❶ Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$A=(5);\ B=(-3);\ C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 7 & 9 & -4 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};\ H=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix};\ I=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

~~~ooOoo~~~

$$|A|=|5|=5;\ |B|=|-3|=-3;\ |C|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 3-(-2)\cdot 4=9+8=17$$

$$|D|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-1\cdot 0=-10;\ |E|=\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=(-5)\cdot(-3)-2\cdot 1=15-2=13$$

$$|F|=\begin{vmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 7 & 9 & -4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}=(-5)\cdot 9\cdot(-5)+7\cdot 7\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)\cdot 2-2\cdot 9\cdot(-1)-(-5)\cdot(-4)\cdot 7-(-5)\cdot 7\cdot(-2)=$$

= 225 - 49 +16 + 18 - 140 - 70 = 0

$$|G|=\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=5\cdot 2\cdot 9+2\cdot 0\cdot 0+0\cdot(-7)\cdot(-4)-0\cdot 2\cdot 2-5\cdot 0\cdot(-4)-9\cdot 0\cdot(-7)=90$$

$$|H|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot 4+5\cdot(-1)\cdot(-2)+5\cdot(-1)\cdot(-2)-5\cdot 3\cdot 5-3\cdot(-2)\cdot(-2)-4\cdot(-1)\cdot(-1)=$$

= 36 + 10 + 10 - 75 - 12 - 4 = -35

$$|H|=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0\cdot 2\cdot 6+2\cdot 1\cdot 3+(-2)\cdot(-4)\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot(-2)-0\cdot 3\cdot(-1)-6\cdot 1\cdot(-4)=$$

0 + 6 - 8 + 8 + 0 + 24 = 30

❷ Calcula los determinantes de las matrices :

a) Desarrollando por los adjuntos de la primera fila:
~~~

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 =$$

1·[3·4·2 + 3·1·(-1) + (-1)·(-2)·2 - 3·4·(-1) - 3·2·(-1) - 2·1·(-2)] -2·[2·4·(-1) + 3·1·(-1) + 5 · 2 · (-2) - 5· 4·3 - 2·1·(-2) - (-1)·2·(-1)] + 1 · [2·1·(-1) + 3·1·(-1) + 5·2·3 - 5·3·1 - 2·3·1 - (-1) · (-1)·2] = 1·47 - 2 · (-89) + 1 · 2 = 47 + 178 + 2 =**227**

b) Desarrollando por los adjuntos de la primera columna :

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} - (-7) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-64) + 7 \cdot 36 = -68$$

c) Ahora usamos el método de Gauss :

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \\ F_4 - 3F_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & -8 & -11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{5F_3 - F_2 \\ 5F_4 + 2F_2}]{} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 37 & 55 \\ 0 & 0 & -54 & -65 \end{vmatrix} \xrightarrow[37F_4 + 54F_3]{}$$

$$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{37} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 37 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 565 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{37} \cdot (1 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 565) = \frac{104525}{925} = 113$$

❧❧❧✿✿✿☙☙☙

❸ Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes :

$$a) \begin{vmatrix} yz & x & x^{-1} \\ xz & y & y^{-1} \\ xy & z & z^{-1} \end{vmatrix} = 0, \text{ multiplicamos la } 3^a \text{ columna por xyz} \rightarrow \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & x & yz \\ xz & y & xz \\ xy & z & xy \end{vmatrix} = 0 \text{ para, } x, y, z \neq 0$$

pues tiene dos columnas (1ª y 3ª) iguales.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2)} \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} xyx & x^2 & x^3 \\ xyz & y^2 & y^3 \\ xyz & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{3)} \begin{vmatrix} yx & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} \text{q.e.d.}$$

1) Trasponemos la matriz pues el determinante de una matriz y su traspuesta son iguales.

2) Multiplicamos la primera columna por xyz y dividimos el determinante por xyz (x, y, z ≠ 0) .

3) Dividimos la 1ª fila por x, la 2ª por y y la 3ª por z.

❧❧❧✿✿✿☙☙☙

❹ Calcula los determinantes :

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -6 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 2F_2-5F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4-F_1 \end{array} \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -27 & 9 & -14 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_4 \\ \rightarrow \end{array} -\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \\ 0 & -27 & 9 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3-8F_2 \\ F_4+27F_2 \end{array}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 18 \\ 0 & 0 & -18 & -41 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 11F_4+18F_3 \end{array} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -127 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}\cdot(2\cdot 1\cdot 11\cdot(-127)) = 127$$

$$\text{b)}\begin{vmatrix} t & z & y & x \\ z & z & y & x \\ y & y & y & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{1)} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1 \end{array} \begin{vmatrix} t & z & y & x \\ z-t & 0 & 0 & 0 \\ y-t & y-z & 0 & 0 \\ x-t & x-z & x-y & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{2)} \\ F_4 \leftrightarrow F_1 \end{array} -\begin{vmatrix} x-t & x-z & x-y & 0 \\ z-t & 0 & 0 & 0 \\ y-t & y-z & 0 & 0 \\ t & z & y & x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{2)} \\ F_3 \leftrightarrow F_1 \end{array}$$

1) Vamos aplicar Gauss a la última columna.
2) Al cambiar dos filas el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} y-t & y-z & 0 & 0 \\ z-t & 0 & 0 & 0 \\ x-t & x-z & x-y & 0 \\ t & z & y & x \end{vmatrix} \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \xrightarrow{2)} \end{array} -\begin{vmatrix} z-t & 0 & 0 & 0 \\ y-t & y-z & 0 & 0 \\ x-t & x-z & z-y & 0 \\ t & z & y & x \end{vmatrix} \rightarrow -x\cdot(x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-t) = x\cdot(y-x)\cdot(y-z)\cdot(z-t)$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -3 & -5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2+2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4+4F_1 \\ F_5-5F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & -3 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{A ltener las filas 2 y 4 proporcionales}} = 0$$

❺ Calcula el rango de las matrices :

Usaremos el método de Gauss.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2 \leftrightarrow F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-2F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 5F_3+4F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_4+F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\text{, que tiene 3 filas y columnas no nulas} \Rightarrow Rang(A)=3$$

$$\text{b) } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 9 & 15 \\ 2 & 8 & -1 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3-4F_1 \\ F_4-2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & 29 & -25 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 2F_3+11F_2 \\ F_4-2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 69 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 69F_4-7F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 69 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -656 \end{pmatrix}$$, matriz escalonada de 4 filas y columnas no nulas $\Rightarrow Rang(B) = 4$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & -11 & -7 \\ 2 & -1 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 3F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ F_3 - 4F_2 \\ F_4 + 3F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ F_4 + F_3 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$, matriz escalonada de 4 filas y 5 columnas no nulas $\Rightarrow Rang(C) = 4$

❻ Calcula, si existen, las inversas del ejercicio nº 1.

❆ $A^{-1} = (5)^{-1} = (1/5)$.

❆ $B^{-1} = (-3)^{-1} = (-1/3)$.

❆ C^{-1} , para hallar la inversa usaremos ahora el método de los adjuntos de la traspuesta:

- Determinante de C = $|C| = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 17$
- Traspuesta de C :
  $$C^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Adjunta de la traspuesta :
  $$Adj(C^t) = \begin{pmatrix} |3| & -|4| \\ -|-2| & |3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
- Inversa:
  $$C^{-1} = \frac{1}{|C|} Adj(C^t) = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

❆ Inversa de D = D^{-1}

- Determinante de D : $|D| = 2\cdot(-5) = -10$.
- Traspuesta :
  $$D^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- Adjunta de D^t :

$$Adj(D^t)=\begin{pmatrix} |-5| & -|0| \\ -|1| & |2| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Inversa :

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}Adj(D^t)=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

☸ Inversa de E = E^{-1}

- Determinante de E : |E| = (15 - 2) = 13.
- Traspuesta :

$$E^t=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Adjunta de E^t :

$$Adj(E^t)=\begin{pmatrix} |-3| & -|1| \\ -|2| & |-5| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

- Inversa :

$$E^{-1}=\frac{1}{|E|}Adj(E^t)=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

☸ Inversa de F = F^{-1} :

- Determinante de F = | F | = 0 , luego **F no es inversible**.

☸ Inversa de G = G^{-1} :

- Determinante de G = | G | = 5·2·9 = 90
- Traspuesta :

$$G^t=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

- Adjunta de G^t :

$$Adj(G^t)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 63 & 24 \\ 0 & 45 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

- Inversa :

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|}\mathrm{Adj}(G^t) = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 18 & 63 & 24 \\ 0 & 45 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{4}{15} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

☸ Inversa de H = H^{-1} :

- Determinante de H = | H | = - 35.

- Traspuesta de H :

$$H^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Adjunta de H^t :

$$\mathrm{Adj}(H^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -13 \\ -6 & -13 & 1 \\ -13 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

- Inversa :

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|}\mathrm{Adj}(H^t) = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 8 & -6 & -13 \\ -6 & -13 & 1 \\ -13 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

☸ Inversa de I=I^{-1} :

- Determinante de I= | I|= 30

- Traspuesta de I:

$$I^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Adjunta de I^t :

$$\mathrm{Adj}(I^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Inversa :

$$I^{-1} = \frac{1}{|I|}\mathrm{Adj}(I^t) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 15 & 30 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

❼ Resuelve por el método de la matriz inversa los sistemas :

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x+4y+5z = 1 \\ x+3y+3z = -1 \\ 3x+3y+2z = 2 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{l} x+y+z = 2 \\ x+2y-3z = 8 \\ 2x-2y+2z = -4 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

a) El sistema puede escribirse matricialmente :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ simbólicamente } A\cdot X = B$$

Y, si A es regular, podemos despejar la matriz X : $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $X = A^{-1} \cdot B$, para lo cual necesitamos la inversa de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t) = -\frac{1}{8}Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ 7 & -11 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ 7 & -11 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(-3)\cdot1+7\cdot(-1)+(-3)\cdot2}{8} = -\frac{-16}{8} = 2 \\ -\frac{7\cdot1+(-11)\cdot(-1)+(-1)\cdot2}{8} = -\frac{16}{2} = -2 \\ -\frac{(-6)\cdot1+6\cdot(-1)+2\cdot2}{8} = -\frac{-8}{8} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Hallemos primero la inversa :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Ajd(A^t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Y la matriz X :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -16 \\ -32 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

❽ Clasifica, aplicando el teorema de Rouché - Fröbenius, los siguientes sistemas de ecuaciones :

a) $$\left.\begin{matrix} x+2y=1 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \to matriz \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Filas no nulas = F= 2} \\ \text{Columnas no nulas = C = 2} \end{matrix} \Rightarrow \text{Rang(M) = 2}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F=2 \\ C=3 \end{matrix} \Rightarrow \text{Rang}(M^*) = 2$$

Si **Rang(M) = Rang(M*) = 2 = Nº de incógnitas = n ⇨ S. Compatible y determinado.**

b) $$\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ -x+y=-1 \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Rang(M) = 1} \\ \text{Rang(M*) = 1} \end{matrix}$$

Como Rang(M) = rang(M*) = 1 < 2 = n ⇨S. Compatible e indeterminado uniparamétrico.

c) $$\left.\begin{matrix} 2x-y+3z=-3 \\ x+y+z=0 \\ 2x+5y+z=3 \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & -3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & -3 \\ 2 & 5 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rang(M) = 2} \\ \text{rang(M*) = 2} \\ n=3 \end{matrix}$$

Por ser rang(M) = rang(M*) = 2 sistema **compatible** y al ser n = 3 > rangos **indeterminado uniparamétrico**.

d) $$\left.\begin{matrix} -x+y-z=-1 \\ 5x+y+2z=-3 \\ 4x+2y+z=0 \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 5 & 1 & 2 & | & -3 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2+5F_1 \\ F_3+4F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -3 & | & -8 \\ 0 & 6 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 6 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rang(M) = 2} \\ \text{rang(M*) = 3 como rang(M)} \neq \text{rang(M*)} \Rightarrow \text{S. Incompatible.} \\ n=3 \end{matrix}$$

e) $\left.\begin{array}{l} -x+y-z \quad =1 \\ 5x+y+2z=-3 \\ 4x+2y+z \;=0 \\ \;\;3x+3y \quad =-1 \end{array}\right\}$, es el sistema del apartado anterior al que se le ha añadido un ecuación, la 4ª y última , luego sigue siendo incompatible.

f) $\left.\begin{array}{l} 2x+y+2z \;=1 \\ x+2y+z \;=-1 \\ x-y-z \quad =4 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{rang(M)} = 3 \\ \text{rang(M*)} = 3 \\ n=3 \end{array} \Rightarrow$ S. compatible y determinado.

ଔଔଔ❀❀❀ঌঌঌ

❾ Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los sistemas del ejercicio nº 7.

---oo0oo---

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+4y+5z \;=1 \\ x+3y+3z \;=-1 \\ 3x+3y+2z \;=2 \end{array}\right\}$

Hallemos primero el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|\,\text{M}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x = \frac{1}{|\,\text{M}\,|}\Delta_1 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\cdot(-16) = 2$$

En donde Δ_1 representa el determinante de la matriz formada al sustituir la columna de la primera incógnita (x) por la columna de los términos independientes.

$$z = \frac{1}{|\,\text{M}\,|}\Delta_3 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\cdot(-8) = 1$$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z \quad =2 \\ x+2y-3z \;=8 \\ 2x-2y+2z=-4 \end{array}\right\}$

$$|\,\text{M}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

$$y=\frac{1}{|M|}\Delta_2=-\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 8 & -3\\ 2 & -4 & 2\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}\cdot(-32)=2$$

$$z=\frac{1}{|M|}\Delta_3=-\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 8\\ 2 & -2 & -4\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}\cdot 16=-1$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 65 y sig..)

❶ Determina, según los valores de **a** , el rango de la matriz **A**

$$:\begin{pmatrix}a & 1 & -1 & -1\\ 1 & -a & 1 & 2\\ 1 & 1 & a & 1\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Usaremos determinantes:

◎ El rang(A) ≥ 1 pues hay menores de orden 1 distintos de cero.

◎ El menor $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2-(-1)\cdot 1=-2+1=-1\neq 0 \Rightarrow \text{rang(A)}\geq 2$

◎ Si orlamos el menor de grado dos anterior se forman dos menores de grado 3 :

Que se anulan :

♦ a^2 -3a = 0 ; a(a - 3) = 0 ; a = 0 y a = 3
♦ $-2a^2$ = 0 ; a = 0.
Luego hay dos posibilidades :

❍ a = 0 ⇨ rang (A) = 2

❍ a ≠ 0 ⇨ rang(A) = 3

❷ Averigua para qué valores de *m* las matrices **A** y **B** no tiene inversa .

$$A=\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 1 & m & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}m & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Para que una matriz sea regular su determinante ha de ser no nulo. Estudiemos los valores que anulan los determinantes de las matrices y serán los valores para los cuales no tienen inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2+2m;\ m^2+2m=0;\ m(m+2)=0;\ m=0 \text{ y } m=-2.$$

luego A tiene inversa para $m \notin \{0, 2\}$

$$|B| = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ desarrollado por la } 2^a \text{ fila } = -1\cdot\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-1\cdot(1+1-m-1)+1\cdot(1-m-1) = -1+m-m = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(B) = 3\ \forall m$$

❸ Discute los sistemas siguientes por el criterio de Rouché - Fröbenius y halla la solución, por el método de Cramer en los casos incompatibles e indeterminados:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{array}{l} -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+ky-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & k+3 & -4 \end{array}\right)$$

1) Véase el ejercicio Nº 1 del apartado **RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS**
del tema anterior.

Dependiendo de que k + 3 = ó ≠ 0, es decir k = ó ≠-3, hay dos posibilidades :

- Si **k = -3** ⇨ rang(M) = 2 y rang(M*) = 3 ⇨ **S. Incompatible**.
- Si **k ≠ -3** ⇨ rang(M) = 3 y rang(M*) = 3 = n = 3 ⇨ **S. compatible y determinado.**

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{l} kx+y+z=k \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right) \xrightarrow{1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

y resolviendo la ecuación $k^2 + k - 2 = 0$, k = -2 y k = 1, luego :

$$-\text{ Si } k=-2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{rang(M)}=2 \\ \text{rang(M*)}=3 \\ S.I. \end{array}$$

$$-\text{ Si } k=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{rang(M)}=1 \\ \text{rang(M*)}=1 \\ n=3 \end{array} \Rightarrow S.C.I.\ Biparamétrico.$$

La ecuación que queda es x + y +z = 1 , las soluciones son : y = λ, z = μ x = 1- λ - μ.

− Si k ≠ –2 y k ≠ 1 ⇒rang(M) = 3 = rang(M*) = n ⇒ *S.C.D.*

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z = k+2 \\ x-ky+z = 1 \\ kx+y+z = 4 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k-1 & 0 & -1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 2-k \end{array}\right)$

− Si k = 1 ⇒ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ⇒ rang(M)= 2, rang(M*) = 3 ⇒S. I.

− Si k ≠ 1 ⇒ rang(M) = 3 = rang(M*)= n ⇒ *S.C.D.*

ACTIVIDADES (pág. 67 y sig.)

Cuestiones.

❶ Dadas las matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

comprueba que | A · B | = | A | · | B | .

○ Hallamos A · B :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+3\cdot 2 \\ 0\cdot 4+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 5+(-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

○ Hallamos | A · B | :

$$| A \cdot B | = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - 2\cdot 11 = -26$$

○ Hallamos |A| y |B| :

$$| A | = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 3\cdot 0 = -2, \; | B | = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 5\cdot(-1) = 13$$

○ Hallamos | A | · | B | y comprobamos :

$$|A|\cdot |B| = -2\cdot 13 = -26 = | A \cdot B | \text{ q.e.d.}$$

❷ Utiliza el resultado de la cuestión anterior para responder razonadamente a las siguientes cuestiones :

a) ¿ $C^2 = C \Rightarrow |C| = 0$ ó $|C| = 1$?

Si se cumple $C^2 = C$ tomando determinantes $|C^2| = |C|$, pero $|C^2| = |C\cdot C| = |C|\cdot|C| = |C|^2$, sustituyendo $|C|^2 = |C|$, es decir $|C|^2 - |C| = 0$ y extrayendo factor común $|C|(|C| -1) = 0 \Rightarrow |C| = 0$ ó $|C| -1 = 0$, $|C| = 1$ q.e.d.

b) ¿ $C \cdot C^t = I \Rightarrow |C| = 1$ ó $|C| = -1$?

Si $C \cdot C^t = I$, tomando determinantes $|C\cdot C^t| = |I|$, por otro lado $|C\cdot C^t| = |C| \cdot |C^t| = |C| \cdot |C|$ { pues el determinante de una matriz y su traspuesta coinciden } $= |C|^2$ y como $|I| = 1$, queda que $|C|^2 = 1 \Rightarrow |C| = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, es decir $|C| = 1$ ó $|C| = -1$ q.e.d.

c) ¿ Qué relación existe entre $|C|$ y $|C^{-1}|$?

Partimos de la definición de matriz inversa : $C \cdot C^{-1} = I$ y tomando determinantes : $|C \cdot C^{-1}| = |I|$, pero $|C \cdot C^{-1}| = |C| \cdot |C^{-1}|$ y $|I| = 1$, luego $|C| \cdot |C^{-1}| = 1$ y $|C^{-1}| = 1/|C|$.

❸ Si **A** es una matriz cuadrada de orden n, ¿ la siguiente equivalencia es cierta o falsa ?:

A es **invertible** $\Leftrightarrow$ **rang** (**A**) = **n**.

Si A es invertible se cumple que $|A| \neq 0$ y por tanto hay un menor no nulo de orden n (el de A) $\Rightarrow$ rang(A) = n. (q. e. d.)

❹ En una matriz efectuamos las siguientes transformaciones: $F_1 \leftrightarrow F_3$; $F_2 \to 3F_2$; $F_3 \to F_3 + 2F_1$. ¿ Qué relación existe entre el determinante de la nueva matriz y el determinante de A ?.

$$|A| \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} -|A| \xrightarrow{F_2 \to 3F_2} -3|A| \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_1} -3|A|$$

Es decir:
- Al intercambiar filas el determinante cambia de signo.
- Al multiplicar una fila por 3 el determinante queda multiplicado por 3.
- Al sustituir una fila por una combinación lineal el determinante no cambia.

Ejercicios y problemas.

❺ Calcula los siguientes determinantes de orden 2 :

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 0\cdot(-3) = 2$$

$$b)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-2) - 1\cdot 2 = 8 - 2 = 6$$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 2\cdot(-7) = 15 + 14 = 29$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 6\cdot(-1) = 6 + 6 = 12$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -11 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot 4 - 5\cdot(-11) = 55$

f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -4 - 6 = -10.$

❻ Calcula los siguientes determinantes de orden 3 :

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot(-3)\cdot(-2) - 1\cdot(-2)\cdot(-2) - 3\cdot(-3)\cdot 4 - 2\cdot 5\cdot 4 = -24 + 20 + 12 - 4 + 36 - 40 = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} \to = (-1)\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 2 - (-1)\cdot(-2)\cdot 5 = -3 - 12 - 10 = -25$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \to = 4\cdot 0\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 3 = -6 + 2 + 4 - 12 = -12$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \to = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 0\cdot(-1)\cdot 4 + 0\cdot 2\cdot(-2) - 0\cdot(-3)\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot(-1) = -3 + 8 + 2 = 7$

❼ Calcula los siguientes determinantes de orden 4 desarrollando por una de sus filas o columnas:

a) Desarrollando por la primera fila :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 1\cdot 1 - 1\cdot 6 + 1\cdot 1 - 1\cdot(-11) = 1 - 6 + 1 + 11 = 7$

b) Desarrollamos por la última columna :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

= -3· (-3) -3·29+4·(-25) = 9 - 87 - 100 =**-178**.

❽ Calcula el valor de los siguientes determinantes, teniendo en cuenta que :

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix} \xrightarrow{1)} -\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \xrightarrow{2)} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -k$

1) Intercambiar dos columnas : el determinante cambia de signo.
2) Trasponer la matriz : el determinante no varía.

b) $\begin{vmatrix} a+b & a & -c \\ d+e & d & -f \\ g+h & g & -i \end{vmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{vmatrix} a & a & -c \\ d & d & -f \\ g & g & -i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & -c \\ e & d & -f \\ h & g & -i \end{vmatrix} \xrightarrow{2)} 0+\begin{vmatrix} b & a & -c \\ e & d & -f \\ h & g & -i \end{vmatrix} \xrightarrow{3)} -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \xrightarrow{4)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$

1) El determinante cuya columna es una suma se puede descomponer en dos determinantes , en cada uno de los cuales habrá un sumando y el resto de las columnas no cambian.
2) Si un determinante tiene dos líneas (columnas 1 y 2 en este caso) iguales el determinante es nulo.
3) Si los elementos de un línea (3ª columna en este caso se multiplican por un número (-1 en este caso) el determinante queda multiplicado por ese número.
4) Al cambiar de orden las columnas 1 y 2 el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} b & 2a & -3c \\ c & 2d & -3f \\ h & 2g & -3i \end{vmatrix} \xrightarrow{1)} 2\cdot(-3)\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \xrightarrow{2)} -2\cdot(-3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6k$

1) Las columnas 2ª y 3ª están multiplicadas por 2 y (-3) respectivamente, podemos extraerlos.

2) Intercambiamos las columnas 2ª y 1ª luego el determinante cambia de signo.

d) $\begin{vmatrix} c+2a & a & -b \\ f+2d & d & -e \\ i+2g & g & -h \end{vmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{vmatrix} c & a & -b \\ f & d & -e \\ i & g & -h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & a & -b \\ 2d & d & -e \\ 2g & g & -h \end{vmatrix} \xrightarrow{2)} \begin{vmatrix} c & a & -b \\ f & d & -e \\ i & g & -h \end{vmatrix} \xrightarrow{3)} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -k$

1) El determinante cuya columna es una suma se puede descomponer en dos determinantes , en cada uno de los cuales habrá un sumando y el resto de las columnas no cambian.
2) En el segundo determinante las columnas 1 y 2 son proporcionales (el doble) luego es nulo.

3) En este paso hacemos dos trasposiciones (C_1 « C_2 y C_3 « C_2) luego después de cambios de signo queda positivo, pero como la 2ª columna es negativa el determinante será negativo.

❾ Halla, sin utilizar la regla de Sarrus, los determinantes :

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a & bc & a^{-1} \\ b & ca & b^{-1} \\ c & ab & c^{-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} aF_1 \\ bF_2 \\ cF_3 \end{matrix} \to \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} \begin{vmatrix} a^2 & abc & 1 \\ b^2 & bca & 1 \\ c^2 & abc & 1 \end{vmatrix} \text{Extrayendo abc} \to \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ b^2 & 1 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} a+b & 1 & c \\ b+c & 1 & a \\ a+c & 1 & b \end{vmatrix} C_1 \to C_1 + C_3 \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & c \\ b+c+a & 1 & a \\ a+c+b & 1 & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener } C_1 = C_2$$

❿ Enuncia las propiedades de los determinantes .
Utiliza las propiedades para demostrar la igualdad :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+i & i+g \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Las propiedades se pueden ver en el texto.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+i & i+g \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_3 - C_2} \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a \\ 2d & e+f & f+d \\ 2g & h+i & i+g \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_3 + \frac{1}{2}C_1} \begin{vmatrix} 2a & b & c+a \\ 2d & e & f+d \\ 2g & h & i+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 2a & b & a \\ 2d & e & d \\ 2g & h & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix} + 0 \text{ (por ser } C_1 = 2\cdot C_3) = 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ q.e.d.}$$

❶❶ Calcula, por el método de Gauss, el valor de los determinantes :

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ \to \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2 = -2$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -8 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \to \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 + 2F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3 - 2F_2 \\ F_4 - F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A la misma conclusión podríamos haber llegado al darnos cuenta que $C_3 = 4C_1$

❶❷ Calcula el rango de las matrices :

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -10 & 7 \\ -2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 12 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$a)|a_{11}| = |3| = 3 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(M) = 1$$

$$b)|a_{12}| = |3| = 3 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow rang(M) = 2$$

$$c)|a_{11}| = |-3| = -3 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow rang(M) \geq 2; \begin{vmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow rang(M) = 2$$

$$d)|a_{11}| = |5| = 5 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \Rightarrow rang(M) \geq 2$$

los dos menores de orden tres que se obtiene al orlar el menor de orden 2 anterior son:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(M) = 2$$

$$e)|a_{11}| = |3| = 3 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow rang(M) \geq 2; \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow rang(M) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow rang(M) = 4$$

$f) |a_{11}| = |1| = 1 \Rightarrow rang(M) \geq 1; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow rang(M) \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 12 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow rang(M) \geq 3$

y los dos menores de orden 4 que pueden obtenerse el menor anterior son :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 12 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 12 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(M) = 3$$

❶❸ Calcula la inversa de las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} Adj\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} |-1| & -|3| \\ -|2| & |-2| \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $$B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}} Adj\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}\begin{pmatrix} |\cos\alpha| & -|sen\alpha| \\ -|-sen\alpha| & |\cos\alpha| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = B^t$$

c) $$C^{-1} = \frac{1}{|C|} Adj(C^t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix}} Adj\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -9 \\ 4 & 15 & -6 \\ 21 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

d) $|D|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$ por la 4^a fila $=1\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$ por la 3^a columna $=1\cdot1\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$

$$D^t=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix};\ \text{Adj}(D^t)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}Adj(D^t)=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

❶❹ Comprueba que los sistemas siguientes son resolubles por el método de la matriz inversa y halla sus soluciones :

Para saber si puede usarse el método de la matriz inversa hemos de comprobar si existe esta, es decir, si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.

a) $\left.\begin{array}{l}2x+4y+6z=18\\4x+5y+5z=21\\3x+y-2z=4\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&5\\3&1&-2\end{vmatrix}=-20+24+60-90-10+32=-4\neq0$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)=-\frac{1}{4}Adj\begin{pmatrix}2&4&3\\4&5&1\\6&5&-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}5&1\\5&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&1\\6&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&5\\6&5\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}4&3\\5&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\6&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&4\\6&5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&3\\5&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&4\\4&5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-15&14&-10\\23&-22&14\\-11&10&-6\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B;\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-15&14&-10\\23&-22&14\\-11&10&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18\\21\\4\end{pmatrix}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-15\cdot18+14\cdot21-10\cdot4\\23\cdot18-22\cdot21+14\cdot4\\-11\cdot18+10\cdot21-6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{4}\\\frac{-8}{4}\\\frac{12}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

b) $\left.\begin{array}{l}2x+3y-7z=-1\\3x+4y-6z=5\\5x-2y+4z=-7\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2&3&-7\\3&4&-6\\5&-2&4\end{vmatrix}=32+42-90+140-24-36=64\neq0$

$$A^{-1}=\tfrac{1}{64}Adj\begin{pmatrix}2&3&5\\3&4&-2\\-7&-6&4\end{pmatrix}=\tfrac{1}{64}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4&-2\\-6&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&-2\\-7&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&4\\-7&-6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}3&5\\-6&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&5\\-7&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\-7&-6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&5\\4&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&5\\3&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\tfrac{1}{64}\begin{pmatrix}4&2&10\\-42&43&-9\\-26&19&-1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B;\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\tfrac{1}{64}\begin{pmatrix}4&2&10\\-42&43&-9\\-26&19&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-7\end{pmatrix}=\tfrac{1}{64}\begin{pmatrix}-4\cdot1+2\cdot5-7\cdot10\\42\cdot1+43\cdot5+9\cdot7\\26\cdot1+19\cdot5+1\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{64}{64}\\\frac{320}{64}\\\frac{128}{64}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}$$

c) $$\left.\begin{array}{rl}y+z&=1\\x+y-3z&=8\\x-2y&=-1\end{array}\right\}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&-3\\1&-2&0\end{vmatrix}=0-2-3-1-0-0=-6\neq0$$

$$A^{-1}=\tfrac{-1}{6}Adj\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}=\tfrac{-1}{6}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-2\\-3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&-3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\-3&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&-3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\tfrac{-1}{6}\begin{pmatrix}-6&-2&-4\\-3&-1&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\tfrac{-1}{6}\begin{pmatrix}-6&-2&-4\\-3&-1&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\-1\end{pmatrix}=\tfrac{-1}{6}\begin{pmatrix}-6\cdot1-2\cdot8+4\cdot1\\-3\cdot1-1\cdot8-1\cdot1\\-3\cdot1+1\cdot8+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-18}{-6}\\\frac{-12}{-6}\\\frac{-6}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

❶❺ Clasifica mediante el teorema de Rouché - Fröbenius, los sistemas :

a) $$\left.\begin{array}{rl}x+2y+z&=0\\2x+y+2z&=1\\5x+7y+5z&=1\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\2&1&2&1\\5&7&5&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\to\\F_2-2F_1\\F_3-5F_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&0&1\\0&-3&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\to\\F_3-F_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\text{, en donde rang(M) = rang}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2,\ \text{rang}(M^*)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

como rang(M) = rang (M*) = 2 y nº de incógnitas = 3 $\Rightarrow$ **S. compatible e indeterminado uniparamétrico.**

b) $$\left.\begin{array}{rl}3x+2y+z&=4\\-2x+3y+2z&=0\\x+5y+3z&=1\\-4x+6y+4z&=-3\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&4\\-2&3&2&0\\1&5&3&1\\-4&6&4&-3\end{array}\right)\begin{array}{c}F_1\leftrightarrow F_3\\\to\\\\\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&3&1\\-2&3&2&0\\3&2&1&4\\-4&6&4&-3\end{array}\right)\begin{array}{c}\to\\F_2+2F_1\\F_3-3F_1\\F_4+4F_1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 13 & 8 & | & 2 \\ 0 & -13 & -8 & | & 1 \\ 0 & 26 & 16 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3+F_2 \\ F_4-2F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 13 & 8 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{rang(M)} = 2 \\ \text{rang(M*)} = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \text{ S. Incompatible.}$$

c)
$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z &= 2 \\ 3x+2y+2z &= 2 \\ x-y+4z &= 1 \\ 2x+y-z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \\ 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -4 & -7 & | & -4 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & -7 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4F_3-3F_2 \\ 4F_4-3F_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -4 & -7 & | & -4 \\ 0 & 0 & 25 & | & 8 \\ 0 & 0 & -7 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[25F_4+7F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -4 & -7 & | & -4 \\ 0 & 0 & 25 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 256 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rang (M)} = 3 \\ \text{rang (M*)} = 4 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{S. incompatible.}$$

❶❻ Clasifica y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas :

Para la clasificación vamos a utilizar el teorema de Rouché - Fröbenius y para la resolución el método de Cramer, como pide el ejercicio :

a)
$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 1 \\ 4x+5y+2z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 5 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rang (M)} = 2 \\ \text{rang (M*)} = 2 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{S. compatible e indeterminado uniparamétrico.}$$

El sistema queda $\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y+z &= 1 \\ -y &= 0 \end{aligned}\right\}$ si $z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y &= 1-\lambda \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$ que por Cramer :

$$x = \frac{\Delta_1}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \text{ por tanto } \left\langle \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{2} \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\rangle$$

b)
$$\left.\begin{aligned} 2x+y+5z &= 2 \\ 3x+5y+z &= 1 \\ x+3y+2z &= 2 \\ 2x+2y-z &= -1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 3 & 5 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 5 & | & 2 \\ 2 & 2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & -4 & -5 & | & -5 \\ 0 & -5 & 1 & | & -2 \\ 0 & -4 & -5 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4F_3-5F_2 \\ F_4-F_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & -4 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 29 & | & 17 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{rang (M)} = 3 \\ \text{rang (M*)} = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{S . compatible y determinado } \left.\begin{aligned} x+3y+2z &= 2 \\ -4y-5z &= -5 \\ 29z &= 17 \end{aligned}\right\}$$

que resolvemos por Cramer :

$$x=\frac{\Delta_1}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}2&3&2\\-5&-4&-5\\17&0&29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-4&-5\\0&0&29\end{vmatrix}}=\frac{2\cdot(-4)\cdot 29-3\cdot 5\cdot 17+2\cdot 4\cdot 17+3\cdot 5\cdot 29}{-4\cdot 1\cdot 29}=\frac{84}{-116}=-\frac{21}{29}$$

$$y=\frac{\Delta_2}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-5&-5\\0&17&29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-4&-5\\0&0&29\end{vmatrix}}=\frac{-1\cdot 5\cdot 29+1\cdot 5\cdot 17}{-1\cdot 4\cdot 29}=\frac{-60}{-116}=\frac{15}{29}$$

$$z=\frac{\Delta_3}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-4&-5\\0&0&17\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-4&-5\\0&0&29\end{vmatrix}}=\frac{-1\cdot 4\cdot 17}{-1\cdot 4\cdot 29}=\frac{17}{29}$$

❶❼ Averigua para qué valores de **m** la matriz **A** tiene inversa y halla $\mathbf{A^{-1}}$ para **m** = **2**.

Como ya hemos indicado, una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo, veamos pues para que valores de ***m*** es no nulo :

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&-1&3\\0&2&m\\m&0&4\end{vmatrix}=-8-m^2-6m;\ m^2+6m+8=0\Rightarrow m=-4 \text{ y } m=-2.$$

Luego A tiene inversa para cualquier valor de m $\notin$ {-4, -2 }. Hallemos ahora A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-1&-1&3\\0&2&2\\2&0&4\end{vmatrix}}Adj\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&2&0\\3&2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{-24}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\2&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&0\\3&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&2\\3&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&2\\3&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&0\\3&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&0\\-1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}8&4&-8\\4&-10&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}$$

❶❽ Averigua el rango de las matrices según los valores de *m* :

a) $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2-1;\ m^2-1=0;\ m=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ ‖ Si m = $\pm 1 \Rightarrow$ rang(M)= 1; Si m $\neq \pm 1 \Rightarrow$ rang(M) =2 ‖

b) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3+1+1-m-m-m = m^3-3m+2$; que anulando :

$m^3-3m+2=0$ y resolviendo por Ruffini, probando entre los Div(2) = { $\pm 1, \pm 2$ }:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Si m = 1 $\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang(M) = 1, pues los de orden 3 y 2 son nulos

Si M = -2 $\Rightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang(M) = 2, pues el de orden 3 es nulo y $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Si m $\neq$ 1 y -2 $\Rightarrow$ rang(M) = 3 pues el de orden 3 es no nulo.

c) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y el determinante que resolveremos por Gauss $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-mF_4 \\ F_2-F_4 \\ F_3-F_4 \\ \xrightarrow{\text{pivote}} \end{matrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} - \begin{vmatrix} 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} \underset{\text{Pivote}}{\xrightarrow{F_1+F_3}} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-m & -m^2-m+2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Pivote}}{\xrightarrow{F_1+F_2}} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2-2m+3 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -1\cdot(m-1)\cdot(m.-1)\cdot(-m^2-2m+3) = (m-1)^2(m^2+2m-3)$$

Es decir (m - 1)^3 (m + 3) al resolver la ecuación de 2º grado (soluciones x = 1 y x = -3), luego los valores de m que hemos de discutir son :

❍ Si **m = 1**, la matriz queda :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuyos menores de orden 4,3 y 2 son nulos y como $1 \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 1$

❍ Si **m = - 3**, la matriz queda :

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante de orden 4 es nulo y $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 27 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 41 \neq 0$

Rang (M) = 3

❍ Si **m ≠ 1 y -3, rang (M) = 4** pues el determinante de orden 4 no se anula.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 5 & 2 & -1 & -m \\ 2 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Pivote}} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & -3 & -51 & -m-30 \\ 0 & -1 & m-20 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Pivote}} \\ 3F_3 - F_2 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & -3 & -51 & -m-30 \\ 0 & 0 & 3m-9 & m-3 \end{pmatrix}$ si $3m - 9 = 0$ ó $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$ con lo que tenemos dos casos :

❄ Si m = 3 **rang(M) = 2** pues hay dos filas no nulas.

❄ Si m ≠ 3 **rang(M) = 3** pues hay tres filas no nulas.

❶❾ Discute y resuelve, en función del parámetro *k*, el sistema :

$$\left.\begin{aligned} x + y + (k+1)z &= k^4 + 3k^3 \\ x + (k+1)y + z &= K^3 + 3k^2 \\ (k+1)x + y + z &= k^2 + 3k \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k^4 + 3k^3 \\ 1 & k+1 & 1 & k^3 + 3k^2 \\ k+1 & 1 & 1 & k^2 + 3k \end{array}\right) \begin{matrix} \rightarrow \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - (k+1)F_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k^4 + 3k^3 \\ 0 & k & -k & -k^4 - 2k^3 + 3k^2 \\ 0 & -k & -k^2 - 2k & k^2 + 3k - (k+1)(k^4 + 3k^3) \end{array}\right) \begin{matrix} \rightarrow \\ F_3 + F_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k^4 + 3k^3 \\ 0 & k & -k & -k^4 - 2k^3 + 3k^2 \\ 0 & 0 & -k^2 - 3k & -k^5 - 5k^4 - 5k^3 + 4k^2 + 3k \end{array}\right)$$

Si $-k^2 - 3k = 0$; $k(k-3) = 0$, es decir $k = 0$ y $k = 3$, discutamos los tres casos posibles :

☒ Si ***k*** = 0, la matriz ampliada del sistema, después de escalonada, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rang (M) = 1
rang (M*) = 1 ⇒ S. Compatible Indeterminado biparámetrico (3-1=2) de solución :
n = 3

x + y + z = 0 ; **z = λ, y = μ , x = - y - z = -λ - μ**

☒ Si ***k*** = - 3, la matriz ampliada del sistema, después de escalonada, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rang (M) = 2
rang (M*) = 2 ⇒ S. Compatible Indeterminado uniparamétrico, de solución :
n = 3

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z &= 0 \\ -3y+3z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{si } z = \lambda \Rightarrow y = z = \lambda \text{ ; } x = 2z - y = 2\lambda - \lambda = \lambda \Rightarrow (\lambda, \lambda, \lambda)$$

☒ Si $\boldsymbol{k} \neq 0$ y - 3, la matriz ampliada del sistema, después de escalonada, queda como hemos visto en la página anterior, despejando de abajo hacia arriba :

$$z = \frac{-k^5-5k^4-5k^3+4k^2+3k}{-k^2-3k} = \frac{k(k+3)(k^3+2k^2-k-1)}{k(k+3)} = k^3+2k^2-k-1$$

$$y = \frac{-k^4-2k^3+3k^2+kz}{k} = \frac{-k^4-2k^3+3k^2+k^4+2k^3-k^2-k}{k} = \frac{2k^2-k}{k} = \frac{k(2k-1)}{k} = 2k-1$$

$$x = k^4+3k^3-(k+1)z-y = k^4+3k^3-k^4-2k^3+k^2+k-k^3-2k^2+k+1-2k+1 = -k^2+2$$

❷⓿ Se han realizado **tres** pruebas de consumo de un automóvil. En la *primera* se han recorrido **120** km por *carretera* y **40** km por *ciudad* y se han gastado **9,6** l. En la *segunda* se han recorrido **40** km por *carretera* y **120** km por *ciudad* y se han gastado **12,8** l. En la *tercera* se han recorrido **100** km por *carretera* y **100** km por *ciudad* y se han gastado **14** l. Calcula el *consumo* del coche cuando circula por *carretera* y cuando lo hace por la *ciudad*. Exprésalo en litros consumidos cada 100 km.

➲ **Incógnitas** :
x = consumo del auto cuando circula por carretera en l /100 km.
y = consumo del auto cuando circula por ciudad en l /100 km.

➲ **Planteamiento :**

$$\left.\begin{aligned} \text{Primera prueba} \rightarrow \tfrac{120}{100}x+\tfrac{40}{100}y &= 9'6 \\ \text{Segunda prueba} \rightarrow \tfrac{40}{100}x+\tfrac{120}{100}y &= 12'8 \\ \text{Tercera prueba} \rightarrow \tfrac{100}{100}x+\tfrac{100}{100}y &= 14 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left.\begin{aligned} 120x+40y &= 960 \\ 40x+120y &= 1280 \\ x+y &= 14 \end{aligned}\right\} \text{y simplificando}$$

➲ **Resolución :**

$$\left.\begin{aligned} 3x+y &= 24 \\ x+3y &= 32 \\ x+y &= 14 \end{aligned}\right\} \text{la matriz } \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 14 \\ 1 & 3 & | & 32 \\ 3 & 1 & | & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 14 \\ 0 & 2 & | & 18 \\ 0 & -2 & | & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 14 \\ 0 & 2 & | & 18 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 14 \\ 2y &= 18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 14-y = 14-9 = 5 \\ y &= \tfrac{18}{2} = 9 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{En carretera = 5 l / 100 km} \\ &\text{En ciudad = 9 l / 100 km.} \end{aligned}$$

La comprobación es inmediata sin más que sustituir en el sistema inicial.