en [1, 2] alcanza su máximo y su mínimo absoluto en ese intervalo y por tanto está acotada.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧