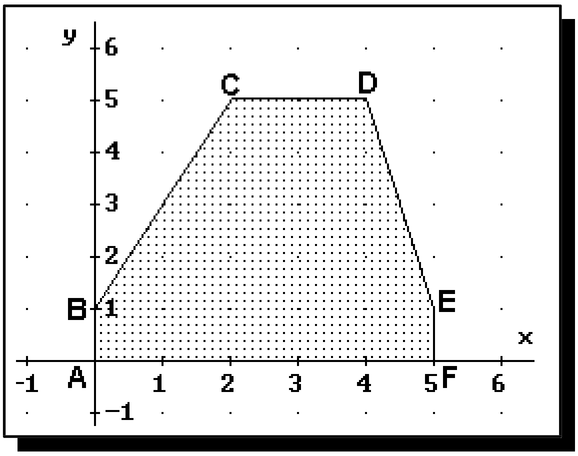
Resolución de Ejercicios y problemas (pág. 86 y sig.)

❶ Determina la región del plano de la figura mediante inecuaciones lineales :



---oo0oo---

❈ Coordenadas de los vértices

A(0, 0) ; B (0, 1) ; C (2, 5) ; D (4, 5) ; E (5, 1) ; F (5, 0)

❈ Ecuaciones de los lados

Usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos :

$$\overline{AB} \rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \rightarrow \frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{0-0} \Rightarrow x = 0$$

$$\overline{BC} \rightarrow \frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} \rightarrow \frac{y-1}{x-0} = \frac{5-1}{2-0} \Rightarrow y-1 = 2x \Rightarrow y = 2x+1$$

$$\overline{CD} \rightarrow \frac{y-y_C}{x-x_C} = \frac{y_D-y_C}{x_D-x_C} \rightarrow \frac{y-5}{x-2} = \frac{5-5}{4-2} \Rightarrow y-5 = 0\cdot(x-2) \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5$$

$$\overline{DE} \rightarrow \frac{y-y_D}{x-x_D} = \frac{y_E-y_D}{x_E-x_D} \rightarrow \frac{y-5}{x-4} = \frac{1-5}{5-4} \Rightarrow y-5 = -4(x-4) \Rightarrow y = -4x+21$$

$$\overline{EF} \rightarrow \frac{y-y_E}{x-x_E} = \frac{y_F-y_E}{x_F-x_E} \rightarrow \frac{y-1}{x-5} = \frac{0-1}{5-5} \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

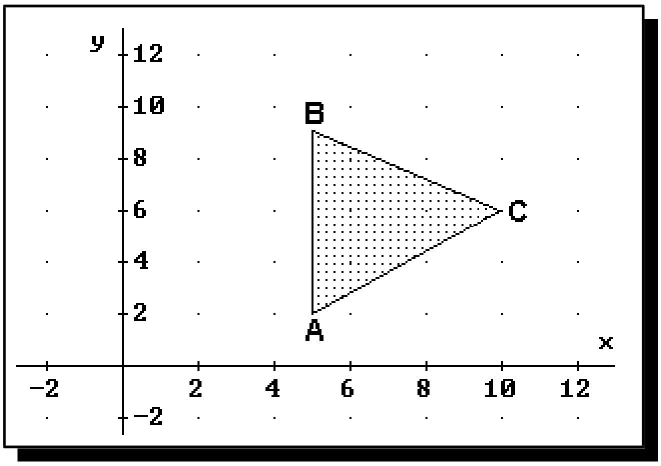
$$\overline{FA} \rightarrow \frac{y-y_F}{x-x_F} = \frac{y_A-y_F}{x_A-x_F} \rightarrow \frac{y-0}{x-5} = \frac{0-0}{0-5} \Rightarrow y = 0$$

❈ Inecuaciones .

$x \geq 0$; $y \leq 2x + 1$; $y \leq 5$; $y \leq -4x + 21$; $x \leq 5$; $y \geq 0$

✧✧✧⊕⊕✡⊕⊕✧✧✧

❷ Determina la región del plano de la figura mediante inecuaciones lineales y el máximo si la función objetivo es $z = x + 5y$.



---oo0oo---

❄ **Coordenadas de los vértices**

A(5, 2) ; B (5, 9) ; C (10, 6)

❄ **Ecuaciones de los lados**

Usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos :

$$\overline{AB} \to \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \to \frac{y-2}{x-5} = \frac{9-2}{5-5} \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$\overline{BC} \to \frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} \to \frac{y-9}{x-5} = \frac{6-9}{10-5} \Rightarrow 5\cdot(y-9) = -3\cdot(x-5) \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x+12$$

$$\overline{CA} \to \frac{y-y_C}{x-x_C} = \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C} \to \frac{y-6}{x-10} = \frac{2-6}{5-10} \Rightarrow y-6 = \frac{4}{5}\cdot(x-10) \Rightarrow y = \frac{4}{5}x-2$$

❄ **Inecuaciones .**

$x \geq 5$; $y \leq -3x/5 + 12$; $y \geq 4x/5 -2$

❄ **Máximo de la función objetivo.**

Vértices	z = x + 5y
A (5, 2)	z(5, 2) = 5 + 5·2 = 15
B (5, 9)	z(5, 9) = 5 + 5·9 = **50 Máximo**
C (10 , 6)	z(10, 6) = 10 + 5·6 = 40

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❸ Una empresa quiere producir una aleación metálica cuya composición en masa es de un **40**% del metal **A** y un **60** % del metal **B**. Dispone de dos minerales, **MI y MII**, compuestos únicamente por **A** y **B**, y que contienen, respectivamente, un **10** % de **A** y un **40** % de **A**. El coste del mineral **MI** es de **1000** euros la tonelada y el del mineral **MII** es de **1200** euros la tonelada. Si para fabricar la aleación la empresa quiere utilizar **como mucho** un **50** % del mineral **MII**, determina la proporción de los dos minerales para que el **coste** de la aleación sea **mínimo**.

---oo0oo---

Datos e incógnitas

Mineral	Peso (t)	A	B	Coste : C(x, y)
MI	x	10 %	90 %	1 000
MII	y	40 %	60 %	2 000

Restricciones y función objetivo.

⦿ La aleación debe contener un 40 % de A ≡ $10x + 40y \geq 40(x+y)$; $30x \leq 0$. lo que implica que la cantidad de MI debe ser nula o negativa lo que no es posible, la primera posibilidad contradice la restricción que dice que como mucho ha de haber un 50 %. La segunda posibilidad es físicamente imposible.

De otra forma, se ve en la tabla que para conseguir un 40 % de A, hay que utilizar solamente el MII lo que contradice la restricción citada . **No tiene solución.**

Podíamos hallar la región factible y comprobar que está vacía.

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❹ El abono *Compost-1* se obtiene al añadir a un sustrato un **10** % de un fertilizante de nitrógeno, *Nitro*, y un **5**% de un fertilizante de fósforo, *Fósfor*. El abono *Compost-2* se obtiene al añadir al mismo sustrato un **7** % de *Nitro*, y un **8** % de *Fósfor*. La empresa fabricante de los abonos dispone en este momento de **3900** kg de *Nitro*, y de **2400** kg de *Fósfor*. Sabe, además, que por cada kilogramo de *Compost-1* obtendrá un **beneficio** de **1** euro y por cada kilogramo de *Compost-2* el beneficio será de **80** céntimos de euro. Determina la cantidad de cada tipo de abono que debe fabricar la empresa para **maximizar** su **beneficio**.

---oo0oo---

Incógnitas y datos

Abonos	Peso (kg)	Nitro	Fósfor	Beneficio
Compost-1	x	0’1x	0’05x	x
Compost-2	y	0`07y	0’08y	0‘8y
		≤ 3 900	≤ 2 400	B (x, y)

Restricciones y función objetivo.

⦿ La cantidad de Nitro disponible es de 3 900 kg ≡ $0'1x + 0'07y \leq 3\,900$ ⇨ $\mathbf{10x + 7y \leq 390\,000}$

⦿ La cantidad de Fósfor disponible es de 2 400 kg ≡ $0'05x + 0'08y \leq 2\,400$ ⇨ $\mathbf{5x + 8y \leq 240\,000}$

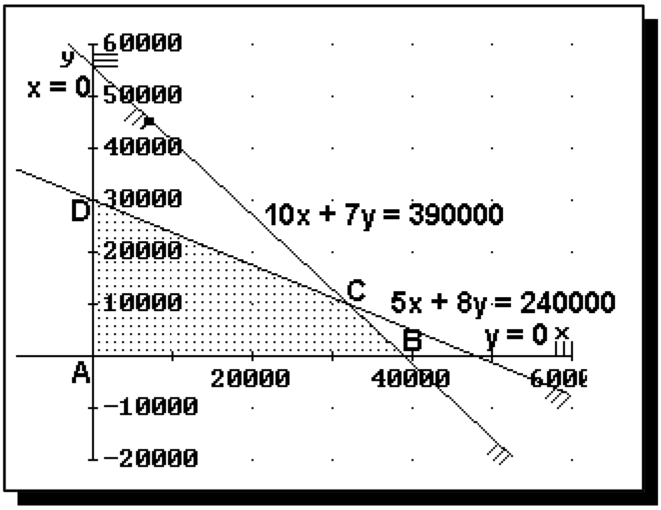
⦿ Las cantidades fabricadas no pueden ser negativas ≡ $\mathbf{x \geq 0 \,;\, y \geq 0}$

Por tanto las restricciones son :

$$\left.\begin{array}{l} 10x+7y \leq 390000 \\ 5x+8y \leq 240000 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

⦿ El objetivo es maximizar el beneficio : B (x, y) = x + 0’8y.

Región factible



Vértices

$$A \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\ (\ 0,\ 0\ )$$

$$B \quad \left.\begin{array}{l} 10x + 7y = 390000 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{390000 - 7y}{10} = 39000 \Rightarrow B\ (\ 39000,\ 0\ )$$

$$C \quad \left.\begin{array}{l} 10x + 7y = 390000 \\ 5x + 8y = 240000 \end{array}\right\} \xrightarrow{} {2F_2 - F_1} \quad \left.\begin{array}{l} 10x + 7y = 390000 \\ 9y = 90000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 32000 \\ y = 10000 \end{array} \quad C\ (\ 320000,\ 10000)$$

$$D \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 5x + 8y = 240000 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{240000}{8} = 30000 \Rightarrow D\ (\ 0\ ,\ 30\ 000\ )$$

Cálculo del máximo (analíticamente)

Vértices	B (x, y) = x + 0’8y
A (0, 0)	B (0, 0) = 0 euros
B (39 000, 0)	B (39 000, 0) = 39 000 euros
C (32 000, 10 000)	B(32000, 10000) = 32000 + 8000 = 40 000 euros. Máx
D (0 , 30 000)	B(0, 30000) = 0 + 24 000 = 24 000 euros

La empresa ha de fabricar **32 t de Compost-1 y 10 t de Compost-2**.

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❺ Una sociedad limitada decide invertir un **millón** de euros en bolsa. Compra acciones de la compañía *Aurea*, que rinden un **7**% anual, y de la compañía la *Argentia*, que rinden un **4** % anual. Los criterios de inversión de la compañía impiden invertir más **de 600 000** euros en *Aurea* y menos de **40 000** euros en *Argentia*. Además, los socios deciden que la inversión en *Aurea*, aunque el interés sea mayor, **no debe ser superior** al **doble** de la inversión en *Argentia*.

Determina cómo debe repartir la sociedad el millón de euros para obtener el **máximo beneficio**.

---oo0oo---

Incógnitas y datos

Compañía	Inversión	Rendimiento
Aurea	x	7 %
Argentia	y	4 %
	1 000 000	B (x , y)

Restricciones y función objetivo.

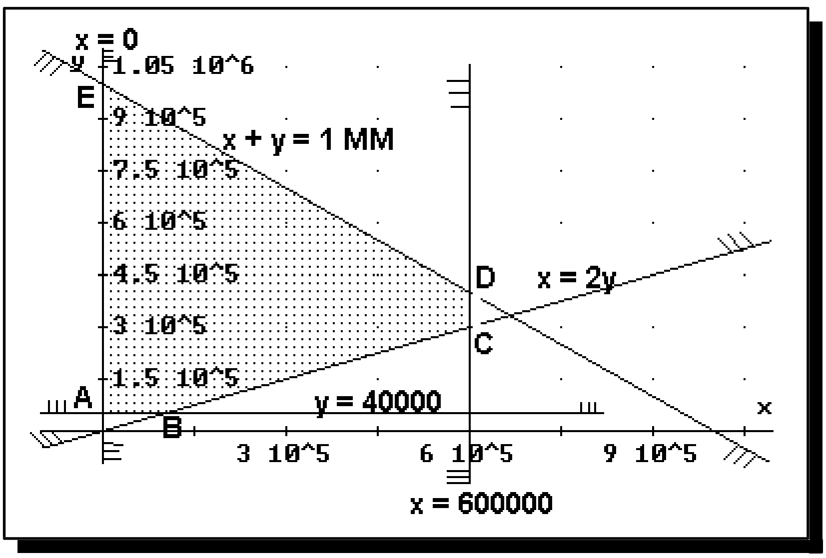
- La cantidad de dinero a invertir de 1 MM ≡ $\mathbf{x + y \le 1\,000\,000}$
- No podemos invertir más de 600 000 en Aurea ni menos de 40 000 en Argentia ≡ $\mathbf{x \le 600\,000}$; $\mathbf{y \ge 40\,000}$
- La inversión en Aurea no debe ser superior al doble de la inversión en Argentia ≡ $\mathbf{x \le 2y}$
- La cantidad invertida en cada compañía no puede ser negativa ≡ $\mathbf{x \ge 0}$; $\mathbf{y \ge 0}$

Por tanto las restricciones son :

$$\left.\begin{array}{ll} x+y & \le 1000000 \\ x & \le 600000 \\ y & \ge 40000 \\ x & \le 2y \\ x \ge 0; & y \ge 0 \end{array}\right\}$$

- El objetivo es maximizar el beneficio : B (x, y) = 0’07x + 0’04y.

Región factible



Vértices

A $\left.\begin{array}{ll} x & =0 \\ y & =40000 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A (0, 40 000)

B $\left.\begin{array}{ll} x-2y & =0 \\ y & =40000 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2\cdot 40000=80000 \Rightarrow$ B (80 000, 40 000)

C $\left.\begin{array}{ll} x & =600000 \\ x & =2y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=600000 \\ y=300000 \end{array}$ C (600 000, 300 000)

D $\left.\begin{array}{ll} x & =600000 \\ x+y & =1000000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1000000-600000=400000 \Rightarrow$ D (600 000 , 400 000)

E $\left.\begin{array}{ll} x & =0 \\ x+y & =1000000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1000000 \Rightarrow$ E (0 , 1000 000)

Cálculo del máximo (analíticamente)

Vértices	B (x, y) = 0'07x + 0'04y
A (0,40 000)	B = 1 600 euros
B (80 000 , 40 000)	B = 7 200 euros
C (600 000, 300 000)	B = 54 000 euros.
D (600 000, 400 000)	B = 58 000 euros Máximo
E (0, 1 000 000)	B = 40 000 euros

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❻ Carlos y Antonia elaboran un trabajo de final de curso que consiste en construir la maqueta de un pueblo. Disponen de una mesa de **7,3** m^2 en la que quieren situar dos tipos de edificios. El **primer tipo** ocupa una superficie de **46** dm^2 y su construcción cuesta **20** céntimos de euro y el **segundo** ocupa una superficie de **14** dm^2 y cuesta **16** céntimos de euro. Si disponen de un total de **3,5** euros, determina el **máximo** número de edificios que pueden colocar en su trabajo.

---oo0oo---

Incógnitas y datos

Edificios	Número	Superficie	Coste
1er Tipo	x	46x	0'2x
2º Tipo	y	14y	0'16y
	f (x, y)	730 dm^2	3'5 euros

Restricciones y función objetivo.

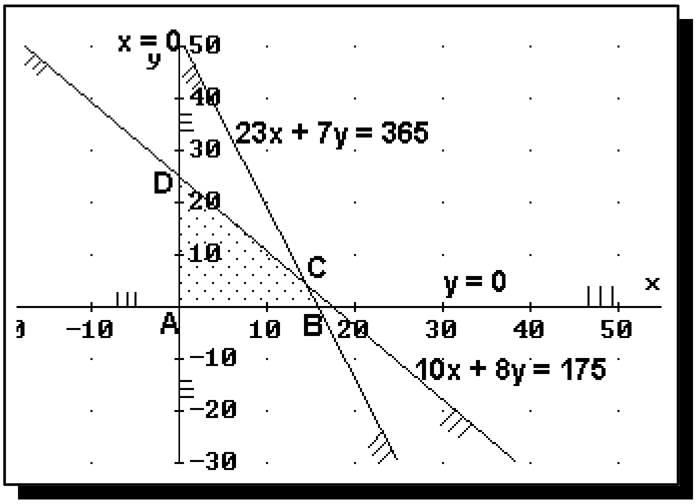
- La cantidad de dinero es de 3'5 euros ≡ **20x + 16y ≤ 350** ⇨ **10x + 8y ≤ 175**
- No podemos usar más de los 73 m^2 de la mesa ≡ **46x + 14y ≤ 730** ⇨**23x+7 y ≤ 365**
- La cantidad de edificios de cada tipo no puede ser negativa ≡ **x ≥ 0 ; y ≥ 0**

Por tanto las restricciones son :

$$\left.\begin{array}{ll} 10x+8y & \le 175 \\ 23x+7y & \le 365 \\ x & \ge 0 \\ y & \ge 0 \end{array}\right\}$$

⦿ El objetivo es maximizar el nº de edificios : f (x, y) = x + y.

Región factible



Vértices

A $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A (0, 0)

B $\left.\begin{array}{ll} 23x+7y & =365 \\ y & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{365}{23}=15'87 \Rightarrow$ B (15’87, 0)

C $\left.\begin{array}{ll} 23x+7y & =365 \\ 10x+8y & =175 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \to \\ 23F_2-10F_1 \end{array} \left.\begin{array}{ll} 23x+7y & =365 \\ 114y & =375 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{365-7y}{23}=14'87 \\ y=\frac{375}{114}=3'29 \end{array}$ C (14’87, 3’29)

D $\left.\begin{array}{ll} x & =0 \\ 10x+8y & =175 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{175}{8}=21'975 \Rightarrow$ D (0 , 21’875)

Cálculo del máximo (analíticamente)

Vértices	f (x, y) = x + y
A (0, 0)	f(0 , 0) = 0 edificios
B (15’87 , 0)	f(15’87 , 0) = 15’87 edificios
C (14’87, 3’29)	f(14’87 , 3’29) = 18’16 edificios
D (0, 21’875)	f(0 , 21’875) = 21’875 edificios

El máximo se halla en el vértice D, pero es un número decimal y el nº de edificios ha de ser un número natural. Es un caso de **programación entera**, tomamos los puntos de la región factible más próximos a la solución obtenida con coordenadas enteras : (0, 21), (1, 20) , (2, 19) , (3, 18), etc. y vemos cuál da el máximo nº de edificios que en nuestro caso es de **21 edificios**.
y hay varias posibilidades de distribución.

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❼ Una peña futbolística prepara el viaje de **130** socios para asistir a un partido. La peña tiene en propiedad **ocho** vehículos de **seis** plazas y otros **ocho** vehículos de **quince** plazas, pero para el día del partido sólo cuentan con **doce conductores**. El viaje de ida y vuelta con un vehículo de seis plazas cuesta **diez** euros, mientras que el mismo recorrido con uno de quince plazas cuesta **diecisiete** euros. Determina cuántos vehículos de cada tipo debe utilizar la peña para que el transporte le resulte lo más económico posible

---oo0oo---

Incógnitas y datos

Vehículos	Número	Plazas	Socios	Conductores	Coste
Seis plazas	x	6	6x	x	10x
15 plazas	y	15	15y	y	17y
	$x \leq 8$; $y \leq 8$		130	12	f(x, y)

Restricciones y función objetivo.

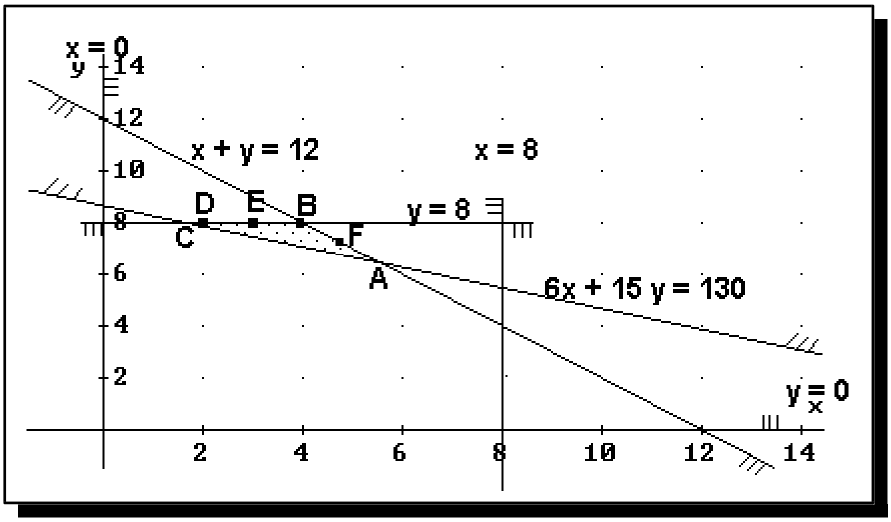
- El nº de socios debe ser al menos todos los de la peña ≡ $\mathbf{6x + 15y \geq 130}$
- Se dispone sólo de 12 conductores ≡ $\mathbf{x + y \leq 12}$
- El nº de tipo de vehículos de cada tipo no puede ser más de 8 ≡ $\mathbf{x \leq 8;\ y \leq 8}$
- El nº de vehículos de cada tipo ha de ser un número natural ≡ $\mathbf{x \geq 0\ ;\ y \geq 0}$

Por tanto las restricciones son :

$$\left.\begin{array}{rl} 6x+15y & \geq 130 \\ x+y & \leq 12 \\ y & \leq 8 \\ x & \leq 8 \\ x\geq 0; & y\geq 0 \end{array}\right\}$$

- El objetivo es minimizar el coste : C (x, y) = 10x + 17y.

Región factible



Vértices de la región factible (triángulo)

A $\left.\begin{array}{l} x+y \quad =12 \\ 6x+15y=130 \end{array}\right\} \xrightarrow{} \left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ 9y \quad =58 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=12-6'\bar{4}=5'\bar{5} \\ y=\frac{58}{9}=6'\bar{4} \end{array}$ A (5'5, 6'4)

F_2-6F_1

B $\left.\begin{array}{l} y \quad =8 \\ x+y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow x=12-8=4 \Rightarrow$ B (4, 8)

C $\left.\begin{array}{l} 6x+15y=130 \\ y \quad =8 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{130-15\cdot 8}{6}=1'\bar{6}$ C (1'66.., 8)

Cálculo del máximo (analíticamente)

Vértices	C (x, y) = 10x + 17y
A (5'5.., 6'4..)	C(5'5.., 6'4..) = 165`1...
B (4 , 8)	C(4, 8) = 176
C (1'6.., 8)	C(1'6.., 8) = 152'6...

Sucede que el mínimo coste se alcanza para un vértice (el C) que no tiene coordenadas enteras y el nº de autobuses de cada tipo ha de serlo, hemos de hallar los costes para los puntos de coordenadas enteras más próximos dentro de la región factibles, esos puntos, señalados en el gráfico son :

D (2, 8) $C(2,8)=10\cdot 2+17\cdot 8=156$
E (3, 8) $C(3,8)=10\cdot 3+17\cdot 8=166$
B (4, 8) $C(4,8)=10\cdot 4+17\cdot 8=176$
F (5, 7) $C(5,7)=10\cdot 5+17\cdot 7=169$

El mínimo coste se consigue con **x = 2 autobuses pequeños e y = 8 autobuses grandes**

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

ACTIVIDADES (pág. 89 y sig.)

Cuestiones

❶ Define inecuación y sistema de inecuaciones Pon un ejemplo de inecuación lineal y un ejemplo de inecuación no lineal. Plantea el enunciado de un problema que pueda resolverse mediante un sistema de inecuaciones y resuélvelo.

---oo0oo--

☒ **Inecuación**

Es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas.

☒ **Sistema de inecuaciones**

Un conjunto de dos o más inecuaciones que han de cumplirse a la vez.

☒ **Ejemplo de inecuaciones**

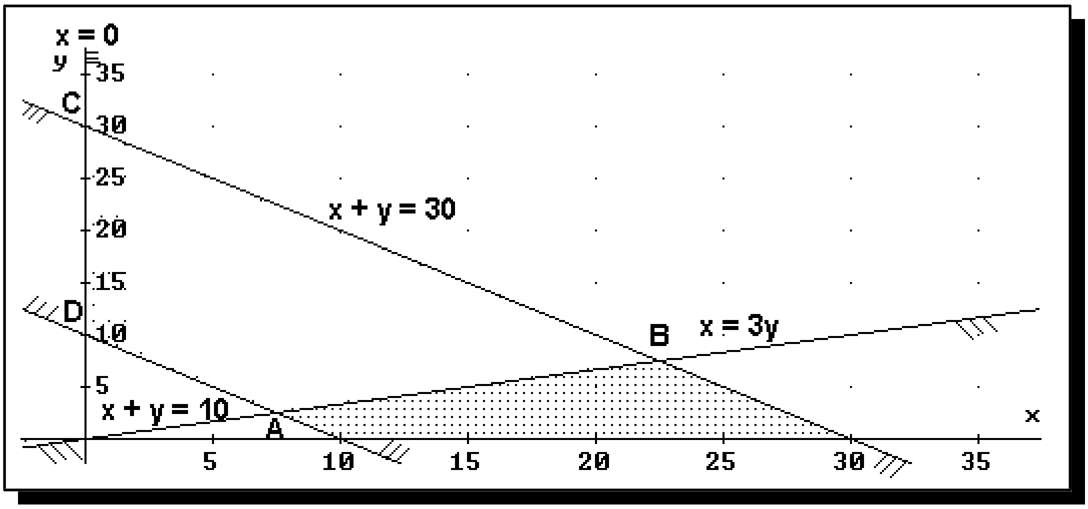
- Lineal : de la forma $ax + by + c \leq$ ó ≥ 0, $3x + 2y < 0$.
- No lineal : alguna de las variables no tiene exponente uno : $x^2 + 3x - 5 > 0$

☒ **Problema**

*Un alumno debe resolver entre **10** y **30** ejercicios, pero para aprobar debe hacer **bien al menos** el **triple** de los que haga **mal**. ¿ Cuales son las posibles soluciones ?*

Sea x = los resueltos bien e y = los resueltos mal.

Las inecuaciones son $x + y \geq 10$; $x + y \leq 30$; $x \geq 3y$, $y \geq 0$, que representadas :



nos proporcionan el conjunto de posibles soluciones, algunas de las cuales son x = 15, y = 2, x = 23 y = 5, etc.

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❷ Explica qué es un problema de programación lineal y describe mediante un ejemplo cómo se resuelve un problema de programación lineal en dos variables. Define los siguientes conceptos: restricción, función objetivo y región factible. Escribe las inecuaciones y la función objetivo de un problema de programación lineal con infinitas soluciones.

---oo0oo--

◈ Es un problema en que hay que optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal de varias variables, sujeta a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales .

◈ Véase cualquiera de los problemas resueltos con anterioridad o posteriormente.

◈ *Restricciones* : Inecuación de condición que debe cumplir la solución óptima.

◈ *Función objetivo* : La función lineal de varias variables a optimizar.

◈ *Región factible* : El conjunto de las posibles (factibles) soluciones a todas las restricciones.

◈ En el ejemplo anterior si la función objetivo hubiese sido f (x , y) = 2x - 6y o cualquiera otra paralela a las rectas que conforman los lados de la región factible.

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❸ Investiga y pon dos ejemplos de ámbitos donde se utiliza la programación lineal.

---oo0oo--

En economía y en comunicaciones (en la 2ª guerra mundial los abastecimientos).

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❹ Indica dos soluciones de las siguientes inecuaciones lineales con dos incógnitas :

a) $\frac{x+2}{3} > 4 - y$ b) $2(x-1) \leq y - 2$

---oo0oo--

Una solución consiste en un par de valores que sustituidos en la inecuación la cumplen.

a) x = 7 e y = 3 ; x = 10 e y = 2.
b) x = 3 e y = 7; x = -1 e y = 3.

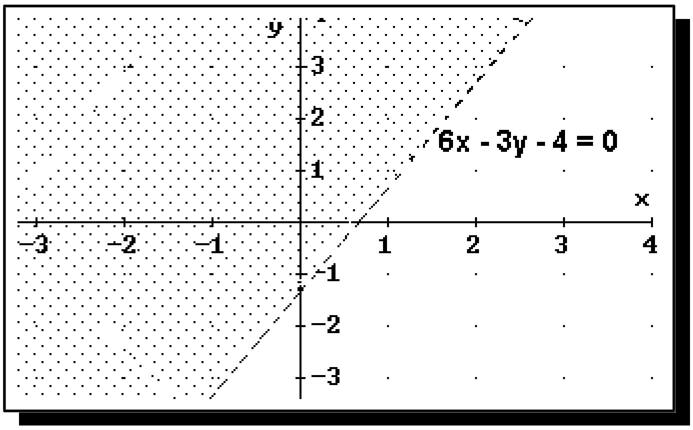
✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❺ Representa las soluciones de las siguientes inecuaciones :

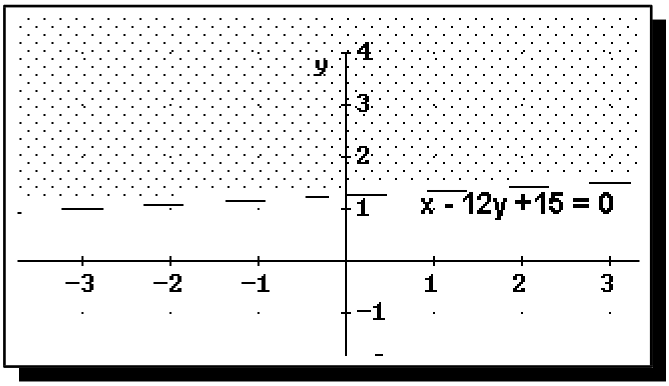
a) $\frac{2x-y}{4} < \frac{3-2x+y}{5} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} 5(2x-y) < 4(3-2x+y) \rightarrow 18x - 9y - 12 < 0 \rightarrow$

6x - 3y - 4 < 0, que representamos (con línea discontinua pues desigualdad estricta) y nos divide el plano en dos regiones o semiplanos. ¿ Cómo sabemos cuál es el semiplano solución ? . Hay varias maneras, la más rápida es dar un punto del plano (el origen siempre que sea posible) y comprobar si cumple la inecuación, en cuyo caso el semiplano al que pertenezca será la solución. Si no es así será el otro semiplano.

En nuestro caso al sustituir queda 6·0 - 3·0 - 4 = - 4 < 0, cumple por tanto la inecuación y su representación es :

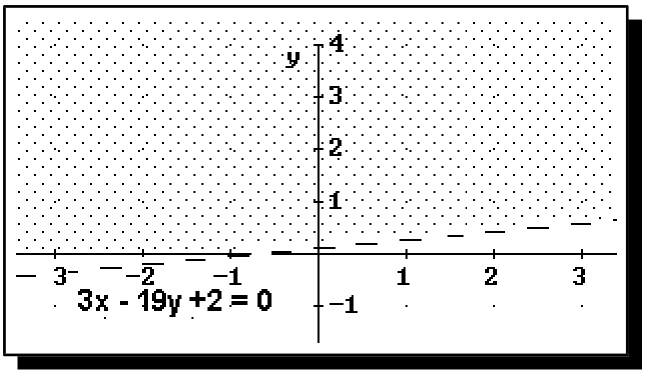


b) $\frac{x-6y}{3} < 2y - 5 \rightarrow x - 12y + 15 < 0$, que representada :



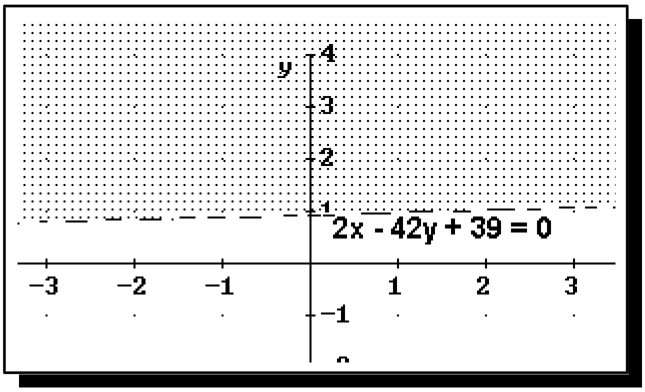
pues 0 - 12·0 + 15 = 15 no es < que cero ⇨ semiplano superior.

c) $\frac{x-3y}{2} - \frac{5y-1}{3} < 0 \rightarrow 3x - 19y + 2 < 0$



ya que 3·0 -19 · + 2 no es menor que cero ⇨ el semiplano superior es la solución.

d) $\frac{2}{3}x - 5(y-2) < 3(3y-1) \rightarrow 2x - 42y + 39 < 0$



puesto que 2·0 - 42·0 + 39 = 39 > 0

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❻ Considera el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x-2y & <5 \\ x+y & \geq -1 \end{array}\right\}$$

Di si los siguientes puntos son solución : **a)** (0, 0) **b)** (-2, -1) **c)** (3, 0) **d)** (2, -2)

---oo0oo--

Para comprobarlo los sustituimos en las inecuaciones que forman el sistema y vemos si las cumplen.

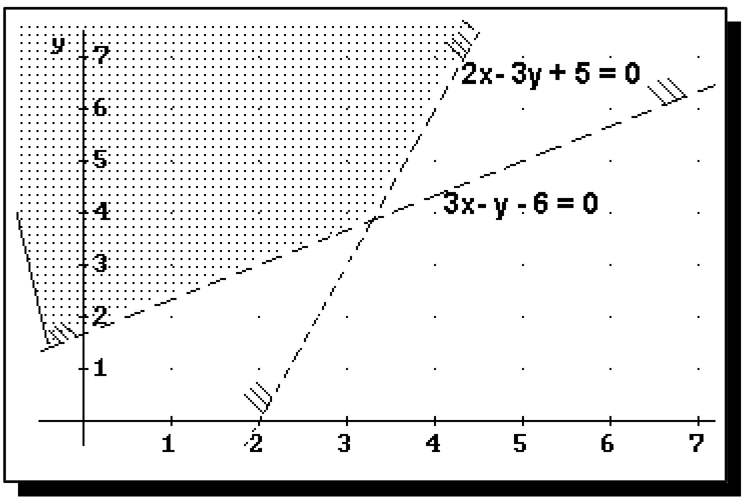
a) $\left.\begin{array}{ll} 3\cdot 0-2\cdot 0 & <5 \\ 0+0 & \geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sí; b) $\left.\begin{array}{ll} 3\cdot(-2)-2\cdot(-1)=-4 & <5 \\ -2-1=-3 & \not\geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No

c) $\left.\begin{array}{ll} 3\cdot 2-2\cdot(-2)=10 & \not< 5 \\ 2-2=0 & \geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No

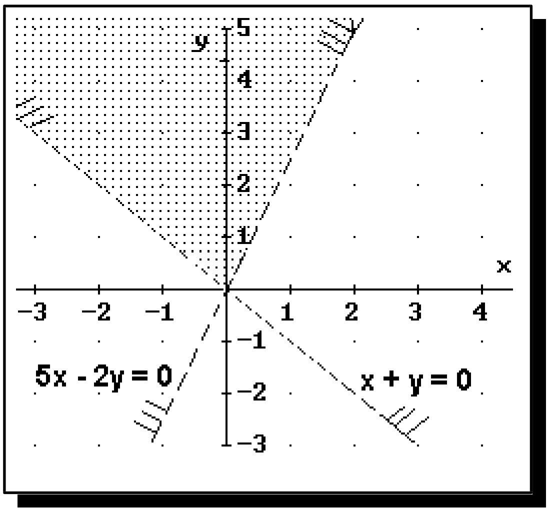
✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❼ Representa las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

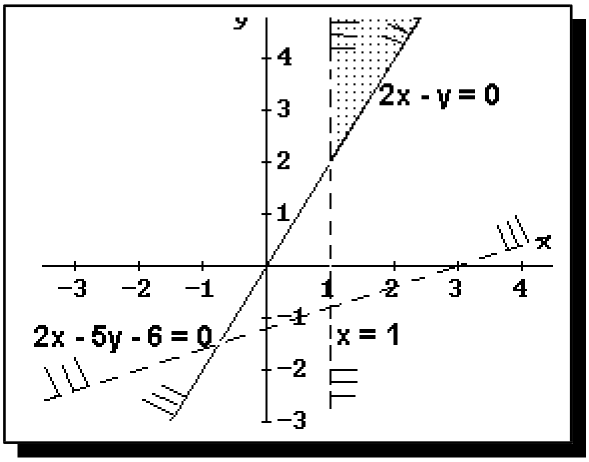
a) $\left.\begin{array}{ll} 2x & <3y-5 \\ 3(x-2) & <y \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} 2x-3y+5 & <0 \\ 3x-y.-6 & <0 \end{array}\right\}$



b) $\left.\begin{array}{ll} \frac{5x-y}{2} & <3x \\ 5(x-1)-2(y-3) & <1 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x+y & >0 \\ 5x-2y & <0 \end{array}\right\}$



c) $\left.\begin{array}{ll} x & >1 \\ 2(x-3) & <5y \\ 2x & \leq y \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x & >1 \\ 2x-5y-6 & <0 \\ 2x-y & \leq 0 \end{array}\right\}$



✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❽ Se sabe que dos hermanos **tienen** como **mínimo** un **año**. Determina sus edades en los siguientes casos:

a) Si la **suma** de sus edades es **menor** que **8** y su **diferencia** es **mayor** que **4**.

b) Si se **llevan 5** años y **entre los dos suman menos** de **16** años.

---oo0oo--

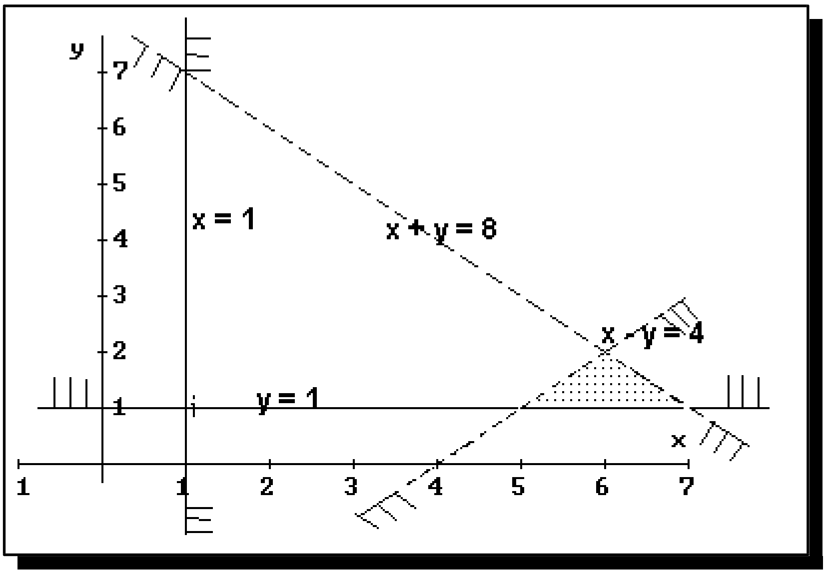
Sean x e y las edades de los hermanos. ; $x \geq 1$, $y \geq 1$

a) ▣ La suma de las edades debe ser menor que 8 $\equiv$ **x + y < 8**.
▣ La diferencia debe ser mayor que 4 $\equiv$ **x - y > 4**

El sistema a resolver es :

$$\left.\begin{array}{ll} x & \geq 1 \\ y & \geq 1 \\ x+y & <8 \\ x-y & >4 \end{array}\right\}$$

Que representamos :



Como ha de ser solución entera sólo existe una el punto (6, 1)

b) ✱ Se llevan 5 años, si x es mayor $\equiv$ **x = 5+ y**

✱ Suman menos de 16 años $\equiv$ **x + y < 16**

El sistema de inecuaciones queda :

Que, como contiene una igualdad, se puede reducir, sustituyendo la variable por su valor, a un sistema con una variable :

$$\left.\begin{array}{ll} x & =y+5 \\ y+5+y & <16 \\ y+5 & \geq 1 \\ y & \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x & =y+5 \\ 2y & <11 \\ y & \geq -4 \\ y & \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x & =y+5 \\ y & <\frac{11}{2} \\ y & >1 \end{array}\right\}$$

Las posibles soluciones, teniendo en cuenta que y debe estar comprendida entre 1 y 11/2 y además ha de ser entera son :

y	1	2	3	4	5
x = y + 5	6	7	8	9	10
Edades	(6, 1)	(7, 2)	(8, 3)	(9 , 4)	(10 , 5)

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❾ Para un viaje de fin de curso un grupo de alumnos recauda entre **356** y **418** euros vendiendo *bocadillos* y *refrescos*. Calcula el dinero que han obtenido proveniente de la venta de *refrescos* si venden el **triple** número de *refrescos* que de *bocadillos* y si el precio de los *bocadillos* es el **mismo** que el de los *refrescos*.

---oo0oo--

Sean : x = dinero recaudado por la venta de bocadillos.
y = dinero recaudado por la venta de refrescos.

⊗ **Inecuaciones**

⊙ Se ha vendido el triple de refrescos que de bocadillos ≡ **y = 3x** , ya que los precios de ambos productos coincides, coincidirá el número de unidades.

⊙ La recaudación se halla entre 356 y 418 euros ≡ $\mathbf{356 \le x + y \le 418}$.

⊗ **Resolución**

$$\left.\begin{matrix} y = 3x \\ 356 \le x+y \le 418 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 3x \\ 356 \le x+3x \le 418 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = 3x \\ 89 \le x \le 104'5 \end{matrix}\right\}$$

Y como nos interesa conocer el valor de la recaudación y = 3x, multiplicamos la inecuación última por tres : 267 ≤ 3x ≤ 313'5 ⇨ 267 ≤ y ≤ 313'5 , que nos dice que **el dinero recaudado por la venta de refrescos está comprendido entre 267 y 313'5 euros.**

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧

❿ Dos espías amigos contrastan sus respectivas claves numéricas de **tres** cifras y observan que la **suma** de ambas es **menor** que **1000** y su **diferencia**, **mayor** que **500**. ¿Es posible que un espía posea la clave 400?

---oo0oo--

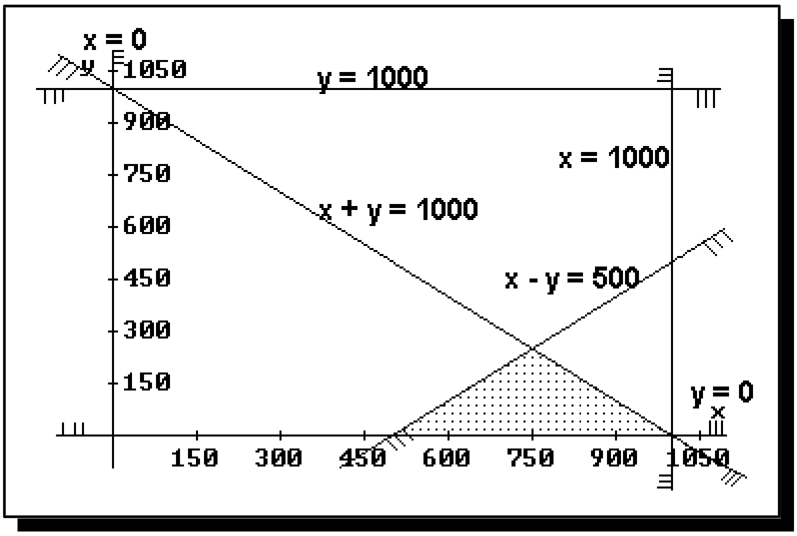
x = clave de uno de los espías.
y = clave del otro espía.

⊡ **Restricciones**

◈ Deben ser números naturales de tres cifras ≡ $0 \le x < 1000$; $0 \le y < 1000$.
◈ La suma ha de ser menor que 1 000 ≡ $x + y < 1\,000$.
◈ La diferencia mayor que 500 ≡ $x - y > 500$.

El sistema queda :

$$\left.\begin{array}{ll} x+y & <1000 \\ x-y & >500 \\ 0\le x & <1000 \\ 0\le y & <1000 \end{array}\right\}$$, que representado :



En donde observamos que en el conjunto de soluciones **no están incluidas ni x = 400 ni y = 400.**

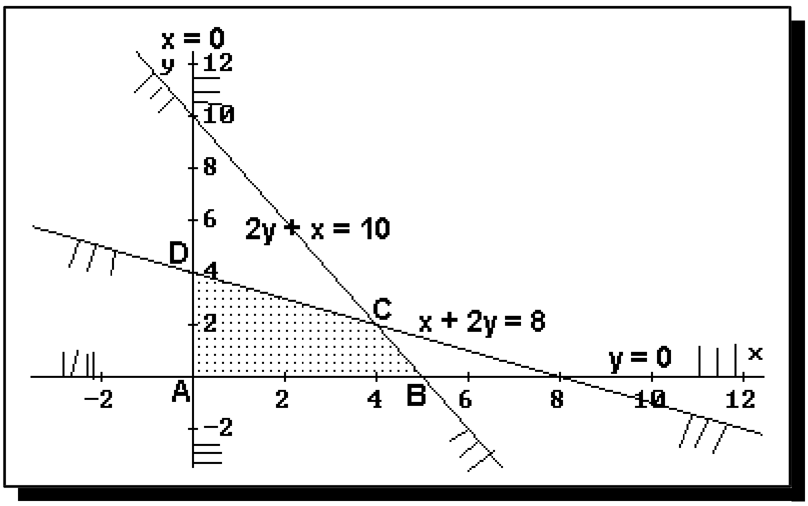
❶❶ Maximiza la función f(x, y) = 2 x + 3 y, atendiendo a las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x+6y & \le 24 \\ 2x+y & \le 10 \\ 0 & \le x \\ 0 & \le y \end{array}\right\}$$

---oo0oo--

⦿ **Región factible** .

Representamos las inecuaciones de restricción y las resolvemos :



⦿ Cálculo de los vértices.

$$A \to \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A\,(0,\,0)$$

$$B \quad \left.\begin{array}{l} 2x+y = 10 \\ y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \frac{10-y}{2} = \frac{10-0}{2} = 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B\,(5,\,0)$$

$$C \quad \left.\begin{array}{l} x+2y = 8 \\ 2x+y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \left.\begin{array}{l} x+2y = 8 \\ -3y = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 8-2y = 8-4 = 4 \\ y = \frac{-6}{-3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow C\,(4,\,2)$$

$$D \quad \left.\begin{array}{l} x+2y = 8 \\ x \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \frac{8-x}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D\,(0\,,\,4)$$

⦿ Máximo de la función objetivo.

Vértices	$f(x, y) = 2x + 3y$
A (0, 0)	$f(0, 0) = 0$
B (5, 0)	$f(5, 0) = 2 \cdot 5 = 10$
C (4, 2)	$f(4, 2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 =$ **14 Máximo**
D (0 , 4)	$f(0, 4) = 3 \cdot 4 = 12$

✧✧✧⌖⌖✡⌖⌖✧✧✧