❶ Escribe :

a) Una ecuación lineal de cuatro incógnitas.
b) Una ecuación lineal de cinco incógnitas.
c) Una ecuación lineal homogénea con tres incógnitas.

❍ Indica, para cada una de ellas, cuáles son los coeficientes y cuáles los términos independientes.

---oo0oo---

Apartado	Ecuación	Coeficientes	Término independiente
a)	x -3y + 2z + 5u = -5	1, -3, 2 y 5	-5
b)	-2x + 3y - 6z + u -7v = 4	-2, 3, -6, 1 y -7	4
c)	3x - 4y + 2z = 0	3, -4 y 2	0

❷ Averigua cuál o cuáles de las siguientes ternas son soluciones de la ecuación 3x - y + 2z = 0: **a)** (1, -1, 3) **b)** (-4, 8, 10) *c)* (7, 0, -8).

---oo0oo---

Sustituimos las incógnitas por sus valores en cada terna de solución :

a) $3 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 3 = 3 + 1 + 6 = 10 \neq 0$, **no es solución**.

b) $3 \cdot (-4) - 8 + 2 \cdot 10 = -12 - 8 + 20 = 0$,**sí es solución**.

c) $3 \cdot 7 - 0 + 2 \cdot (-8) = 21 - 16 = 5 \neq 0$, **no es solución**.

❸ Escribe una ecuación lineal con cuatro incógnitas, una de cuyas soluciones sea la 4 - tupla (3, 1, - 2, 0) .

---oo0oo---

Una ecuación lineal de cuatro incógnitas es de la forma **a x + b y + cz + d u = e**. Para que (3, 1, - 2, 0) sea una solución ha de cumplirse que **3a + b - 2c = e** , si damos valores a los coeficientes, por ejemplo **a** = 2, **b** = 1, **c** = - 3 y **d** = 5 quedaría **e** = 3 · 2 + 1 - 2 · (- 3) = 6 + 1 + 6 = 13 y por tanto la ecuación quedaría : **2x + y - 3z + 5 u = 13** .

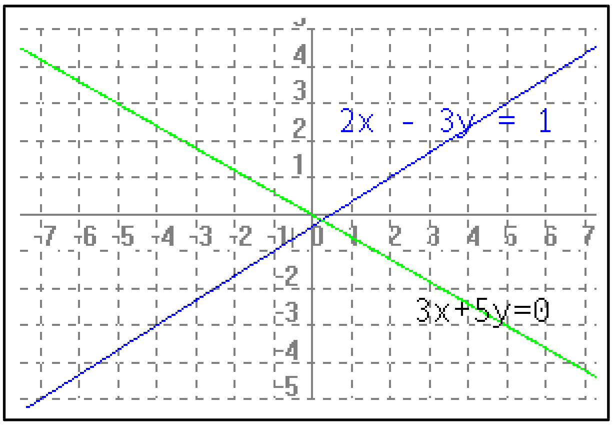
❹ Resuelve gráficamente los sistemas siguientes y clasifícalos según sus soluciones :

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 3x+5y=0 \end{array}\right\};\ b)\ \left.\begin{array}{l} -5x+2y=3 \\ 5x-2y=8 \end{array}\right\};\ c)\ \left.\begin{array}{l} 3x+3y=3 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

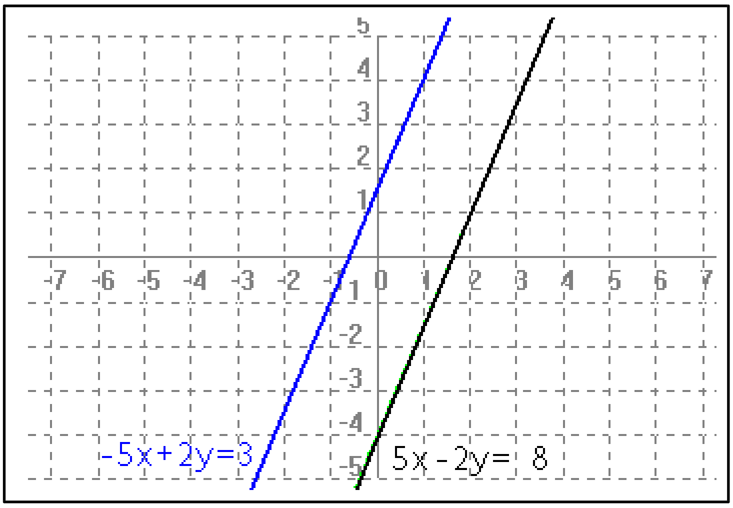
Representamos las rectas correspondientes a los tres sistemas :

a)



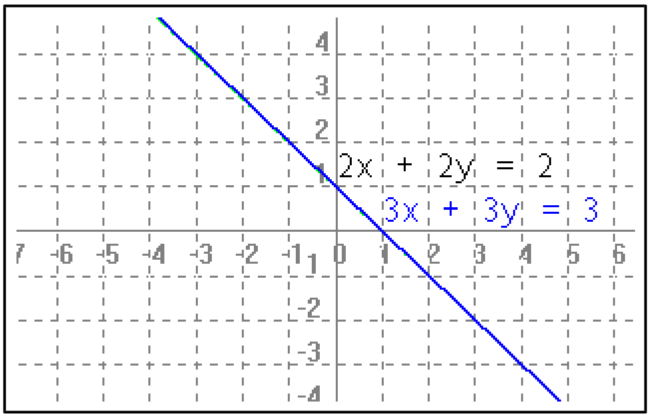
Aunque el **punto de corte** no puede precisarse con exactitud se observa que **hay uno y es único** luego el sistema es **compatible y determinado**.

b)



Son rectas **paralelas**, no tienen **ningún punto en común**, es decir **ninguna solución** y por tanto **incompatible**.

c)



Son **rectas coincidentes** y por tanto con **infinitos puntos comunes**, sistema **compatible** e **indeterminado**.

❺ Resuelve los sistemas :

$$a)\quad \left.\begin{array}{r} 3x-y+5z=2 \\ -7y+z=7 \\ 2z=0 \end{array}\right\}$$

es un sistema escalonado, luego podemos empezar a despejar las incógnitas en cascada inversa, de abajo a arriba :

Resolvemos la tercera ecuación y nos da para z = 0/ 2 = 0, quedando :

$$\left.\begin{array}{rrrl} 3x & -y & +5z & =2 \\ & -7y & +z & =7 \\ & & z & =0 \end{array}\right\}\text{sustituyendo z= 0 en la } 2^a \quad \left.\begin{array}{rrrl} 3x & -y & +5z & =2 \\ & -7y & +0 & =7 \\ & & z & =0 \end{array}\right\}\text{despejando}$$

$$\text{y de la } 2^a \rightarrow y=-1 \quad \left.\begin{array}{rrrl} 3x & -y & +5z & =2 \\ & y & & =-1 \\ & z & & =0 \end{array}\right\}\text{sustituyendo z= 0 e y = -1 en la } 1^a \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x=\frac{1}{3} \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right\}$$, que es la solución del sistema.

$$b)\quad \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ 3x+2y+z=5 \\ 4x+4y+2z=6 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo vamos usar la notación matricial y escalonarlo por el método de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \| & 4 \\ 3 & 2 & 1 & \| & 5 \\ 4 & 4 & 2 & \| & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \| & 4 \\ 0 & -7 & 7 & \| & -7 \\ 0 & -8 & 10 & \| & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{7}F_2 \\ \frac{1}{2}F_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & \| & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \| & 1 \\ 0 & -4 & 5 & \| & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3+4F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & \| & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \| & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \| & -1 \end{pmatrix} \text{escalonada} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & +2y & -2z & = 4 \\ & y & -z & = 1 \\ & & z & = -1 \end{array}\right\}$$

sistema que resolvemos de abajo arriba:

- Sustituyendo en la segunda ecuación z = -1 queda y +1 = 1 ⇒ y = 0.
- Sustituyendo en la primera z = -1, y = 0 queda x + 0 + 2 = 4 ⇒ x = 4 - 2 = 2 .

Solución: x = 2, y = 0, z = -1

❻ Resuelve el sistema siguiente utilizando la notación matricial del método de Gauss

$$\left.\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +z & = & -1 \\ 2x & +3y & -z & = & 1 \\ 3x & +3y & +9z & = & 6 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

Partimos de la matriz ampliada del sistema, que escalonamos por Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} F_2+2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{array}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 12 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3-3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

matriz escalonada a la que le corresponde el sistema :

$$\left.\begin{array}{rrrl} -x & -2y & +z & =-1 \\ & -y & +z & =-1 \\ & & 9z & =6 \end{array}\right\} \text{que resolviendo escalonadamente de abajo a arriba:}$$

$$\left\{\begin{array}{r} z=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \\ y=z+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3} \\ x=z-2y+1=\frac{2}{3}-\frac{10}{3}+1=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \qquad \text{nos da } (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3})$$

❼ Clasifica y resuelve, si es posible, los sistemas :

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 4x-6y=-28 \\ 5x-2y=-13 \end{array}\right\};\ b)\ \left.\begin{array}{l} -2x-4y=2 \\ -8x-16y=1 \end{array}\right\};\ c)\ \left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=15 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$$

$$d)\ \left.\begin{array}{l} 2x-5y+12z=9 \\ 4x-y-2z=-2 \\ 2x+4y+10z=-11 \end{array}\right\};\ e)\ \left.\begin{array}{l} x+y-z=10 \\ x-y+z=5 \end{array}\right\};\ f)\ \left.\begin{array}{l} x-4y=-5 \\ 2x+y=-1 \\ 2x-8y=-10 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

Escalonamos las matrices ampliadas de cada sistema :

$$a)\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & -28 \\ 5 & -2 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_2-5F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & -28 \\ 0 & 22 & 88 \end{array}\right) \text{ sistema } \left.\begin{array}{r} 4x-6y=-28 \\ 22y=88 \end{array}\right\}$$

que tiene dos ecuaciones dos incógnitas, luego es **compatible** y **determinado**. Resuelto nos da :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\frac{88}{22}=4 \\ x=\frac{-28+6y}{4}=\frac{-28+24}{4}=\frac{-4}{4}=-1 \end{array}\right.$$, la solución es **(-1, 4) .**

$$b)\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 2 \\ -8 & -16 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-4F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right),$$ la segunda fila corresponde a la ecuación :

0x + 0y = -7 que no tiene solución, luego el sistema es **incompatible**.

$$c)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3-5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 30 \end{array}\right) \text{ asociada al sistema } \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ y+z=-3 \\ -6z=30 \end{array}\right\}$$ de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir **compatible** y **determinado**. La solución la obtenemos de forma escalonada de abajo arriba :

$$\left\{\begin{array}{l} z=\frac{30}{-6}=-5 \\ y=-3-z=-3-(-5)=-3+5=2 \\ x=y=2 \end{array}\right.$$, la **solución** es **(2, 2, -5)**

$$d)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 9 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 10 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 9 \\ 0 & 9 & -26 & -20 \\ 0 & 9 & -2 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 9 \\ 0 & 9 & -26 & -20 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \end{array}\right) \text{ cuyo sistema asociado es } \left.\begin{array}{r} 2x-5y+12z=9 \\ 9y-26z=-20 \\ 24z=0 \end{array}\right\}$$

que al tener tres ecuaciones y tres incógnitas es **compatible y determinado**. La solución es :

$$\left\{\begin{array}{r} z=\frac{0}{24}=0 \\ y=\frac{-20+26z}{9}=\frac{-20}{9} \\ x=\frac{9+5y-12z}{2}=\frac{9-\frac{100}{9}}{2}=\frac{\frac{-19}{9}}{2}=-\frac{19}{18} \end{array}\right.$$

$$e)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ F_2-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right) \text{ y el sistema } \left.\begin{array}{r} x+y-z=10 \\ -2y+2z=-5 \end{array}\right\}$$

que tiene tres incógnitas y dos ecuaciones luego es **compatible** pero **indeterminado uniparamétrico** (3 ecuaciones -2 incógnitas = 1). Si tomamos como parámetro la variable z y resolvemos en escalera ascendente :

$$\left\{\begin{array}{r} z=\lambda \\ y=\frac{2z+5}{2}=\frac{2\lambda+5}{2}=\lambda+\frac{5}{2} \\ x=10-y+z=10-\lambda-\frac{5}{2}+\lambda=10-\frac{5}{2}=\frac{15}{2} \end{array}\right.$$

$$f)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ el sistema queda } \left.\begin{array}{r} x-4y=-5 \\ 9y=9 \end{array}\right\}$$

que al tener el **mismo número** de **ecuaciones** que de **incógnitas** es **compatible** y **determinado**. La solución : y = 9/9 = 1 ; x = -5 + 4y = -5 + 4 · 1 = - 5 + 4 = -1 , **(-1, 1).**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 38)

❶ Discute, aplicando el método de Gauss, los sistemas :

$$a)\left.\begin{array}{r} -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+ky-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\};\ b)\left.\begin{array}{r} kx+y+z=k \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k \end{array}\right\};\ c)\left.\begin{array}{r} x+y+z=k+2 \\ x-ky+z=1 \\ kx+y+z=4 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

Procedemos normalmente, hasta escalonar la matriz ampliada, por el método de Gauss :

$$a)\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & k-2 & -9 & -8 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & k-2 & -9 & -8 \end{array}\right) \underset{C_3 \leftrightarrow C_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & -9 & k-2 & -8 \end{array}\right) \underset{F_3 + F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & k+3 & -4 \end{array}\right)$$ de la observación de la tercera fila, k + 3 = 0 ⇒ k = -3 se tiene que :

◎ Si **k = - 3** , la ecuación correspondiente a la última fila queda 0y[1] = - 4 que no tiene solución, luego el sistema es **incompatible** .

◎ Si **k ≠ - 3** , el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas y es **compatible** y **determinado**.

$$b)\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & k \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - kF_1}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 + F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$ escalonada, si $2- k - k^2 = 0 \Rightarrow$

resolviendo la ecuación $k^2 + k - 2 = 0$ k = -2 , k = 1 , luego habrá tres casos :

➲ Si k = 1 la matriz ampliada queda : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y el sistema se reduce a una sola ecuación, x + y + z = 1, de tres incógnitas, es decir **compatible** pero **indeterminado biparamétrico** (3 incógnitas - 1 ecuación = 2 parámetros) .

➲ Si k = - 2, la matriz ampliada queda : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$, en donde puede apreciarse que la ecuación correspondiente a la tercera fila no tiene solución y el sistema es **incompatible**.

➲ Si k ≠ -2, 1, el sistema tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas luego es **compatible** y **determinado**.

[1] Tened en cuenta que se han intercambiado las columnas 3ª (z) y 2ª (y).

$$c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & k+2 \\ 1 & -k & 1 & \| & 1 \\ k & 1 & 1 & \| & 4 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & k+2 \\ 1 & -k & 1 & \| & 1 \\ 1 & 1 & k & \| & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & k+2 \\ 0 & -k-1 & 0 & \| & -1-k \\ 0 & 0 & k-1 & \| & 2-k \end{pmatrix}$$

matriz escalonada en donde si k -1 = 0 k = 1, luego hay dos casos :

- ❒ Si **k = 1,** la ecuación correspondiente a la última fila no tiene solución y el sistema es **incompatible**.
- ❒ Si **k ≠ 1,** tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas **compatible** y **determinado**.

❷ La **suma** de las **cifras** de un número natural comprendido entre 100 y 999 es **6**. Además, sabemos que el **triple** de la **cifra** de las **decenas** es **igual** a la de las **unidades**. Finalmente, si **invertimos** el orden de las cifras, el número **aumenta** en **99**. ¿Cuál es este número ?

---oo0oo---

Incógnitas

x = cifra de las unidades.
y = cifra de las decenas.
z = cifra de las centenas.

El número será x + 10y + 100z = zyx. Invirtiendo el orden z +10y +100x = xyz.

Planteemos las tres ecuaciones necesarias para hallar las 3 incógnitas :

- La suma de sus cifras es 6 ≡ **x + y + z = 6.**
- El triple de la cifra de las decenas (3y) es igual a la de las unidades (x) ≡ **3y = x.**
- El nº invertido aumenta en 99 ≡ **z +10y +100x = x + 10y + 100z + 99**.

Resolución

Colocando y reduciendo términos, el sistema queda : $\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & =6 \\ x & -3y & & =0 \\ x & & -z & =1 \end{array}\right\}$, que resolveremos por Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 6 \\ 1 & -3 & 0 & \| & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \| & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 6 \\ 0 & -4 & -1 & \| & -6 \\ 0 & -1 & -2 & \| & -5 \end{pmatrix} \underset{4F_3-F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 6 \\ 0 & -4 & -1 & \| & -6 \\ 0 & 0 & -7 & \| & -14 \end{pmatrix} \text{escalonada}$$

y pasando al sistema : $\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =6 \\ & -4y & -z & =-6 \\ & & -7z & =-14 \end{array}\right\}$, que resuelto da :

$$\left\{\begin{array}{r} z=\frac{-14}{-7}=2 \\ y=\frac{6-z}{4}=\frac{6-2}{4}=1 \\ x=6-y-z=6-1-2=3 \end{array}\right.$$

luego el número buscado es el **213**.

Comprobación :

- Suma de las cifras 2 + 1 + 3 = 6.
- Triple de la cifra de las decenas (y) = unidades (x) ; 3 ·1 = 3.
- Invirtiendo el número aumenta en 99 , 312 = 213 + 99.

❸ ***Ana*** compra **tres** *pantalones*, **dos** *blusas* y **un** *sombrero* por **135** euros; ***Begoña***, **un** *pantalón*, **tres** *blusas* y **un** *sombrero* por **100** euros y ***Susana***, **dos** *pantalones*, **tres** blusas y **dos** *sombreros* por **155** euros ¿Cuál es el precio de cada prenda?

---oo0oo---

Sean :

x = precio de los pantalones..
y = precio de las blusas.
z = precio de los sombreros.

Planteamiento :

- 3 *pantalones*, 2 *blusas* y 1 *sombrero* cuestan 135 euros ≡ 3x + 2y + z = 135.
- 1 *pantalones*, 3 *blusas* y 1 *sombrero* cuestan 100 euros ≡ x + 3y +z = 100.
- 2 *pantalones*, 3 *blusas* y 2 *sombreros* cuestan 155 euros ≡ 2x + 3y +2z = 155.

Poniendo la segunda ecuación en primer lugar el sistema es :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +3y & +z & =100 \\ 3x & +2y & +z & =135 \\ 2x & +3y & +2z & =155 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 100 \\ 3 & 2 & 1 & 135 \\ 2 & 3 & 2 & 155 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & -7 & -2 & -165 \\ 0 & -3 & 0 & -45 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 100 \\ 0 & -2 & -7 & -165 \\ 0 & 0 & -3 & -45 \end{array}\right) \text{el sistema} \quad \left.\begin{array}{rrrl} x & +z & +3y & =100 \\ & -2z & -7y & =-165 \\ & & -3y & =-45 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} y=\frac{-45}{-3}=15 \\ z=\frac{165-7y}{2}=\frac{165-7\cdot 15}{2}=\frac{60}{2}=30 \\ x=100-3y-z=25 \end{array}\right.$$

luego los precios son : Los pantalones = x = 25 euros ; blusas = y = 15 y los sombreros = z = 30.

Comprobación :

- 3 *pantalones*, 2 *blusas* y 1 *sombrero* cuestan 135 euros :
  3·25 + 2·15 +30 = 75 + 30 +30 = 135 euros
- 1 *pantalones*, 3 *blusas* y 1 *sombrero* cuestan 100 euros:
  25 + 3· 15 + 30 = 25 + 45 + 30 = 100.
- 2 *pantalones*, 3 *blusas* y 2 *sombreros* cuestan 155 euros :
  2 · 25 + 3 · 15 + 2 · 30 = 50 + 45 + 60 = 155.

❹ Una fábrica dispone de tres máquinas, **A**, **B** y **C**, para producir cierto artículo. Cuando trabajan las **tres** se fabrican **2 000** unidades de dicho artículo por día. Si la **A no funciona**, pero la **B** y la **C** sí, la producción **desciende** un **25**%. Y cuando **A** y **B funcionan** normalmente, pero **C** sólo a **tres cuartas partes** de su rendimiento normal, la producción **baja** un **10**%. ¿Cuántas unidades fabrica habitualmente cada máquina?

---oo0oo---

Incógnitas

x = unidades producidas por la máquina **A**.
y = unidades producidas por la máquina **B**.
z = unidades producidas por la máquina **C**.

Planteamiento

✪ Las tres fábricas producen 2 000 unidades juntas ≡ $\mathbf{x + y + z = 2\,000}$.

✪ Si **A** no trabaja la producción baja un 25 %, es decir 0'25 · 2000 = 500 unidades., que serán las que fabrica **A**, x = 500 . También puede ponerse esta ecuación diciendo que entre **B** y **C** hacen el 75 % restante, es decir $\mathbf{y + z = 1\,500}$.

✪ Si **A** y **B** funcionan normalmente y **C** a las tres cuartas partes el rendimiento baja un 10 %. .De nuevo podemos poner este enunciado de dos formas :

- La producción de **A** + la de **B** + ¾ de **C** = 0'9 ·2000 (90% del total , pues baja un 10%), es decir $\mathbf{x + y + 3z/4 = 1\,800}$.
- La bajada de la producción (10 %) = 1/ 4 de las producidas por **C**, es decir ¼ z = 0'1 · 2 000 = 200. Que equivale, pasando el 4 al 2º miembro $\mathbf{z = 800}$.

La forma más fácil del sistema será pues :

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2000 \\ x = 500 \\ z = 800 \end{array}\right\}$$

Resolución

Como ya sabemos x y z despejamos de la primera y = 2 000 - x - z = 2 000 - 500 - 800 = 700 unidades. Luego la solución es (**500, 700, 800**).

Comprobación

Basta con comprobar que entre las tres producen 2 000 unidades: 500 + 700 + 800= 2 000 unidades.

❺ Un constructor ha invertido 528 125 euros en la compra de tres parcelas. La *primera* la ha comprado a **200** euros el metro cuadrado, la *segunda* a **220** euros/m^2 y la *tercera* a **250** euros/m^2. Sabiendo que la superficie total de las *tres* parcelas es de **2 362,5** m^2 y que por la *tercera* pagó las **cinco octavas** partes de lo que pagó **por las otras dos** juntas, calcula la superficie de cada parcela.

---oo0oo---

Sea :

x = superficie de la *primera* parcela.
y = superficie de la *segunda* parcela.
z = superficie de la *tercera* parcela

Planteamiento

- Las tres importan 528 125 euros, luego la suma de los productos de sus superficies por sus costes/m^2 ha de ser igual a esa cantidad ≡ 200x + 220y + 250z = 528 125, que simplificada dividiendo por 5 queda **40x + 44 y + 50 z = 105 625**.

- La superficie total es de 2 362'5 m^2, es decir **x + y + z = 2 362'5**.

- Por la tercera paga los cinco octavos de lo que pagó por las otras dos juntas: 250z = 5/8 (200x + 220y), que quitando denominadores y pasando al primer miembro queda 1 000x + 1 100 y - 2 000z = 0 y simplificada **10x + 11y - 20z = 0**

El sistema queda, colocando en primer lugar la segunda ecuación obtenida, pues :

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2362'5 \\ 40x & +44y & +50z & =105625 \\ 10x & +11y & -20z & =0 \end{array}\right\}$$

Resolución

Usamos el método de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 2362'5 \\ 40 & 44 & 50 & \| & 105625 \\ 10 & 11 & -20 & \| & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-40F_1 \\ F_3-10F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 2362'5 \\ 0 & 4 & 10 & \| & 11125 \\ 0 & 1 & -30 & \| & -23625 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ 4F_3-F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 2362'5 \\ 0 & 4 & 10 & \| & 11125 \\ 0 & 0 & -130 & \| & -105625 \end{pmatrix} \text{escalonada} \Rightarrow \text{sistema} \rightarrow \left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2362'5 \\ & 4y & +10z & =11125 \\ & & -130z & =-105625 \end{array}\right\}$$

Despejamos las incógnitas :

$$\left\{\begin{array}{r} z=\frac{-105625}{-130}=812'5 \\ y=\frac{11125-10z}{4}=\frac{11125-8125}{4}=750 \\ x=2362'5-y-z=2362'5-750-812'5=800 \end{array}\right.$$

Solución: Las superficies de las tres parcelas son :

- **Parcela primera : 800 m^2** .
- **Parcela segunda : 750 m^2**
- **Parcela tercera : 812'5 m^2**

Comprobación

- Las tres importan 528 125 euros, luego la suma de los productos de sus superficies por sus costes/m^2 ha de ser igual a esa cantidad ≡ 200·800 + 220·750 + 250·812'5 = 528 125.
- La superficie total es de 2 362'5 m^2, es decir **800 + 750 + 812'5 = 2 362'5**.
- Por la tercera paga los cinco octavos de lo que pagó por las otras dos juntas: 250·812'5 = 5/8 (200·800 + 220·750) ; 203 125 = 5·(160 000+165 000)/8

❻ Una persona desea invertir 8 millones de euros en tres productos financieros, **A**, **B** y **C**. Entre el producto **A** y el **B** quiere invertir **siete veces más** que en el producto **C**. El producto **A** ofrece una rentabilidad del **6** %, el **B** del **5** % y el **C** de **2 %.** Calcula cuántos millones tiene que dedicar a cada producto para obtener una **rentabilidad global** del **5** %.

---oo0oo---

Las incógnitas serán los millones invertidos en cada producto :

x = millones invertidos en **A**
y = millones invertidos en **B**
z = millones invertidos en **C**

Planteamiento

- Se dispone de **8** millones para invertir ≡ **x + y + z = 8**

- Entre **A** y **B** se quiere invertir **siete veces más** que en **C** ≡ x + y = 7z ⇨ **x + y -7z = 0**.

- La rentabilidad total ha de ser del 5 % ≡ 0'06 x + 0'05y + 0'02z = 0'05 ·8 y multiplicando por 100 ⇨ **6x + 5y + 2z = 40**.

Resolución

Utilizamos el método de Gauss :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =8 \\ x & +y & -7z & =0 \\ 6x & +5y & +2z & =40 \end{array}\right\} \text{matriz} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 8 \\ 1 & 1 & -7 & \| & 0 \\ 6 & 5 & 2 & \| & 40 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 6F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 8 \\ 0 & 0 & -8 & \| & -8 \\ 0 & -1 & -4 & \| & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3 \leftrightarrow F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 8 \\ 0 & -1 & -4 & \| & -8 \\ 0 & 0 & -8 & \| & -8 \end{pmatrix} \text{escalonada} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =8 \\ & -y & -4z & =-8 \\ & & -8z & =-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} z = \frac{-8}{-8} = 1 \\ y = 8 - 4z = 4 \\ x = 8 - y - z = 8 - 4 - 1 = 3 \end{array}\right.$$

Luego la solución es :

❄ **Inversión en A = 3 millones**.
❄ **Inversión en B = 4 millones**.

❄ **Inversión en C = 1 millones**.

Comprobación

◈ Se dispone de **8** millones para invertir ≡ **3 + 4 + 1 = 8**

◈ Entre **A** y **B** se quiere invertir **siete veces más** que en **C** ≡ 3 + 4 = 7·1

◈ La rentabilidad total ha de ser del 5 % ≡ 0'06·3 + 0'05· 4 + 0'02 ·1 = 0'05 ·8⇨ 0'18 + 0'2 + 0'02 = 0'4.

❼ Un inversor dispone de **200 000** euros para invertir en productos financieros. Su banco le propone tres tipos de inversión, a corto (**A**), medio (**B)** y largo plazo (**C**), cuya rentabilidad media es, respectivamente, del **6** %, del **10** % y del **12** %. Si el inversor desea que un **30** % de su capital se invierta a largo plazo y, además, que la rentabilidad final de su dinero sea del **9** %, calcula cuánto ha de invertir en cada tipo de imposición.

---oo0oo---

⊙ **Incógnitas:**

x = Miles de euros invertidos en la inversión A..
y = Miles de euros invertidos en la inversión B.
z = Miles de euros invertidos en la inversión C.

Planteamiento

☒ Cantidad a invertir = 200 000 euros ≡ **x + y + z = 200**.

☒ Rentabilidad de un 9 % ≡ 0'06x + 0'1y + 0'12z = 0'09 · 200, 6x + 10y + 12z = 1800, que simplificada queda **3x + 5y + 6z = 900**

☒ Inversión a largo plazo un 30 % ≡ **z = 0'3·200 = 60** mil euros.

Resolución

Utilizamos el método de Gauss :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =200 \\ 3x & +5y & +6z & =900 \\ & & z & =60 \end{array}\right\} \text{matriz} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 200 \\ 3 & 5 & 6 & \| & 900 \\ 0 & 0 & 1 & \| & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 200 \\ 0 & 2 & 3 & \| & 300 \\ 0 & 0 & 1 & \| & 60 \end{pmatrix} \text{escalonada}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =200 \\ & 2y & +3z & =300 \\ & & z & =60 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} z=60 \\ y=\frac{300-3z}{2}=\frac{300-3\cdot 60}{2}=\frac{120}{2}=60 \\ x=200-y-z=200-60-60=80 \end{array}\right.$$

La solución es :

☺ **Inversión a corto plazo = 80 000 euros.**
☺ **Inversión a medio plazo = 60 000 euros**
☺ **Inversión a largo plazo = 60 000 euros**

Comprobación

☒ Cantidad a invertir = 200 000 euros ≡ **80 000 + 60 000 + 60 000 = 200 000**.

☒ Rentabilidad de un 9 % ≡ 0'06· 80 + 0'1· 60 + 0'12· 60 = 0'09 · 200; 4'8 + 6 + 7'2 = 18

☒ Inversión a largo plazo un 30 % ≡ **z = 0'3·200 = 60** mil euros.

❽ Un inversor dispone de **10** millones de euros para adquirir tres productos financieros, **A**, **B** y **C**. De éstos se sabe que rentan, respectivamente, un **5** %, un **4** % y un **3** %. Calcula cuántos millones de euros tiene que invertir en cada producto para obtener una rentabilidad global del **4,3** % si, por otra parte, el inversor desea gastar en el producto **A tanto como** en los otros **dos** juntos.

---oo0oo---

⊙ **Incógnitas:**

x = Millones de euros invertidos en la inversión **A**..
y = Millones de euros invertidos en la inversión **B**.
z = Millones de euros invertidos en la inversión **C**.

Planteamiento

◆ Cantidad a invertir = 10 millones ≡ **x + y + z = 10**.
◆ Rentabilidad global del 4'3 % ≡ 0'05x + 0'04y + 0'03z = 0'043 · 10, lo que equivale a **5x + 4y + 3z = 43** .
◆ Inversión en A tanto como en las otras dos juntas ≡ x = y + z, es decir **x - y - z = 0**

.

El sistema es :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =10 \\ 5x & +4y & +3z & =43 \\ x & -y & -z & =0 \end{array}\right\}$$

Resolución

Utilizamos el método de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 43 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-5F_1 \\ F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{F_3-2F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \text{escalonada}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =10 \\ & -y & -2z & =-7 \\ & & 2z & =4 \end{array}\right\} \text{resolviendo de abajo hacia arriba} \left\{\begin{array}{c} z=\frac{4}{2}=2 \\ y=7-2z=7-4=3 \\ x=10-y-z=10-3-2=5 \end{array}\right\}$$

La solución :

☺ **Millones invertidos en A = 5**.

☺ **Millones invertidos en B = 3.**

☺ **Millones invertidos en C = 2.**

Comprobación

◆ Cantidad a invertir = 10 millones ≡ **5 + 3 + 2 = 10**.

◆ Rentabilidad global del 4'3 % ≡ 0'05· 5 + 0'04·3 + 0'03·2 = 0'043 · 10, es decir 0'25 + 0'12 + 0'06 = 0'43.

◆ Inversión en **A** tanto como en las otras dos juntas ≡ 5 = 3 + 2.

❾ Una persona utiliza la **mitad** de sus ahorros en comprar *bonos* del Estado, y la **otra mitad** en comprar *acciones*. En *conjunto*, la rentabilidad de su inversión es del **10** %. Pasado un tiempo se da cuenta de que si hubiese invertido un **40**% en *acciones* y el resto en *bonos*, su rentabilidad hubiese sido del **11** %. Determina la rentabilidad media de los bonos y las acciones por separado.

---oo0oo---

⊙ **Incógnitas:**

x = Rentabilidad media de los bonos (en %).

y = Rentabilidad media de las acciones (en %).

Planteamiento

⭘ Al distribuir la mitad en cada inversión, consigue una rentabilidad del 10 %

0'5x + 0'5y = 10 es decir 5x + 5y = 100 ó x + y = 20.

⭘ Al distribuir un 40 % en acciones (un 60 % por tanto en bonos) consigue una rentabilidad del 11 % : 0'6x + 0'4 y = 11, o sea 6x + 4y = 110, ó 3x + 2y = 55.

El sistema a resolver es : $\left.\begin{array}{rl} x + y &= 20 \\ 3x + 2y &= 55 \end{array}\right\}$

Resolución

Utilizamos el método de Gauss :

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$ escalonada → $\left.\begin{array}{rl} x + y &= 20 \\ -y &= -5 \end{array}\right\}$, que resolvemos de abajo a arriba :

$$\left\{\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 20 - y = 20 - 5 = 15 \end{array}\right.$$

La solución :

☺ **Rentabilidad de los bonos = 15 %.**

☺ **Rentabilidad de las acciones = 5 %.**

Comprobación

⭘ Al distribuir la mitad en cada inversión, consigue una rentabilidad del 10 %

0'5·15 + 0'5·5 = 10.

✪ Al distribuir un 40 % en acciones (un 60 % por tanto en bonos) consigue una rentabilidad del 11 % : 0’6·15 + 0’4·5 = 11.

❿ Una empresa M sector de la alimentación produce tres tipos de bombones **A**, **B** y **C**, que vende a **0’3**, **0’4** y **0’5** euros por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere lanzar al mercado una nueva caja de bombones variados que contenga **diez** unidades y valga **4’5** euros ¿cuántos bombones de cada clase debe colocar en la caja?

---oo0oo---

⦿ **Incógnitas:**

x = nº de bombones del tipo **A**.
y = nº de bombones del tipo **B**.
z = nº de bombones del tipo **C**.

✍ **Planteamiento**

✶ La nueva caja ha de tener 10 bombones ≡ **x + y + z = 10**.

✶ La nueva caja ha de valer 4’5 euros ≡ 0’3x + 0’4y +0’5 z = 4’5,es decir **3x + 4y + 5z = 45.**

El sistema, de dos ecuaciones con tres incógnitas, es : $\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =10 \\ 3x & +4y & +5z & =45 \end{array}\right\}$

✍ **Resolución**

Utilizamos el método de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 10 \\ 3 & 4 & 5 & \| & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 10 \\ 0 & 1 & 2 & \| & 15 \end{pmatrix} \text{escalonada} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =10 \\ & y & +2z & =15 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible e indeterminado uniparamétrico, si hacemos z = λ, y despejamos en cascada ascendente, tenemos :

$$\left\{\begin{array}{c} z=\lambda \\ y=15-2z=15-2\lambda \\ x=10-y-z=10-15+2\lambda-\lambda=\lambda-5 \end{array}\right.$$

Aunque en principio habría infinitas soluciones, teniendo en cuenta que el nº de bombones no tiene sentido si es negativo, hemos de introducir unas restricciones :

a) Para que y ≥ 0 ⇒ 15 - 2 λ ≥ 0 ⇒ 15 ≥ 2 λ ⇒ λ ≤ 15/2.
b) Para que x ≥ 0 ⇒ λ - 5 ≥ 0, es decir λ ≥ 5.

De las restricciones anteriores deducimos 5 ≤ λ ≤ 15/2 , es decir λ puede valer 5, 6 y 7, con lo cual las posibles soluciones se reducen a tres :

① λ = 5 ⇒ **x** = λ - 5 = 5 - 5 = **0**, **y** = 15 - 2 λ = 15 - 10 = **5** y z = λ = **5.**
② λ = 6 ⇒ **x** = λ - 5 = 6 - 5 = **1**, **y** = 15 - 2 λ = 15 - 12 = **3** y z = λ = **6**.

③ $\lambda = 7 \Rightarrow$ **x** $= \lambda - 5 = 7 - 5 =$ **2**, **y** $= 15 - 2\lambda = 15 - 14 =$ **1** y $z = \lambda =$ **7**.

Es decir :

① **5 bombones del tipo B y 5 del tipo C**.
② **1 bombón del tipo A, 3 del tipo B y 6 del tipo C**
③ **2 bombones del tipo A, 1 del tipo B y 7 del tipo C**

Comprobación

✶ La nueva caja ha de tener 10 bombones:
① $5 + 5 = 10$.
② $1 + 3 + 6 = 10$.
③ $2 + 1 + 7 = 10$

✶ La nueva caja ha de valer 4'5 euros:
① $0'3\cdot 0 + 0'4\cdot 5 + 0'5\cdot 5 = 4'5$.
② $0'3\cdot 1 + 0'4\cdot 3 + 0'5\cdot 6 = 4'5$.
③ $0'3\cdot 2 + 0'4\cdot 1 + 0'5\cdot 7 = 4'5$.

ACTIVIDADES (Pág. 43 y sig.)

Cuestiones

❶ ¿Es posible que un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas sea compatible determinado? Razona la respuesta.

---oo0oo---

Si, si la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos que son compatibles y determinadas. Por ejemplo el sistema :

$\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$, es compatible y determinado con solución x = 3, y = 2, si añadimos una tercera ecuación combinación lineal de las anteriores ($2E_2 + E_1$) $11x + y = 35$, el sistema sigue siendo compatible y determinado (¡ compruébalo !)

$$\left.\begin{array}{r} 5x - y = 13 \\ 3x + y = 11 \\ 11x + y = 35 \end{array}\right\}$$

❷ ¿Puede ser incompatible un sistema homogéneo? Razona la respuesta.

---oo0oo---

No, un sistema homogéneo (términos independientes nulos) siempre tiene una solución, la trivial : que las incógnitas sean igual a cero.

❸ Si al operar con las filas de la matriz ampliada asociada a un sistema aparece una fila cuyos elementos son todos nulos, ¿podemos asegurar que el sistema es compatible indeterminado? Razona la respuesta.

---oo0oo---

No, se ha discutido en la cuestión nº 1, a ella nos remitimos.

❹ Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución sea x = 1, y = -2 y z = 5.- Describe el procedimiento que has utilizado.

Sea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas genérico :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + a_2y + a_3z = a \\ b_1x + b_2y + b_3z = b \\ c_1x + c_2y + c_3z = c \end{array}\right\}, \text{ sustituimos las incógnitas por su solución: } \left.\begin{array}{l} a_1 - 2a_2 + 5a_3 = a \\ b_1 - 2b_2 + 5b_3 = b \\ c_1 - 2c_2 + 5c_3 = c \end{array}\right\}$$

es suficiente fijar ahora los valores de a_i , b_i, y c_i :

	a	b	c
1	1	2	-1
2	1	3	-2
3	1	1	1

para obtener los términos independientes y construir el sistema :

a = 1- 2·1 + 5·1 = 4; b = 2 - 2·3 + 5·1 = 1 y c = -1 -2·(-2) +5· (-1) = -1 + 4 - 5 = -2 , luego :

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ -x - 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

Ejercicios y problemas

❺ Averigua cuál o cuáles de las ternas siguientes son solución de la ecuación x + y - z = 2:

a) (2,3, -1) **b)** (0, 7, 2) **c)** (10, 1, 9)

---oo0oo---

Sustituyendo las ternas averiguamos cuáles cumplen la ecuación :

a) 2 + 3 - (-1) = 6 ≠ 2 ⇨ **No es solución**.
b) 0 + 7 - 2 = 5 ≠ 2 ⇨ **No es solución**
c) 10 + 1 - 9 = 2 ⇨ **Sí es solución**

❻ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x \;-y \;+2z \;=1 \\ x \;+y \;+z \;=3 \\ 2x \;-2y \;-3y \;=-2 \end{array}\right\}$$

averigua cuál o cuáles de las ternas siguientes son solución:

a) (4,0,3) **b)** (1, - 1, 2) **c)** (1, 2, 0)

---oo0oo---

Una terna es solución de un sistema si lo es de todas sus ecuaciones, sustituyamos las soluciones en el sistema para comprobar cuáles lo cumplen :

$$a)\left.\begin{array}{l} 3\cdot 4 \;-0 \;+2\cdot 3 \;=18\neq 1 \\ \\ \\ \end{array}\right\} b)\left.\begin{array}{l} 3\cdot 1 \;-(-1) \;+2\cdot 2 \;=8\neq 1 \\ \\ \\ \end{array}\right\} c)\left.\begin{array}{llll} 3\cdot 1 & -2 & +0 & =1 \\ 1 & +2 & +0 & =3 \\ 2\cdot 1 & -2\cdot 2 & -0 & =-2 \end{array}\right\}$$

comprobamos que sólo la terna c) cumple las tres ecuaciones del sistema y es solución.

❼ Resuelve, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes:

$$a)\left.\begin{array}{l} -x \;-2y \;-z \;=-4 \\ x \;+3y \;+z \;=5 \\ 4x \;+2y \;+2z \;=8 \end{array}\right\}, b)\left.\begin{array}{l} x+\;y+\;z \;=3 \\ 2x-\;y+\;2z =0 \\ 2x \;+\;3z =3 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

$$a)\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & \| & -4 \\ 1 & 3 & 1 & \| & 5 \\ 4 & 2 & 2 & \| & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \\ F_2+F_1 \\ F_3+4F_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & \| & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \| & 1 \\ 0 & -6 & -2 & \| & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \to \\ F_3+6F_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & \| & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \| & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \| & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} -x-\;2y-\;\;z \;=-4 \\ \quad\quad y \quad\quad\;\; =1 \\ \quad\quad\quad -2z =-2 \end{array}\right\}$$, de la tercera se deduce que z = 1, de la 2ª y = 1, de la 1ª x = 4 - 2y - z = 2 -2 - 1 = 1,es decir **x = 1, y = 1, z = 1**.

$$b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 3 \\ 2 & -1 & 2 & \| & 0 \\ 2 & 0 & 3 & \| & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 3 \\ 0 & -3 & 0 & \| & -6 \\ 0 & -2 & 1 & \| & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \to \\ 3F_3-2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \| & 3 \\ 0 & -3 & 0 & \| & -6 \\ 0 & 0 & 3 & \| & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} x \;+y \;+z \;=3 \\ \;\;-3y \quad\;\; =-6 \\ \quad\quad\;\; 3z \;=3 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} x=3-y-z=3-2-1=0 \\ y=\frac{-6}{-3}=2 \\ z=\frac{3}{3}=1 \end{array}$$

,la solución : **x = 0, y = 2, z = 1**

❽ Clasifica según sus soluciones, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes:

$$a)\ \left.\begin{array}{rrrr}2x & -y & +z & =1\\ x & -2y & +3z & =4\\ x & +y & +3z & =0\end{array}\right\},\ b)\ \left.\begin{array}{rrrr}5x & -2y & +z & =-1\\ -2x & +y & -3z & =4\\ 3x & -y & -2z & =0\end{array}\right\},\ c)\ \left.\begin{array}{rrrr}3x & +2y & -z & =1\\ -2x & +3y & -2z & =-1\\ x & +5y & -3z & =0\end{array}\right\}$$

---oo0oo---

A estas alturas del tema el método de Gauss, no necesita explicación alguna, nos limitamos a aplicarle :

$$a)\left(\begin{array}{rrr||r}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{rrrr}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\begin{subarray}{c}F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{subarray}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{rrrr}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -7\\ 0 & 3 & -2 & -4\end{array}\right)\underset{F_3-F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right)$$, matriz escalonada a la que corresponde un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas **compatible y determinado** (solución única).

$$b)\left(\begin{array}{rrr|r}5 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -3 & 4\\ 3 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\left(\begin{array}{rrr|r}-2 & 5 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -3 & 4\\ -1 & 3 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & -3 & 4\\ -2 & 5 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -2 & 0\end{array}\right)\underset{\begin{subarray}{c}F_2+2F_1\\ F_3+F_1\end{subarray}}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 1 & -5 & 4\end{array}\right)\underset{F_3-F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 11\end{array}\right)$$

Matriz escalonada cuyo sistema tiene la tercera ecuación sin solución, luego es **incompatible**.

$$c)\left(\begin{array}{rrr|r}3 & 2 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & -1\\ 1 & 5 & -3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -3 & 0\\ -2 & 3 & -2 & -1\\ 3 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{\begin{subarray}{c}F_2+2F_1\\ F_3-3F_1\end{subarray}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 13 & -8 & -1\\ 0 & -13 & 8 & 1\end{array}\right)\underset{F_3+F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 13 & -8 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$, matriz escalonada que corresponde a un sistema con dos ecuaciones y una incógnita, por tanto **compatible e indeterminado uniparmétrico**.

❾ Dadas las dos ecuaciones siguientes: $3x + y + 2z = 0$, $x + 5y - z = 1$ escribe una tercera ecuación para que el sistema resultante sea, en cada caso, incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

---oo0oo---

① **Incompatible**. Para que al añadir una ecuación el sistema formado por las tres resulte incompatible, la ecuación añadida ha de ser incompatible con alguna de las dos ya existentes. Para que una ecuación sea incompatible a otra dada ha de tener los coeficientes de las incógnitas proporcionales y el término independiente no. Sean las ecuación $a_1 + b_1\, y + c_1\, z = k_1$ y $a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = k_2$, para que sean incompatibles ha de cumplirse :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{k_1}{K_2}$$

Si añadimos una ecuación incompatible con la segunda, por ejemplo, 2x + 10y - 2z = 7, el sistema :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +y & +2z & =0 \\ x & +5y & -z & =1 \\ 2x & +10y & -2z & =7 \end{array}\right. \quad \text{, incompatible .}$$

② **Compatible y determinado**. Debemos añadir una ecuación que no tenga los coeficientes proporcionales con ninguna de las dadas ni sea combinación lineal, por ejemplo -x +3y +5z = 3 :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x+ & y+ & 2z= & 0 \\ x+ & 5y- & z= & 1 \\ -x+ & 3y+ & 5z= & 3 \end{array}\right. \quad \text{, compatible y determinado}$$

③ **Compatible e indeterminado**. Ahora hemos de añadir una ecuación que sea combinación lineal de las anteriores. Por ejemplo su suma : 4x + 6y + z = 1 :

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=0 \\ x+5y-z=1 \\ 4x+6y+z=1 \end{array}\right\} \text{, compatible e indeterminado.}$$

❿ Clasifica según sus soluciones, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes. Resuelve los casos de compatibilidad.

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{array}\right\}\text{, b)}\ \left.\begin{array}{l} x-2y+2z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \rightarrow \\ \ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \ \\ \rightarrow \\ F_3-5F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =1 \\ & -y & -2z & =0 \\ & & 9z & =-3 \end{array}\right\}$$

Sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, luego compatible y determinado. Para hallar la solución, despejamos las incógnitas en cascada inversa de abajo a arriba :

z = -3/ 9 = -1/3 ; y = -2z = 2/3 ; x = 1 - y - z = 1 - 2/3 + 1/3 = 2/3

$$b)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & =1 \\ & 3y & -3z & =0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene tres incógnitas y dos ecuaciones, luego es **compatible** e **indeterminado uniparamétrico**. La solución es :

$$\left.\begin{array}{r} z=\lambda \\ y=z=\lambda \\ x=1+2y-2z=1+2\lambda-2\lambda=1 \end{array}\right\}$$

❶❶ Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss, en el caso de ser compatibles.

$$a) \left.\begin{array}{rrrl} 2x & +4y & -2z & =-4 \\ x & +y & -z & =1 \\ 3x & +3y & -3z & =3 \\ 4x & +4y & -4z & =4 \\ 5x & +7y & -5z & =-1 \end{array}\right\}; b) \left.\begin{array}{rrrl} 3x & -2y & +7z & =1 \\ x & -5y & +2z & =8 \\ -2x & +10y & -4z & =-16 \end{array}\right\}; c) \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & & =5 \\ x & +y & +2z & =2 \\ 2x & +y & +z & =11 \\ & y & +z & =7 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

a) Se aprecia a simple vista que la 3ª ecuación es igual a la 2ª multiplicada por 3 y que la 4ª es la 2ª por 4, luego pueden suprimirse la 3ª y 4ª y, poniendo la 2ª en primer lugar, la matriz ampliada queda :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & -2 & | & -4 \\ 5 & 7 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ y el sistema} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =1 \\ & 2y & & =-6 \end{array}\right\},$$ tiene 3 incógnitas y dos ecuaciones, luego es **compatible** e **indeterminado**.

Las soluciones, si z =λ :

$$\begin{cases} z=\lambda \\ y=\frac{-6}{2}=-3 \\ x=1-y+z=1+3+\lambda=4+\lambda \end{cases}$$

$$b)\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & | & 1 \\ 1 & -5 & 2 & | & 8 \\ -2 & 10 & -4 & | & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & | & 8 \\ 3 & -2 & 7 & | & 1 \\ -2 & 10 & -4 & | & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & | & 8 \\ 0 & 13 & 1 & | & -23 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\left.\begin{array}{l} x \ -5y \ +2z \ =8 \\ \quad 13y \ +z \ =-23 \end{array}\right\}$, sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas **compatible e indeterminado**.

Si z = λ, las soluciones son :

$$\begin{cases} z=\lambda \\ y=\frac{-23-z}{13}=-\frac{23+\lambda}{13} \\ x=8+5y-2z=8-\frac{115+5\lambda}{13}-2\lambda=-\frac{11+31\lambda}{13} \end{cases}$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 11 \end{pmatrix}, \text{ escalonada}$$

La ultima fila se corresponde con una ecuación imposible, luego el sistema es **incompatible**.

❶❷ Discute y resuelve, en función del parámetro k, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{llll} kx & +k^2y & +k^3z & =k \\ x & +ky & +k^2z & =k^2 \\ x & +y & +kz & =k^3 \\ x & +y & +z & =k^4 \end{array}\right\}$$

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & | & k \\ 1 & k & k^2 & | & k^2 \\ 1 & 1 & k & | & k^3 \\ 1 & 1 & 1 & | & k^4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & | & k^2 \\ k & k^2 & k^3 & | & k \\ 1 & 1 & k & | & k^3 \\ 1 & 1 & 1 & | & k^4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - kF_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & | & k^2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-k & k-k^2 & | & k^3-k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & k^4-k^2 \end{pmatrix} F_2 \leftrightarrow F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & | & k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & k^4-k^2 \\ 0 & 1-k & k-k^2 & | & k^3-k^2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & | & k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & k^4-k^2 \\ 0 & 0 & k-1 & | & k^3-k^4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \text{ escalonada}$$

La última fila es nula, se suprime, y el sistema resultante depende de k - 1:

✽ Si k = 1

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$, y queda x + y + z = 1, sistema **compatible indeterminado biparamétrico**, de solución : **z** = λ, **y** = μ , **x** = 1 - y - z = 1-λ - μ.

✽ Si k ≠ 1, el sistema es **compatible** y **determinado** (3 ecuaciones y tres incógnitas).

La solución, empezando por la ultima ecuación, es :

$$z = \frac{k^3(1-k)}{-(1-k)} = -k^3; y = \frac{k^4 - k^2 - (k^2-1)\cdot k^3}{1-k} = \frac{k^2\cdot(k^2-1)\cdot(1-k)}{1-k} = k^2\cdot(k^2-1); x = k^2 - k^2 z - ky =$$

$$= k^2 + k^5 - k^2\cdot k^2\cdot(k^2-1) = k^2 + k^5 - k^6 + k^4 = k^2(-k^4 + k^3 + k^2 + 1)$$

Una caso particular es cuando k = 0, pues el sistema sería homogéneo y tendría la solución trivial x = 0, y = 0 y z = 0.

❶❸ Un campesino cultiva manzanas de tres tipos **A**, **B** y **C**. En promedio, cada árbol del tipo **A** produce **50** kg de manzanas por cosecha; cada árbol del tipo **B**, **30** kg; y cada árbol del tipo **C**, **40** kg. Sabemos que actualmente obtiene **230** t de manzanas por cosecha y nos proporciona la siguiente información:

• Si **arrancara todos** los manzanos del tipo **B** y los **sustituyera** por manzanos del tipo **A**, cosecharía **250** t.

• Si **arrancara todos** los manzanos del tipo **C** y los **sustituyera** por manzanos del tipo **B**, cosecharía **200** t.

¿Cuántos manzanos de cada clase tiene plantados actualmente?

---oo0oo---

Sean :

x = manzanos del tipo **A** plantados.
y = manzanos del tipo **B** plantados.
z = manzanos del tipo **C** plantados.

Planteamiento

✡ La cosecha actual es de 230 t ≡ 50x + 30y + 40z = 230[2], o sea **5x + 3y + 4z = 23**.

✡ La cosecha, si arrancamos los de tipo B y los sustituimos por tipo A, es 250 t ≡ 50x +50y + 40z = 250, es decir **5x + 5y + 4z = 25**.

✡ La cosecha, si arrancamos los de tipo C y sustituimos por tipo B, sería de 200 t ≡ 50x + 30y +30z = 200, es decir **5x + 3y + 3z = 20**.

El sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es :

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y+4z &= 23 \\ 5x+5y+4z &= 25 \\ 5x+3y+3z &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Resolución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 23 \\ 5 & 5 & 4 & 25 \\ 5 & 3 & 3 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 23 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right), \text{ y el sistema } \left.\begin{array}{r} 5x+3y+4z=23 \\ 2y\qquad=2 \\ -z=-3 \end{array}\right\}$$

que resolvemos escalonadamente en orden inverso **z = 3 000** árboles, **y** = 2/2 = **1 000; x** = (23 000 - 3y - 4z) / 5 = (23 000 - 3· 1 000 - 4· 3 000) / 5 = (23 000 - 3 000 - 12 000)/ 5 = 8 000 /5 = **1 600**. Es decir **1 600 del tipo A, 1 000 del tipo B y 3 000 del tipo C**.

Comprobación

✡ La cosecha actual es de 230 t ≡ 50· 1 600 + 30 · 1 000 + 40 · 3 000 = 80 000 + 30 000 + 120 000 = 230 000 kg = 230 t .

✡ La cosecha si arrancamos los de tipo B y los sustituimos por tipo A es 250 t ≡ 50 · 1 600 +50 · 1 000 + 40 · 3 000 = 80 000 + 50 000 + 120 000 = 250 000 kg = 250 t.

✡ La cosecha si arrancamos los de tipo C y sustituimos por tipo B sería de 200 t ≡ 50· 1 600 + 30·1 000 +30·3 000 = 80 000 + 30 000 + 90 000 = 200 000 kg = 200 t.

❶❹ Una cadena comercial tiene tres establecimientos, que llamaremos **A**, **B** y **C**, en los que vende diversos dispositivos de aprovechamiento de la energía solar.

- El establecimiento **A** vendió el año pasado **15** *paneles fotovoltaicos*, **10** *termosifones* y **15** *colectores*, por los que ingresó en total **1010 000** euros.

[2] Téngase en cuenta que la producción de cada tipo está en kg y la total en t.

- El establecimiento **B** vendió **12** *paneles fotovoltaicos* **10** *termosifones* y **5** *colectores*, por los que ingresó en total **590000** euros.
- El establecimiento **C** vendió **8** *paneles fotovoltaicos* **20** *termosifones* y **10** *colectores*, por los que ingresó en total **780 000** euros.

Si el precio de venta de cada producto es el **mismo** en los **tres** establecimientos, calcula el precio de cada uno de los tres dispositivos solares.

---oo0oo---

Sea : x = precio de cada *panel fotovoltaico*.
y = precio de cada *termosifón*
z = precio de cada *colector*.

Planteamiento y resolución

Sin más que tener las condiciones del enunciado se deducen las 3 ecuaciones multiplicando las cantidades de cada elemento por su precio e igualando al ingreso total (en miles) :

$$\left.\begin{array}{r} 15x+10y+15z=1010 \\ 12x+10y+5z=590 \\ 8x+20y+10z=780 \end{array}\right\} \text{simplificado}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y+3z=202 \\ 12x+10y+5z=590 \\ 4x+10y+5z=390 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 202 \\ 12 & 10 & 5 & 590 \\ 4 & 10 & 5 & 390 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-4F_1 \\ 3F_3-4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 202 \\ 0 & 2 & -7 & -218 \\ 0 & 22 & 3 & 362 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ F_3-11F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 202 \\ 0 & 2 & -7 & -218 \\ 0 & 0 & 80 & 2760 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y+3z=202 \\ 2y-7z=-218 \\ 80z=2760 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} z=\frac{2760}{80}=34'5 \\ y=\frac{-218+7z}{2}=\frac{-218+241'5}{2}=11'75 \\ x=\frac{202-2y-3z}{3}=\frac{202-2\cdot 11'75-3\cdot 34'5}{3}=25 \end{array}\right.$$

La solución es pues **x = 25 000 euros, y = 11 750 euros, z = 34 500 euros**.

Para la comprobación hay que multiplicar los precios por las cantidades y comparar totales.

❶❺ Averigua el precio del *gel de baño*, de la *crema* de *manos* y del *suavizante* en el centro comercial donde compraron las siguientes cuatro personas:

- La primera pagó **7,65** euros por **tres** *geles* de *baño*, **dos** *cremas* de *manos* y **un** *suavizante*.
- La segunda pagó **7,65** euros al comprar **cuatro** *geles* de *baño* y **tres** *cremas* de *manos* y devolver **un** *suavizante*.

- A la tercera, que compró **un** *gel* de *baño* y devolvió **una** *crema* de *manos* y **un** *suavizante*, le devolvieron **95** céntimos de euro

- La cuarta pagó **2,05** euros por comprar **dos** *cremas* de *manos* y **un** *suavizante* y devolver **un** *gel* de *baño*.

---oo0oo---

Sean: x = Precio del gel de baño.
y = precio de la crema de manos.
z = precio del suavizante.

Planteamiento

Hay cuatro personas que compran artículos, habrá cuatro ecuaciones, que se obtienen a multiplicar el nº de artículos por sus precios (incógnitas) e igualar su suma al dinero pagado:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=7'65 \\ 4x+3y-z=7'65 \\ x-y-z=-0'95 \\ -x+2y+z=2'05 \end{array}\right\}$$

Resolución

Escribimos la matriz ampliada intercambiando la 1ª ecuación por la 4ª :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2'05 \\ 4 & 3 & -1 & 7'65 \\ 1 & -1 & -1 & -0'95 \\ 3 & 2 & 1 & 7'65 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2+4F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4+3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2'05 \\ 0 & 11 & 3 & 15'85 \\ 0 & 1 & 0 & 1'1 \\ 0 & 8 & 4 & 13'8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3 \leftrightarrow F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2'05 \\ 0 & 1 & 0 & 1'1 \\ 0 & 11 & 3 & 15'85 \\ 0 & 8 & 4 & 13'8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3-11F_2 \\ F_4-8F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2'05 \\ 0 & 1 & 0 & 1'1 \\ 0 & 0 & 3 & 3'75 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ 3F_4-4F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2'05 \\ 0 & 1 & 0 & 1'1 \\ 0 & 0 & 3 & 3'75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+2y+z=2'05 \\ y=1'1 \\ 3z=3'75 \end{array}\right\}$$

Luego la solución es : z = 3’75/3 = 1’25 ; y = 1’1 ; x = 2y + z - 2’05 = 2’2 + 1’25 -2’05 = 1’4 ⇨ **Precio del gel = 1’4 euros, precio de la crema = 1’1 euros y precio del suavizante = 1’ 25 euros**

La comprobación es inmediata sin más que hallar los importes totales de las cuatro personas.

❶❻ Cuatro personas cambiaron moneda extranjera para visitar la Exposición Universal de Sevilla celebrada en 1992:

- La ***primera*** de ellas cambió **100** *dólares*, **100** *francos* y **40** *marcos*, y recibió en total **20 280 ptas**.

• La ***segunda*** cambió **50** *dólares*, **120** *francos* y **50** *marcos*, y recibió en total **14 070** ptas.

• La ***tercera*** cambió **75** *dólares*, **150** *francos* y **100** *marcos*, y recibió en total **22 525** ptas.

• La ***cuarta*** cambió **50** *dólares* y **20** *marcos*, y recibió en total **9 090** ptas.

¿Cuál fue ese día la cotización de cada una de las tres monedas?

---oo0oo---

Incógnitas

x = cotización del dólar.
y = cotización del franco.
z = cotización del marco.

Planteamiento

Primera 100x + 100y + 40z = 20 280 y simplificada **5x + 5y + 2z = 1 014**.

Segunda 50x + 120y + 50z = 14 070 y simplificada **5x + 12y + 5z = 1 407**

Tercera 75x + 150y + 100z = 22 525 y simplificada **3x + 6y + 4z = 901**.

Cuarta 50x + 20z = 9 090 y simplificada **5x + 2z = 909.**

El sistema a resolver, de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, es :

$$\left.\begin{array}{llll} 5x & +5y & +2z & =1014 \\ 5x & +12y & +5z & =1407 \\ 3x & +6y & +4z & =901 \\ 5x & & +2z & =909 \end{array}\right\}$$

Resolución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 1014 \\ 5 & 12 & 5 & 1407 \\ 3 & 6 & 4 & 901 \\ 5 & 0 & 2 & 909 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2 - F_1 \\ 5F_3 - 3F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 1014 \\ 0 & 7 & 3 & 393 \\ 0 & 15 & 14 & 1463 \\ 0 & -5 & 0 & -105 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ 7F_3 - 15F_2 \\ 7F_4 + 5F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 1014 \\ 0 & 7 & 3 & 393 \\ 0 & 0 & 53 & 4346 \\ 0 & 0 & 15 & 1230 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ 53F_4 - 15F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 1014 \\ 0 & 7 & 3 & 393 \\ 0 & 0 & 53 & 4346 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} 5x & +5y & +2z & =1014 \\ & 7y & +3z & =393 \\ & & 53z & =4346 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} z = \frac{4346}{53} = 82 \\ y = \frac{393-3z}{7} = \frac{393-246}{7} = \frac{147}{7} = 21 \\ x = \frac{1014-5y-2z}{5} = \frac{1014-105-164}{5} = \frac{745}{5} = 149 \end{cases}$$

Luego el cambio estaba : **Dólar a 149 pts, franco a 21 ptas y marco a 82 ptas**.

Para la comprobación sustituye en las ecuaciones y comprueba los totales.

❶❼ Una editorial puso a la venta tres libros de astronomía **A**, **B** y **C**. El libro **A** se vendió a **28** euros el **B** a **30** euros y el **C** a **25** euros Calcula cuántos ejemplares se vendieron de cada uno de los tres libros, sabiendo que:

- La editorial ingresó en total **4 280 000** euros
- El libro **A** se vendió **tres** veces **más** que el **B**.
- El libro **C** se **vendió** como el **A** y el **B juntos**.

---oo0oo---

Incógnitas

x = Libros del tipo **A**..
y = Libros del tipo **B**.
z = Libros del tipo **C**.

Planteamiento

- ❑ Los ingresos fueron de 4 280 000 euros ≡ **28x + 30y + 25z = 4 280 000** .
- ❑ El **A** se vendió tres veces más que el **B** ≡ x = 3y , es decir **x - 3y = 0**.
- ❑ El **C** se vendió igual que los otros **dos juntos** ≡ z = x + y , es decir **x + y - z = 0.**

Para escribir el sistema intercambiamos primera por tercera:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =0 \\ x & -3y & & =0 \\ 28x & +30y & +25z & =4280000 \end{array}\right\}$$

Resolución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 28 & 30 & 25 & | & 4280000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 28F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 53 & | & 4280000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \to \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 107 & | & 8560000 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =0 \\ & -4y & +z & =0 \\ & & 107z & =8560000 \end{array}\right\} \to \begin{cases} z = \frac{8560000}{107} = 80000 \\ y = \frac{z}{4} = \frac{80000}{4} = 20000 \\ x = z - y = 80000 - 20000 = 60000 \end{cases}$$

Se vendieron del tipo **A 60 000 ejemplares, del B 20 000 ejemplares y del C 80 000**.

❶❽ Una empresa invirtió **dos millones** de euros en un producto financiero **A**, **cuatro millones** en otro producto **B** y **dos millones** en otro producto **C** y obtuvo una **rentabilidad total** del **3,5** %.

Calcula la rentabilidad de estos tres productos financieros, **A, B** y **C,** sabiendo que el producto **A** renta **un punto más** que el **B** y que el **C** es **tan rentable** como los **otros dos** juntos.

---oo0oo---

Incógnitas

x = Rentabilidad del **A**..
y = Rentabilidad del **B**.
z = Rentabilidad del **C**.

Planteamiento

✞ La rentabilidad del **A** es un punto más que la del **B** ≡ x = y +1 , **x - y = 1**.
✞ La rentabilidad del **C** es igual a la de los otros dos juntos ≡ z = x + y , **x + y - z = 0**
✞ La rentabilidad total es del 3’5 % ≡ 2x + 4y + 2z = 8 · 3’5 = 28 , **x + 2y + z = 14**.

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & -y & & =1 \\ x & +y & -z & =0 \\ x & +2y & +z & =14 \end{array}\right\}$$

Resolución

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} x & z & y & & \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} x & z & y & & \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & & -y & =1 \\ & -z & +2y & =-1 \\ & & 5y & =12 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{12}{5}=2'4 \\ z=2y+1=4'8+1=5'8 \\ x=y+1=2'4+1=3'4 \end{array}\right.$$

Las rentabilidades son : a: 3’4 %, B 2’4 % y C 5’8 %.

❶❾ Un comerciante compró **500** envases de *leche*, **200** de *zumo* de fruta y **50** paquetes de *café*, y pagó **640** euros en total. Cierto tiempo después había vendido la *leche*, **ganando** un **30** %; el *zumo* de *fruta*, **ganando** un **20** % y el *café*, **perdiendo** un **10** %. Por todo ello obtuvo **768** euros. Sabiendo que el precio de compra de cada envase de *zumo* fue el **60** % del precio de compra de cada paquete de *café*, ¿cuáles fueron los precios de compra y de venta de cada uno de los tres productos?

---oo0oo---

Incógnitas

x = Precio, en euros, de la *leche*.

y = Precio, en euros, del *zumo*.
z = Precio, en euros, del *café*.

✍ **Planteamiento**

❍ El importe total es de 640 euros ≡ 500x + 200y + 50z = 640 ⇨ **50x + 20y + 5z = 64**.

❍ El importe de la venta es de 768 euros ≡ 500·1’3x + 200· 1’2y +50· 0’9z = 768, puesto que: si gana un 30 % en la leche el precio de venta ha de ser 1’3 x (un 130 % del de compra), si gana un 20 % en el zumo su precio de venta ha de ser 1’2y (un 120 % del de compra) y si pierde un 10 % en el café el precio de venta ha de ser 0’9z (un 90% del de compra). La ecuación queda pues **650x + 240y + 45z = 768**.

❍ El precio de compra del zumo (y) fue el 60% del precio de compra del café (z) ≡ y = 0’6z ⇨ y - 0’6z = 0 ⇨ 10y -6z = 0 ⇨ **5y - 3z = 0** .

El sistema es :

$$\left.\begin{array}{rrrl} 50x & +20y & +5z & =64 \\ 650x & +240y & +45z & =768 \\ & 5y & -3z & =0 \end{array}\right\}$$

✍ **Resolución**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 20 & 5 & 64 \\ 650 & 240 & 45 & 768 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2-13F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 20 & 5 & 64 \\ 0 & -20 & -20 & -64 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{4F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 20 & 5 & 64 \\ 0 & -20 & -20 & -64 \\ 0 & 0 & -32 & -64 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 50x & +20y & +5z & =64 \\ 0 & -20y & -20z & =-64 \\ 0 & 0 & -32z & =-64 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} z=\frac{-64}{-32}=2 \\ y=\frac{64-20z}{20}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}=1'2 \\ x=\frac{64-20y-5z}{50}=\frac{64-24-10}{50}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}=0'6 \end{array}$$

✍ **Comprobación.**

❍ El importe total es de 640 euros ≡ 500· 0’6 + 200·1’2 + 50·2 = 300 +240 +100 = 640.

❍ El importe de la venta es de 768 euros ≡ 500·1’3· 0’6 + 200· 1’2·1’2 +50· 0’9·2 = 390 + 288 + 90 = 768 .

❍ El precio de compra del zumo (y) fue el 60% del precio de compra del café (z) ≡ y = 0’6z ⇨ 1’2 = 0’6 · 2.

❷⓿ Una empresa fabrica tres modelos de *frigorífico*, que llamaremos **A**, **B** y C.

♦ Para fabricar el modelo **A** se precisan **dos** horas de trabajo en la unidad de *montaje* y **una** hora en la unidad de *acabado*.

♦ Para fabricar el modelo **B**, **tres** horas en la de *montaje* y **dos** horas en la de *acabado*.

♦ Para fabricar el modelo **C**, **cuatro** horas en la de *montaje* y **dos** horas en la unidad de *acabado*.

Sabiendo que se han terminado **150** *frigoríficos* y que la unidad de *montaje* ha trabajado **460** horas y la de *acabado* **250** horas, calcula cuántos frigoríficos de cada tipo se han producido.

---oo0oo---

Incógnitas

x = Nº de frigoríficos del tipo A.
y = Nº de frigoríficos del tipo B.
z = Nº de frigoríficos del tipo C.

Planteamiento

☒ Frigoríficos fabricados 150 ≡ **x + y + z = 150**.

☒ Horas trabajadas en la unidad de montaje 460 ≡ **2x +3y + 4z = 460**.

☒ Horas trabajadas en la unidad de acabado 250 ≡ **x + 2y + 2z = 250** .

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ 2x+3y+4z=460 \\ z+2y+2z=250 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 2 & 3 & 4 & 460 \\ 1 & 2 & 2 & 250 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 160 \\ 0 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_3-F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 160 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right), \text{ sistema : } \left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ y+2z=160 \\ -z=-60 \end{array}\right\} \text{resolviendo} \left\{\begin{array}{c} z=60 \\ y=160-2y=40 \\ z=150-y-z=50 \end{array}\right.$$

Se fabrican 50 frigoríficos del tipo A , 40 del tipo B y 60 del tipo C.

Comprobación.

☒ Frigoríficos fabricados 150 ≡ **x + y + z = 50 + 40 + 60 = 150**.

☒ Horas trabajadas en la unidad de montaje 460 ≡**2x +3y + 4z =2· 50 + 3 · 40 + 4 ·60 = 100 + 120 + 240 = 460**.

☒ Horas trabajadas en la unidad de acabado 250 ≡ **x + 2y + 2z = 50 + 2 · 40 + 2 · 60 = 50 + 80 + 120 = 250** .