❶ Calcula los siguientes límites mediante tablas de valores :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x-5}$

x+	f (x)
0,1	0,183673469
0,01	0,198396794
0,001	0,199839968
0,0001	0,199984000
0,00001	0,199998400
x-	**f (x)**
-0,1	0,215686275
-0,01	0,201596806
-0,01	0,201596806
-0,001	0,200159968
-0,0001	0,200016000
-0,00001	0,200001600

De la observación de la parte superior se deduce que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x-5} = 0'2$

De la observación de la parte inferior de la tabla se deduce : $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x-5} = 0'2$

Luego el límite buscado es 0'2

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$

x+	f (x)
-1,9	-3,900000000
-1,99	-3,990000000
-1,999	-3,999000000
-1,9999	-3,999900000
-1,99999	-3,999990000
x-	**f (x)**
-2,1	-4,100000000
-2,01	-4,010000000
-2,001	-4,001000000
-2,0001	-4,000100000
-2,00001	-4,000010000
-2,000001	-4,000001000

De la observación de la tabla se deduce :

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} f(x) = -4$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❷ Sea :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los límites laterales en los puntos de abscisa x = 1 y x = 3, mediante tablas de valores. - ¿ Existe el límite en x = 1 ? ¿ y en x = 3 ?

---ooOoo---

❆ En x = 1

Calculamos los límites laterales en x = 1, mediante tablas, dando valores a izquierda y derecha de x = 1 y teniendo en cuenta que, al ser una función a trozos con división en x = 1, está definida de manera diferente a izquierda $f^-(x) = 2$, y a derecha $f^+(x) = x^2 + 3$:

x-	f (x)
0,9	2
0,99	2
0,999	2
0,9999	2
0,99999	2
x+	**f (x)**
1,1	4,210000000
1,01	4,020100000
1,001	4,002001000
1,0001	4,000200010
1,00001	4,000020000
1,000001	4,000002000

$$\lim_{x\to 1^-} 2 = 2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} (x^2+3) = 4$$

❆ En x = 4

Ahora la función es la misma por la derecha y por la izquierda de 3.

x-	f (x)
2,9	11,410000000
2,99	11,940100000
2,999	11,994001000
2,9999	11,999400010
2,99999	11,999940000
x+	**f (x)**
3,1	12,610000000
3,01	12,060100000
3,001	12,006001000
3,0001	12,000600010
3,00001	12,000060000
3,000001	12,000006000

Luego :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 12 = \lim_{x\to 3} f(x)$$

No existe el límite de la función en x = 1 pues, como se ha visto no coinciden los límites laterales, sin embargo en x = 3 también hemos visto , que los límites laterales son iguales , luego el límite existe y es 12.

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❸ Dadas las funciones :

$f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{2x^3}{x-4}$ y $h(x) = \frac{-x^4+1}{x^2+3}$ calcula mediante tablas de valores adecuadas :

a) $\lim_{x\to 3} f(x)$

x-	f (x)
2,9	-10
2,99	-100
2,999	-1000
2,9999	-10000
2,99999	-100000
x+	**f (x)**
3,1	10
3,01	100
3,001	1000
3,0001	10000
3,00001	100000
3,000001	999999,9999

observando la tabla se deduce :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

b) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

x	f (x)
10	0,142857143
100	0,010309278
1000	0,001003009
10000	0,00010003
100000	0,0000100

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

c) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

x	f (x)
-10	-0,076923077
-100	-0,009708738
-1000	-0,000997009
-10000	-0,000100
-100000	-0,0000100

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

d) $\lim_{x\to \infty} g(x)$

x	f (x)
1	-0,666666667
10	333,3333333
100	20833,33333
1000	2008032,129
10000	200080032

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$$

e) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

x	f (x)
-1	0,4
-10	142,8571429
-100	19230,76923
-1000	1992031,873
-10000	199920032

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$$

f) $\lim_{x\to \infty} h(x)$

x	f (x)
1	0
10	-97,0776699
100	-9997,0008
1000	-999997
10000	-99999997

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$$

g) $\lim_{x\to -\infty} h(x)$

x	f (x)
-1	0
-10	-97,0776699
-100	-9997,0008
-1000	-999997
-10000	-99999997

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❹ Si

$$\lim_{x\to -1} f(x)=2 \text{ y } \lim_{x\to -1} g(x)=7$$

calcula aplicando las propiedades adecuadas :

a) $\lim_{x\to -1}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to -1} g(x) =$

$= 2+7=9$

b) $\lim_{x\to -1}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to -1} f(x)-\lim_{x\to -1} g(x) =$

$= 2-7=-5$

a) $\lim_{x\to -1} 2\cdot f(x)=2\cdot \lim_{x\to -1} f(x)=2\cdot 2=4$

d) $\lim_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) =$

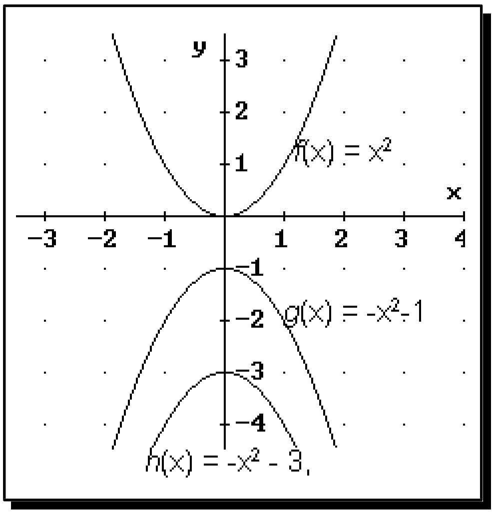
$= 2\cdot 7=14$

e) $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to -1} f(x)}{\lim_{x\to -1} g(x)} = \frac{2}{7}$

f) $\lim_{x\to -1} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to -1} f(x)^{\lim_{x\to -1} g(x)} = 2^7$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❺ Considera las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2-1$ y $h(x) = -x^2 - 3$, cuyas gráficas se dan a continuación.



a) Deduce, a partir de las gráficas, los límites :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

pues al tender la x a infinito la función también se hace cada vez mayor.

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=-\infty$$

b) Calcula aplicando la propiedad L4.I, los límites :

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty-\infty \text{ ind.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+h(x)) = +\infty-\infty \text{ Ind.}$$

c) Calcula los límites anteriores efectuando previamente la suma y compara con el apartado b)

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to +\infty}(x^2-x^2-1)=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+h(x)) = \lim_{x\to +\infty}(x^2-x^2-3)=-3$$

En el apartado b) las dos expresiones son la misma pero en el c) dan resultados distintos, eso es lo que quiere decir que una expresión es indeterminada, que en unas ocasiones da un resultado y en otras ocasiones otro diferente

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❻ Calcula los límites :

a)

$$\lim_{x\to 4}(3x^2-5x+2)=3\cdot 4^2-5\cdot 4+2=30$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}(5x^2+3x+2)=5\cdot \infty^2=5\cdot\infty=\infty$$

c)

$$\lim_{x\to -5}\frac{5x^2-6x+7}{4x-1}=\frac{5\cdot(-5)^2-6\cdot(-5)+7}{4\cdot(-5)-1}=\frac{162}{-21}=-\frac{54}{7}$$

d)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2}=\frac{2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2}{2^2-2-2}=\frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-3)}{x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot(2-3)}{2+1}=-\frac{2}{3}$$

e)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{-2}{(-2)^2+4\cdot(-2)+4}=\frac{-2}{0}\Rightarrow \text{Ind.}$$

Hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2+4x+4}=-\infty$$

Pues a la izquierda de -2 x < 0 y $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 > 0$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2+4x+4}=-\infty$$

Pues a la derecha de -2 x < 0 y $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 > 0$

Por tanto

$$\lim_{x\to -2}\frac{x}{x^2+4x+4}=-\infty$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+3x-5}{4x^2+x+1}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{Ind}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+3x-5}{4x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+3/x-5/x^2}{4+1/x+1/x^2}=\frac{8+3/\infty-5/\infty}{4+1/\infty+1/\infty}=\frac{8}{4}=2$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❼ Sea la función definida a trozos :

$$f(x)=\begin{cases}-x & x\in[1,3]\\ 2x-9 & x\notin[1,3]\end{cases}$$

Calcula los límites :

a)

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x=1 \text{ pues } 1\in[1,3]$$

b)

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}x=1 \text{ pues } 3\in[1,3]$$

c)

$$\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 1}2x-9=2\cdot 1-9=-7$$

ya que 5 ∉ [1,3]

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❽ Calcula los siguientes límites :

a)

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{2x+1}+x-5)=\sqrt{2\cdot 4+1}+4-5=2$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3x+5)^{x-1}=\lim_{x\to 0}(x^2+3x+5)^{\lim_{x\to 0}(x-1)}=$$

$$=5^{-1}=\frac{1}{5}$$

c)

$$\lim_{x\to 2}(3x-4)\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to 2}(3x-4)\cdot\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+1}$$

$$=(3\cdot 2-4)\sqrt{2^2+1}=2\sqrt{5}$$

d)

$$\lim_{x\to 11}\frac{\sqrt[3]{x-4}}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 11}\sqrt[3]{x-4}}{\lim_{x\to 11}(x+1)}=\frac{\sqrt[3]{11-4}}{11+1}=\frac{\sqrt[3]{7}}{12}$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}((x+4)\cdot(-x^2-5x+2))=$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-4)\cdot\lim_{x\to\infty}(-x^2-5x+2=\infty\cdot(-\infty)=-\infty$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^2+x)^{-3}=\left(\lim_{x\to\infty}(5x^2+x)\right)^{-3}=\infty^{-3}=\frac{1}{\infty^3}=\frac{1}{\infty}=0$$

g)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3+6x}\right)^{-1} = \left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3+6x}\right)\right)^{-1} =$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2/x^3-1/x^3}{5x^3/x^3+6x/x^3}\right)\right)^{-1} = \left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1/x-1/x^2}{5+6/x^2}\right)\right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{\infty}}{5+\frac{1}{\infty}}\right)^{-1} = 0^{-1} = \frac{1}{0} \text{ ind.}$$

Para resolver la indeterminación vemos si tiende la función a infinito o manos infinito al tender x a menos infinito :

x	*f* (x)
-1	0
-10	-0,019565217
-100	-0,00199956
-1000	-0,0002
-10000	-0,0000200

luego :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3+6x}\right)^{-1} = -\infty$$

h)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x-6}{-4}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x-6}{-4}\right)^{\lim\limits_{x\to-\infty} x} = \left(\frac{-\infty}{-4}\right)^{-\infty}$$

$$\infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❾ Calcula los siguientes límites :

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5+4}{x^2-3} - \frac{x^3+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+4}{x^2-3} - \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5/x^5+4/x^5}{x^2/x^5-3/x^5} - \lim_{x\to\infty}\frac{x^3/x^3+1/x^3}{x^2/x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x^5}{1/x^3-3/x^3} - \lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^3}{1/x} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} - \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} =$$

$$\frac{1+0}{0} - \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ ind.}$$

Para resolver la indeterminación hacemos la diferencia :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^5+4)-(x^2-3)(x^3+1)}{x^2(x^2-3)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+4x^2-x^5-x^2+3x^3+3}{x^4-3x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}$$

Para resolver este tipo de indeterminaciones dividimos numerador y denominador por x elevado al mayor exponente :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+3/x^5-1/x^2+3/x^4+3/x^7}{1/x^3-3/x^5} = \frac{1+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{0}$$

Ahora para esta indeterminación vemos a qué tiende la función al tender x a infinito :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+4x^2-x^5-x^2+3x^3+3}{x^4-3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^7}{x^4} = \lim_{x\to\infty}x^3 = +\infty$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2+1}\cdot\frac{x^2-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x/x^2}{x^2/x^2+1/x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2-1/x^2}{x/x^2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4/x}{1+1/x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^2}{1/x} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}\cdot\frac{1-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = 0\cdot\infty$$

Esta indeterminación se resuelve haciendo el producto :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x(x^2-1)}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2/x^2-4/x^2}{x^2/x^2+1/x^2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4-4/x^2}{1+1/x^2} = \frac{4-\frac{4}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{x^2} : \frac{-2x+6}{2x^3+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2} : \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+6}{2x^3+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x/x^2+5/x^2}{x^2/x^2} : \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x/x^3+6/x^3}{2x^3/x^3+1/x^3} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1/x+5/x^2}{1} : \lim_{x\to-\infty}\frac{-2/x^2+6/x^3}{2+1/x^3} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

Para resolver esta indeterminación realizamos el cociente y simplificamos :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(x+5)(2x^3+1)}{x^2(-2x+6)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4+10x^3+x+5}{-2x^3+6x^2}=\frac{\infty}{\infty}\text{ ind.}$$

Indeterminación que resolvemos dividiendo numerador y denominador por x^4 :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2+10/x+1/x^3+5/x^4}{-2/x+6/x^2}=\frac{2+\frac{10}{-\infty}+\frac{1}{-\infty}+\frac{5}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+\frac{6}{\infty}}=\frac{2}{0}\text{ ind}$$

Esta indeterminación se resuelve mediante tabla o estudiando el signo de los términos de mayor grado :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4+10x^3+x+5}{-2x^3+6x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4}{-2x^3}=+\infty$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}\right)^{3x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}3x+5}=1^{\infty}\text{ ind.}$$

Ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2+3/x^2}{x^2/x^2-x/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x+5)=\infty$$

Para resolver la indeterminación obtenida aplicamos la fórmula :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty\end{matrix}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}-1\right)\cdot(3x+5)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+14x+15}{x^2-x}=3$$

luego :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}\right)^{3x+5}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}-1\right)\cdot(3x+5)}=e^3$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)^{\frac{5x}{6}}=1^{\infty}\text{ ind., ya que}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)=1\text{ y }\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{6}=\infty$$

Aplicamos la fórmula :

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{5x}{6}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15x}{6x^2}}=e^0=1$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^{-2x}=1^{-\infty}\text{ Ind. ya que}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2+3x/x^2+2/x^2}{x^2/x^2+1/x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1}=1\text{ y}$$

$$\lim_{x\to\infty}-2x=-\infty$$

Para resolver la indeterminación aplicamos la fórmula :

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x^2-2x}{x^2+1}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$$

puesto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=-6$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❿ Halla las asíntotas de las funciones :

a) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

● *Verticales*

Como es una función de tipo racional las asíntotas verticales estarán en los valores que anulan el denominador: x + 2 = 0 , **x = -2**, pues :

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x+1}{x+2}=\infty$$

La recta x = -2 es la asíntota vertical.

● *Horizontal*

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x+2}=3$$

La recta y = 3 es la asíntota vertical.

● *Oblicua*

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{x^2+1}=0\text{, no tiene.}$$

b) $g(x)=\frac{x^3+4x^2}{x^2+1}$

☐ *Verticales.*

Función de tipo racional, las asíntotas verticales serán los valores que anules el denominador:

$x^2+1\neq 0 \Rightarrow$ no tiene.

☐ *Horizontales*

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3/x^3+4x^2/x^3}{x^2/x^3+1/x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+4/x}{1/x+1/x^3}=\pm\infty\Rightarrow \text{No tiene.}$$

☐ *Oblicuas*

① Rectas de la forma $y = mx + n$, en donde :

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+4x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4x^2}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3/x^3+4x^2/x^3}{x^3/x^3+x/x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+4/x}{1+1/x^2}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4x^2}{x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-1/x}{1+1/x^2}=4$$

Asíntota oblicua **y = x + 4** .

② Cuando es de tipo racional f(x) / g(x), si realizamos el cociente de polinomios y f(x) = g(x) · c(x) + r(x) en donde c(x) es el polinomio cociente y r(x) el polinomio resto, la asíntota será c(x) si el grado de f(x) = grado g(x) + 1:

$$\frac{4x^2-x}{x^2+1}=x+4+\frac{-x-4}{x^2+1}$$

Luego la asíntota oblicua es y = c(x) = **x + 4**

c) $h(x)=e^{-x^2}$

◉ *Verticales.*

No tiene pues no existe ningún x_0 que :

$$\lim_{x\to x_0}e^{-x^2}=\pm\infty$$

◉ *Horizontales.*

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es la recta **y = 0**

◉ *Oblicuas.*

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0$$

luego **no tiene asíntotas oblicuas**.

✧✧✧✱✱◉✱✱✧✧✧

Ejercicios y problemas .- Pág. 112 y sig.

❶ Calcula los límites :

$$\text{a) }\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4+3x-5}{x^4+2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^4}{x^4}+3\frac{x}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+2\frac{x^2}{x^4}+\frac{3}{x^4}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\frac{-1+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$b)\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+3}{-x^3+3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{3}{x^4}}{-\frac{x^3}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{5}{x^4}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{1}{0}\ \text{Ind}\ (\pm\infty)$$

Para resolver la indeterminación hacemos la tabla dando valores a x cada vez mayores y observamos que la función se va haciendo más pequeña o estudiamos el signo :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+3}{-x^3+3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{-x^3}=\lim_{x\to\infty}-x=-\infty$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{x^5-3x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^5}+\frac{x}{x^5}+\frac{6}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}-\frac{3x^2}{x^5}-\frac{5x}{x^5}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1-\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{1/\infty+1/\infty+6/\infty}{1-3/\infty-5/\infty}=\frac{0}{1}=0$$

✧✧✧✷✷⦿✷✷✧✧✧

❷ Calcula el límite :

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)^{\frac{1}{x^3}}=1^{\infty}\ \text{Indeterminado}$$

ya que:

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)=0+0+1=1$$

y

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{0}=\infty$$

Para resolver este tipo de indeterminaciones aplicamos la fórmula :

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)\cdot g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x+1-1)\cdot\frac{1}{x^3}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}}=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$$

✧✧✧✷✷⦿✷✷✧✧✧

❸ Calcula el límite :

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{\frac{5}{x-2}}=1^{\infty}\ \text{Ind.}$$

ya que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)=2^2-3=1$$

y

$$\lim_{x\to 2}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{2-2}=\frac{5}{0}=\infty$$

Para resolver la indeterminación, aplicamos la fórmula.

$$e^{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3-1)\cdot\frac{5}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{5(x^2-4)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}5(x+2)}=$$

$$e^{5(2+2)}=e^{20}$$

✧✧✧✷✷⦿✷✷✧✧✧

❹ En las condiciones del ejemplo anterior, calcula a cuánto asciende la factura de un usuario que consumió 22 m³ .

---oo0oo---

La función, hallada en el ejemplo del libro, es :

$$I(x)=\begin{cases}0'116x+11'6 & \text{Si } 0\le x\le 15\\ 13'34+0'348(x-15) & \text{Si } x>15\end{cases}$$

Para x = 22, habrá que sustituir en el segundo intervalo o trozo :

I(22)= 13’34 + 0’348 · (22 - 15) = **15’776 euros.**

✧✧✧✷✷⦿✷✷✧✧✧

❺ Los costes de fabricación de un determinado artículo se dividen en **costes fijos** y **variables**. Los **fijos** son independientes del número de unidades fabricadas y ascienden a **0,08 millones** de euros. Los **variables** ascienden a **24 euros por cada unidad**.

a) Si x es el número de unidades fabricadas, explica qué expresa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{0'08\cdot 10^6+24x}{x}$$

b) ¿Calcula cuánto cuesta producir cada unidad si se fabrican **2 000** unidades?

c) ¿Cuánto cuesta si se producen **2 millones** de unidades?

d) ¿A qué valor se acerca f(x) si el número de unidades fabricadas pudiera **crecer indefinidamente**?

e) Dibuja la gráfica de la función f.

---oo0oo---

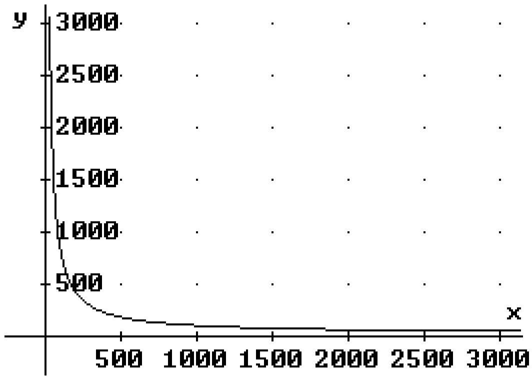
a) Expresa el coste por unidad.

b) $f(2000)=\frac{0'08\cdot 10^6+24\cdot 2000}{2000}=64\,eu.$

c)
$f(2\cdot 10^6)=\frac{0'08\cdot 10^6+24\cdot 2\cdot 10^6}{2\cdot 10^6}=24'04$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{0'08\cdot 10^6+24x}{x}=24$ euros.

e)



✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

ACTIVIDADES

Cuestiones

❶ ¿Puede existir el límite de una función en un punto en el cual no esté definida? Razona tu respuesta.

Sí, pues en la definición de límite en un punto no influye el valor de la función en ese punto.

Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & x<1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

Tiene límite en x = 1 (es uno) y no existe para x = 1.

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❷ ¿Puede ocurrir que una función siempre positiva y otra siempre negativa tengan el mismo límite en un punto? En caso afirmativo, da un ejemplo.

---ooOoo---

Sí pero tiene que tender a cero, para que sea a su izquierda negativo y a su derecha positiva (o viceversa).

Por ejemplo: f(x) = - (x + 1)$^2 \le 0\ \forall x\in\Re$ y g(x) = (x +1)$^2 \ge 0\ \forall x\in\Re$ y cumplen :

$$\lim_{x\to -1} f(x)=0=\lim_{x\to -1} g(x)$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❸ ¿Puede ocurrir que dos funciones f y g no tengan límite finito en un punto x = a y que, sin embargo, su cociente c(x) = f(x)/g(x) sí tenga límite finito en dicho punto? En caso afirmativo, da un ejemplo.

---ooOoo---

Sí, pues la indeterminación ∞/∞ al resolverse puede dar un número distinto de infinito.

Por ejemplo :

$$\lim_{x\to\infty} 2x^2-1=\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} x^2+x=\infty$$

pero

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x}=2\ne\infty$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❹ ¿Existen dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=4$? ¿Y tales que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=4$? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, da un ejemplo.

---ooOoo---

La primera condición es de imposible cumplimiento pues la suma de dos infinitos es siempre infinito.

La segunda sí pues ∞–∞ es indeterminado, indeterminación que resuelta puede dar cualquier valor.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 4) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 4 - x^2 + x) = 4$$

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❺ ¿Puede ser la recta x = x_0 una asíntota vertical de una función definida en x_0 ?

---oo0oo---

Sí pero ha de estar definida en x = x_0 en otro intervalo o trozo.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x^3} & \text{Si } x \neq 0 \\ 2 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Tiene una asíntota vertical en x = 0 y está definida en x = 0.

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧

❻ Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones. En caso afirmativo, da un ejemplo:

a) Una función puede tener infinitas asíntotas horizontales.

b) Los polinomios pueden presentar alguna asíntota.

---oo0oo---

a) Cierta, algunas funciones periódicas como tgx, cotgx, secx, tiene infinitas asíntotas verticales.

b) Cierta, con matices:
¿ se puede decir que la función f(x) = 3 tiene una asíntota horizontal en y = 3 pues su límite cuando x tiende a infinito es 3 ?

¿ Se puede decir que las funciones f(x) = mx +n tiene asíntotas oblicuas en y = mx + n, por que cumplen la definición ?

✧✧✧✱✱⦿✱✱✧✧✧