❶ Indica la dimensión de la siguiente matriz e identifica los elementos a_{13}, a_{34} y a_{23}.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ -4 & 9 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

❍ La matriz A tiene 3 filas y 4 columnas, luego su dimensión es **3x4** , A_{3x4} .

❍ Los elementos pedidos son a_{13} = **0**, a_{34}= **2/3** y a_{23} = **2**

❷ Escribe :

a) Una matriz de 3x3 triangular superior.
b) Una matriz de 4x4 triangular inferior.
c) Una matriz diagonal de 5x5.
d) La matriz nula de dimensión 2x4.

---oo0oo---

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\quad b)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\quad d)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

❸ Calcula el rango de las matrices :

$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, está escalonada y tiene tres filas y tres columnas no nulas, luego **R(A) = 3**

$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $F_2 = 2F_1$, luego puede suprimirse, y $F_3 = -F_1$, también puede suprimirse con lo que queda una sola fila y cuatro columnas y por tanto **R(B) = 1**

$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $F_2 = 2F_1$, la suprimimos, $F_3 = -F_1$, también se suprime y queda la matriz : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ que escalonamos intercambiando $C_1 \leftrightarrow C_3$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ que es de 2x4, luego **R(C) = 2**.

❹ Dadas las matrices : $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

calcula :

$a)\quad A+B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4 & 5+6 & 1+7 \\ 3+0 & 9+9 & 0+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ 3 & 18 & 7 \end{pmatrix}$

b) A+B+C=(A+B)+C = $\begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ 3 & 18 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 14 & 8 \\ 4 & 20 & 8 \end{pmatrix}$

c) A–B= A+(-B)= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 0 & -9 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

d) B-A =B +(-A) = $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, observamos una propiedad general : B - A = - (A - B).

e) C - B = C + (-B) = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 0 & -9 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

f) B - C = -(C - B)= $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, como hemos comprobado en el apartado d).

g) 2A = $2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 5 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 9 & 2\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$

h) 3·B = $3\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 18 & 21 \\ 0 & 27 & 21 \end{pmatrix}$

i) -4C = $-4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -12 & 0 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

j) 5A + 4B = $5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 25 & 5 \\ 15 & 45 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 16 & 24 & 28 \\ 0 & 36 & 28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 49 & 33 \\ 15 & 81 & 28 \end{pmatrix}$

k) B–A- 6C = (B-A)+(-6C) = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -18 & 0 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -17 & 6 \\ -9 & -12 & 1 \end{pmatrix}$

l) 5(C-B)+2(C-A)-3B= 5C - 5B + 2C -2A -3B = 7C -8B - 2A =7C + (-8B) +(-2A) =
$7\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\left(-8\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}\right)+\left(-2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -7 & 21 & 0 \\ 7 & 14 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -32 & -48 & -56 \\ 0 & -72 & -56 \end{pmatrix}+\ldots$

$$+\begin{pmatrix} -4 & -10 & -2 \\ -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -43 & -37 & -58 \\ 1 & -76 & -49 \end{pmatrix}$$

❺ Dadas las matrices : $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y C= $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula :

a) A·B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot5+4\cdot2 & 3\cdot0+4\cdot3 \\ 7\cdot5+6\cdot2 & 7\cdot0+6\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 47 & 18 \end{pmatrix}$

b) B·C = $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot9+0\cdot2 & 5\cdot8+0\cdot1 \\ 2\cdot9+3\cdot2 & 2\cdot8+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 45 & 40 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}$

c)A·B·C=(A·B)·C= $\begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 47 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 45 & 40 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 231 & 196 \\ 459 & 394 \end{pmatrix}$

d) 2(B+A·C)= $2\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)=2\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 35 & 28 \\ 75 & 62 \end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix} 40 & 28 \\ 77 & 65 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 80 & 56 \\ 154 & 130 \end{pmatrix}$

❻ Calcula la inversa de las siguientes matrices :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como A es la matriz identidad de orden 3, su matriz inversa es ella misma.

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, utilizamos el método de Gauss - Jordan[1] para hallar B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 3F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} 4F_1-F_2 \\ \rightarrow \\ 4F_3+3F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 12 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 9 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2F_1-3F_3 \\ F_2+F_3 \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 9 & -33 & -12 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 9 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} \frac{1}{24}F_1 \\ \frac{1}{8}F_2 \\ \frac{1}{8}F_3 \end{array}\rightarrow$$

[1] A partir de ahora, por brevedad, llamaremos al método *"de Gauss"*

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & & \frac{9}{24} & -\frac{33}{24} & -\frac{12}{24} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \frac{12}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 0 & 1 & & -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} & \frac{4}{8} \end{array}\right)$$, luego queda $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{24} & -\frac{33}{24} & -\frac{12}{24} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{4}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{11}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, después de simplificar, matriz que también puede escribirse :

$$B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -11 & -4 \\ 0 & 12 & 4 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, para hallar la inversa usaremos también el método de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4+3F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 14 & & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 2F_3+F_2 \\ 2F_4-F_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 24 & & 5 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2F_1-3F_3 \\ F_2-2F_3 \\ \\ F_4-7F_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & & 5 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & & 3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & & 12 & -8 & -14 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ 5F_3-F_4 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & & 5 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & & 3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & & -17 & 13 & 24 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & & 12 & -8 & -14 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \\ \frac{1}{10}F_3 \\ \frac{1}{10}F_4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & -\frac{17}{10} & \frac{13}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$, luego queda :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ -\frac{17}{10} & \frac{13}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 25 & -15 & -30 & 0 \\ 15 & -5 & -20 & 0 \\ -17 & 13 & 26 & -2 \\ 12 & -8 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

❼ Calcula la matriz traspuesta de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Para construir la traspuesta se intercambian filas por columnas :

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

❽ Comprueba que se cumple $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

Vamos a hallar el resultado de los dos miembros de la igualdad y ver si resulta lo mismo.

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallemos ahora $(A^t)^{-1}$ por el método de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{4}F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$, por tanto :

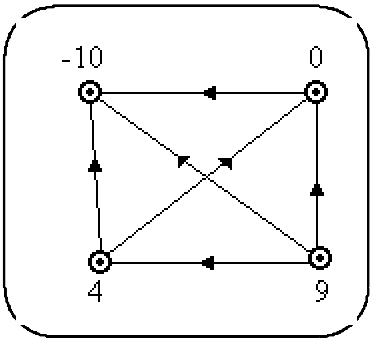
$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que es el resultado del primer miembro. Veamos ahora el segundo, para lo cual primero hallamos A^{-1}, por el método de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{4}F_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$, luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y

por tanto $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que es lo queríamos demostrar.

❾ Representa mediante un grafo la relación *R : es mayor que* en el conjunto C = { -10, 0, 4, 9 } y halla una matriz asociada al grafo anterior.

---oo0oo---

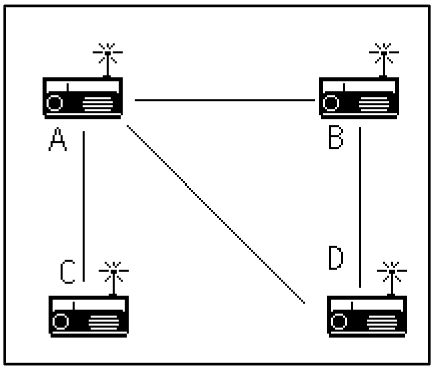


La matriz asociada es:

	-10	0	4	9
-10	0	0	0	0
0	1	0	0	0
4	1	1	0	0
9	1	1	1	0

$$\text{es decir : } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

➓ El grafo de la figura representa las conexiones entre elementos que forman un sistema de radio.



a) Escribe una matriz asociada al grafo.

b) Calcula el número de caminos de comunicación en dos etapas entre cada par de elementos.

---oo0oo---

a) Para hacer la matriz asociamos, a cada par de elementos, conectados un número que indica el número de conexiones. Primero hacemos la tabla (matriz al fin y al cabo) :

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	0
D	1	1	0	0

$$\text{y la matriz } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hemos de hallar $M \cdot M = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, que nos dice que para conectar **A** con **A**, en dos etapas, puede haber tres posibilidades (ver dibujo) **A** - **B** y luego de **B** a **A**, **A** - **C** y **C** - **A** y **A** - **D** y **D** - **A**, pero una sola forma de comunicar **A** con **B** mediante dos caminos (a través de **D**), etc.

➿➿➿♋♋➿➿➿

➋➊ Comprueba que las matrices *input -output* que modelan la economía de Dinerolandía cumple la expresión T · C + B = C.

---oo0oo---

Es una ejercicio de “gimnasia operacional”.

$$T\cdot C + B = \begin{pmatrix} \frac{50}{120} & \frac{15}{130} & \frac{7}{250} \\ \frac{25}{120} & \frac{48}{230} & \frac{15}{250} \\ \frac{70}{120} & \frac{80}{230} & \frac{70}{250} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 230 \\ 250 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50+15+7 \\ 25+48+15 \\ 70++80+70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 88 \\ 220 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 230 \\ 250 \end{pmatrix} = C$$

➿➿➿♋♋➿➿➿

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

➊ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, calcula X para que se cumpla $A^2 \cdot X - B = C$.

Como A^2 y B son cuadradas de 2º orden X habrá de ser también de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Para hallarla hemos calcular primero $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y ahora sustituimos en la ecuación matricial : $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y pasando B al segundo miembro, sumando B y C, y multiplicando el primer miembro, queda :

$\begin{pmatrix} a-4c & b-4d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Como para que sean iguales dos matrices han de ser iguales sus elementos homólogos, se deduce :$\begin{cases} c=1 \\ d=6 \end{cases}$ y $\begin{cases} a-4c=5 \\ b-4d=-13 \end{cases}$, y resolviendo a = 5 + 4c = 5 + 4·1 = 9, b = -13 + 4d = -13 + 4 · 6 = -13 + 24 = 11. La matriz pedida es pues :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

❷ Calcula X para que se cumpla $A^2 \cdot X + B = O$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B $= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pues tiene que ser cuadrada de orden 2, para que pueda sumarse con B que lo es. Hallemos en primer lugar $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ y ahora sustituimos en la ecuación : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, o sea $\begin{pmatrix} a & b \\ 6a+c & 6b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, e igualando elementos : a = 2, b = -1, 6a +c = 10 y 6b + d = -4, despejando las incógnitas que quedan c = 10 - 6a = 10 - 12 = -2 y d = -4 -6b = -4 +6 = 2 , obtenemos la matriz pedida :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

❸ Calcula la matriz X para que cumpla la ecuación A · X · B = 4C, siendo :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Disponemos de dos opciones :

1) Despejar X , $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (4C) \cdot B^{-1}$, es decir $X = A^{-1} \cdot (4C) \cdot B^{-1}$, en donde necesitamos calcular dos matrices inversas.

2) Operando y despejando, opción por la que me decanto :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, o sea $\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -2c & -2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$ y multiplicando las dos matrices del primer miembro :

$\begin{pmatrix} 6a+3c-4b-2d & 2a+c+4b+2d \\ -6c+4d & -2c-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, e igualando elementos nos quedan los sistemas : $\begin{cases} -6c+4d=0 \\ -2c-4d=-16 \end{cases}$ y $\begin{cases} 6a+3c-4b-2d=4 \\ 2a+c+4b+2d=4 \end{cases}$, que resolvemos por reducción : sumando las dos primeras queda -8c = -16 , c = **2** y d = 6c/4 = 12/4 = **3**.

Sumado las dos ecuaciones del segundo sistema queda 8a + 4c = 8; a = (8 -4c) / 8 = **0** y, por último sustituimos en 2a +c + 4b + 2d = 4 y tenemos 0 + 2 + 4b + 6 = 4 de donde b = (4 - 2 - 6) / 4 = -4/4 = **-1** y por tanto la matriz buscada queda :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(comprueba la otra opción)

❹ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula X para que se cumpla A · X · A = I.

---oo0oo---

Es parecido al ejercicio anterior, luego tenemos los dos posibles caminos citados. Como el anterior ejercicio lo hemos resuelto basándonos en la igualdad de matrices , vamos ahora a usar las operaciones entre matrices.

Si A es inversible (regular) podemos multiplicar por la izquierda y derecha por la inversa ambos miembros : $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot A^{-1}$, luego $X = A^{-1} \cdot I \cdot A^{-1}$, tenemos pues que hallar la inversa de A lo que hacemos por el método de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = A^{-1} \cdot I \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❺ En un determinado país, las matrices de transacciones intersectoriales y de demanda final en cierto año son las siguientes :

$$A=\begin{pmatrix}45 & 15 & 9\\ 30 & 42 & 22\\ 90 & 70 & 65\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}44\\ 135\\ 40\end{pmatrix}$$

Halla la matriz de *outputs* totales

---oo0oo---

Sabemos que se cumple : T · C + B = C . Llamando $C=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ y sustituyendo :

$$\begin{pmatrix}\frac{45}{a} & \frac{15}{b} & \frac{9}{c}\\ \frac{30}{a} & \frac{42}{b} & \frac{22}{c}\\ \frac{90}{a} & \frac{70}{b} & \frac{65}{c}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}44\\ 135\\ 40\end{pmatrix}=C \text{ , obtenemos } C=\begin{pmatrix}45+15+9\\ 30+42+22\\ 90+70+65\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}44\\ 135\\ 40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}113\\ 229\\ 265\end{pmatrix}$$

❻ La matriz tecnológica y la matriz de los *outputs* totales son las siguientes :

$$T=\begin{pmatrix}0'4 & 0'2 & 0'1\\ 0'2 & 0'3 & 0'1\\ 0'2 & 0'4 & 0'3\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}150\\ 250\\ 290\end{pmatrix}$$

Halla al matriz de demanda final.

---oo0oo---

Sabemos que T · C + B = C, luego despejando B = C - T · C .

$$C=\begin{pmatrix}150\\ 250\\ 290\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0'4 & 0'2 & 0'1\\ 0'2 & 0'3 & 0'1\\ 0'2 & 0'4 & 0'4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}150\\ 250\\ 290\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}150\\ 250\\ 290\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}139\\ 134\\ 217\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 116\\ 73\end{pmatrix}$$

❼ Cada año el **20 %** de los usuarios del transporte *público*, **P** , de una ciudad pasa a utilizar el vehículo *privado*, **V**,. Por otra parte, el **10 %** de los usuarios del vehículo *privado* pasa a usar el transporte *público*.

a) Escribe la matriz de *transición* que modela esta situación.

b) Si en el año 1998 el **30** % de los ciudadanos utilizó el transporte *público* y el **70** % el vehículo *privado*, ¿ cuál será el porcentaje de usuarios del transporte *público* y del vehículo *privado* en los años 1999 y 2000 ?

---oo0oo---

a) Para escribir la matriz, construimos la tabla asociada :

%	**P**	**V**
P	0’8	0’1
V	0’2	0’9

cuya interpretación es sencilla: nos dice que pasan de P a V el 20 % (0’2) y se quedan (de P a P) el 80 % (0’8), etc.

Luego la matriz pedida es $M = \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 \\ 0'2 & 0'9 \end{pmatrix}$

b) $P_{1999} = M \cdot P_{1998} = \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 \\ 0'2 & 0'9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0'3 \\ 0'7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'31 \\ 0'69 \end{pmatrix}$

$$P_{2000} = M^2 \cdot P_{1998} = M \cdot P_{1999} = \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 \\ 0'2 & 0'9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0'31 \\ 0'69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'317 \\ 0'683 \end{pmatrix}$$

Cuestiones

❶ ¿Puede existir una matriz diagonal de dimensión 2 x 3 ? ¿Por qué?

---oo0oo---

No pues ha de ser cuadrada para que tenga diagonal principal y esta no lo es.

❷ ¿Es posible que una matriz sea a la vez triangular superior y triangular inferior? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, pon un ejemplo de matriz de este tipo.

---oo0oo---

Sí pues una matriz identidad es las dos cosas a la vez.

❸ Escribe la matriz identidad de orden cuatro y la matriz nula de dimensión 2 x 4.

---oo0oo---

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } O_{2x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

❹ Indica los valores posibles para el rango de una matriz de dimensión 3 x 5.

---oo0oo---

Como el número más pequeño de la dimensión de M es 3, podrá ser :

R(M) ≤ 3 = { 3, 2, 1, 0 }

❺ ¿Cómo han de ser las dimensiones de dos matrices para poder efectuar su edición ? ¿Y su multiplicación?

---oo0oo---

☸ Para que se puedan sumar han de tener la mima dimensión.

☸ Para poder multiplicar dos matrices ha de cumplirse que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda

❻ ¿Es posible calcular la inversa de cualquier matriz? En caso de que lo sea, demuéstralo; en caso contrario, pon un contraejemplo.

---oo0oo---

No, ha de ser cuadrada para ser regular o inversible y además, de todas las matrices cuadradas sólo son regulares aquellas cuyo determinante no es nulo.

Si $|A| = 0$, $A \cdot X =$ y daría para X un absurdo, infinito.

❼ ¿Cuál es la dimensión de la matriz traspuesta de una matriz de dimensión 3 X 5 ?

---oo0oo---

Que una matriz tenga dimensión m x n significa que tiene m filas y n columnas.

Como trasponer consiste en intercambiar filas y columnas, la matriz traspuesta tendrá n filas y m columnas, o sea, tendrá dimensión n x m. En nuestro caso 5 x 3.

❽ Localiza el error en la resolución de la siguiente ecuación matricial, donde A, B y X son matrices cuadradas del mismo orden.

$$A \cdot X = B$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = B \cdot A^{-1}$$
$$X = B \cdot A^{-1}$$

---oo0oo---

Primero debemos asegurarnos de que A es invertible, pero en el caso que lo sea, como el producto de matrices no es conmutativo, si en el primer miembro multiplicamos por la inversa por la izquierda hemos de multiplicar, en el segundo miembro, también por la izquierda, no por la derecha, como aquí se propone.

.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

❾ Indica las dimensiones de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{2x4} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{4x4}$$

❿ Escribe una matriz cuadrada de orden 4 que sea :

a) Triangular superior. b) Diagonal, c) Triangular inferior. d) Identidad.

---oo0oo---

$$a)\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➊➊ ¿ La matriz nula de 3x3 es una matriz diagonal ?

---oo0oo---

Sí, pues los elementos no pertenecientes a diagonal principal son todos nulos. Eso sí como también lo son los de diagonal principal es una matriz diagonal muy especial.

➊➋ Calcula el rango de las matrices :

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -10 & -8 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$, matriz escalonada de 3x4 , luego el **rango es 3**.

$$b)\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 3 & 21 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - 7F_1]{F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -10 & -2 & -16 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -16 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{2F_3 - F_2 \\ F_4 - 2F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -10 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_4 - F3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -10 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, matriz escalonada de 3x5,

luego el **rango es 3**.

$$\text{c)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -7 & -11 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & -1 \\ 5 & 5 & 21 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 & -11 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & -1 \\ 5 & 5 & 21 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - 3F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_5 - 5F_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -22 & -14 & -5 \\ 0 & 4 & 14 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ F_3 + 6F_2 \\ F_4 - 4F_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ 4F_4 + 3F_3 \\ 2F_5 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada de 5x5, luego el **rango es 5**.

❶❸ Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) A + B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & -3 \\ -7 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) A - B = A + (-B) = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

c) B - A = - (A - B) = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) 5·A = $5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 25 & -20 \\ -20 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

e) 4· B = $4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 & -8 \\ 20 & 8 & 0 & 4 \\ -12 & 16 & 8 & 20 \end{pmatrix}$

f) -3 ·A = $-3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 & -6 \\ -6 & -3 & -15 & 12 \\ 12 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

❶❹ Calcula el producto A · B. ¿ Es posible calcular B · A ? ¿ Por qué ?

---oo0oo---

A·B=

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+3\cdot 5+2\cdot(-3) & 1\cdot 0+3\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 1+3\cdot 0+2\cdot 2 \\ -2\cdot 3+0\cdot 5+1\cdot(-3) & -2\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 4 & -2\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 5 \\ -9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{3x3} \cdot A_{2x3}$, no es posible el producto, pues el número de columnas de la primera (3) no es igual al número de filas de la segunda (2).

❶❺ Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, calcula :

a) A = M + N -(2M -3N) = M + N -2M + 3N = -M + 4 N =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -10 & 8 & 3 \\ -22 & -13 & 2 \end{pmatrix}$$

b) B = M · N - (M +I) · (N -I) = = M · N - M · N + M ·I - I·N + I·I = M - N + I=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

❶❻ Considera dos matrices **M** y **N**, del mismo orden. Prueba que, si su producto cumple la propiedad conmutativa, entonces se cumple :

$$(M + N)^2 = M^2 + 2\, M \cdot N + N^2$$

---oo0oo---

(M + N)^2 = (M + N) · (M + N) = M · (M + N) + N · (M + N) = M · M + M · N + N · M + N · N = M^2 + M · N + N · M + N^2 = { como el producto es conmutativo M ·N = N · M } = **$M^2 + 2M \cdot N + N^2$** (q. e. d.)

❶❼ Considera las matrices :

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix};\ N=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\ \text{y}\ T=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

Averigua si se cumple la igualdad : $T^{-1} + (M \cdot N)^{-1} = (T + M \cdot N)^{-1}$.

---oo0oo---

Vamos a hallar el resultado de ambos miembros y comparar. Primero hallemos M · N .

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot(-1)&1\cdot0+2\cdot2+3\cdot(-1)\\2\cdot(-1)+1\cdot2+1\cdot(-1)&2\cdot0+1\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Ahora la inversa de T y de M · N por el método de Gauss :

$$T^{-1}\equiv\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\2&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\F_2-2F_1\end{array}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}2F_1+F_2\\ \end{array}\to\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&0&1\\0&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\frac{1}{2}F_1\\\frac{1}{2}F_2\end{array}\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right);\ \text{luego}\ T^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2\\-1&1/2\end{pmatrix}$$

$$(M\cdot N)^{-1}\equiv\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&1&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&-1&1\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&1&0\end{array}\right),\ \text{luego}\ (M\cdot N)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

Ahora $T+M\cdot N=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, y la inversa de la anterior por Gauss :

$$(T+M\cdot N)^{-1}\equiv\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right),\ \text{luego}\ (T+M\cdot N)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},$$ que comparada con $T^{-1}+(M\cdot N)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2\\-1&1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ se puede observar que **no son iguales.**

❶❽ Calcula la matriz $(A^t \cdot A^{-1})^2$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$.

---oo0oo---

❍ Hallamos $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$, luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

❍ Hallamos ahora el producto $A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

❍ Por último $(A^t \cdot A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

❶❾ Halla la matriz M que verifica : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+5c & 2b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 21 & \end{pmatrix}$,

de donde obtenemos los sistemas : $\left.\begin{matrix} a+2c=4 \\ 2a+5c=2 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} b+2d=-6 \\ 2b+5d=1 \end{matrix}\right\}$ que resueltos, nos dan :

- El primero **a = 16** y **c = - 6**
- El segundo **b = - 32** y **d = 13**

Luego la matriz buscada es $M = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$.

❷⓿ Halla la matriz **X** que verifica **A · X = 3B + C** , siendo :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Despejamos X : $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (3B + C)$, es decir X = $\mathbf{A^{-1} \cdot (3B + C)}$, en donde vemos que hemos de halla la inversa de A por el método de Gauss :

$$A^{-1} \rightrightarrows \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}F_3}{\overset{\longrightarrow}{\tfrac{1}{2}F_2}} \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right),$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ y por tanto :

$$X = A^{-1} \cdot (3B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

❷❶ Halla la matriz **A** que verifique : $3A + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

⊙ $3A + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ multiplicamos las matrices del segundo miembro.

⊙ $3A + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix}$, pasamos la matriz que suma al segundo miembro.

⊙ $3A = \begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$, multiplicamos ambos miembros por 1/3.

⊙ $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

❷❷ Considera la situación representada en la figura.

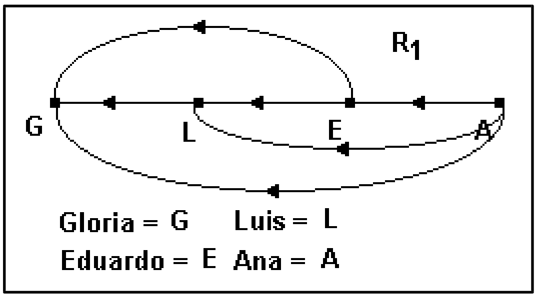
a) Representa mediante sendos grafos la relación $\mathbf{R_1}$ **:** *está a la derecha de* y la relación $\mathbf{R_2}$ **:** *está a la izquierda de*, en el conjunto de elementos **C** = { Ana, Eduardo, Gloria, Luis }.

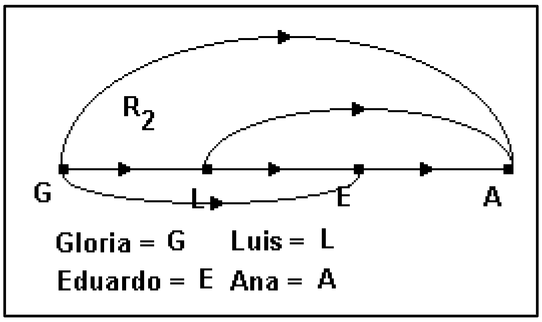
b) halla las matrices asociadas a los grafos del apartado anterior.

c) Explica qué relación existe entre ambas matrices.

---oo0oo---

a) La relaciones $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ se indican con flechas en los grafos:





b) Para hallar las matrices confeccionamos primero las tablas asociadas, indicando con un **1** si está a la derecha y un **0** si no lo está, para la primera y al contrario para la segunda :

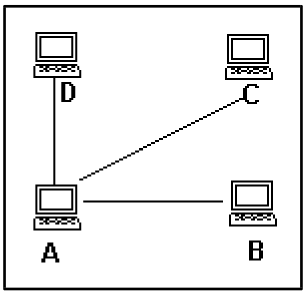
$\mathbf{R_1}$	**G**	**L**	**E**	**A**
G	0	0	0	0
L	1	0	0	0
E	1	1	0	0
A	1	1	1	0

$\mathbf{R_2}$	**G**	**L**	**E**	**A**
G	0	1	1	1
L	0	0	1	1
E	0	0	0	1
A	0	0	0	0

Luego las matrices asociadas a las relaciones son :

$$R_1 \equiv M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{R}_2 \equiv N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $M = N^t$ y $N = M^t$, pues, como es lógico, si una persona está a la derecha de otra, la otra estará a su izquierda.



❷❸ La figura muestra una red local de ordenadores.

a) Representa mediante un grafo la red.

b) Escribe la matriz asociada.

---oo0oo---

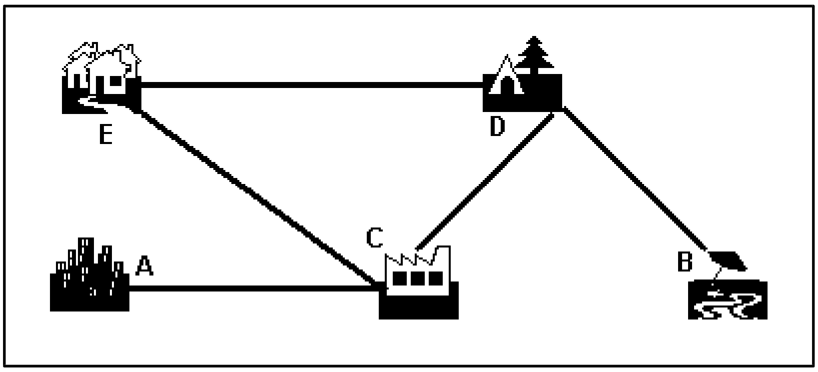
a) Como grafo pueden servir las líneas del dibujo anterior, significando que conectan o unen ordenadores,

b) Primero escribimos la tabla asociada, poniendo **1** si se pueden comunicar **dos** ordenadores y **0** si no pueden comunicarse **directamente** :

M	**A**	**B**	**C**	**D**
A	0	1	1	1
B	1	0	0	0
C	1	0	0	0
D	1	0	0	0

Luego la matriz pedida es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

❷❹ Observa la red de carreteras del mapa.



a) Representa mediante un grafo esta red de carreteras y escribe la matriz asociada.

b) Halla el número de caminos en dos y tres etapas que conectan **A** y **B**.

---oo0oo---

a) Para el grafo basta con representar cada lugar con un punto y cada carretera con una línea como en la figura anterior.

Hacemos la tabla en que indicamos la ciudad que está relacionada en la fila con la correspondiente a la columna :

M	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	0	1	0	0

B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	1	1
D	0	1	1	0	1
E	0	0	1	1	0

entonces la matriz asociada es $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Para hallar el número de caminos en n etapas hay que hacer M^n , en este caso como se nos pide en dos y tres etapas vamos a hallar M^2 y M^3 :

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

En la primera vemos que, para ir de A (primera fila) a B (segunda columna) en dos etapas, el elemento $a_{12} = 0$, no hay ninguna posibilidad.

En la segunda vemos que el elemento $a_{12} = 1$, luego hay una posibilidad de ir de A a B en tres etapas que sería : $A \xrightarrow{1^a} C \xrightarrow{2^a} D \xrightarrow{3^a} B$. *¿ Cuáles son la 3 posibilidades de ir de C a A en tres etapas ?*

❷❺ En los años 1997 y 1998, una ONG ha enviado ayuda humanitaria, consistente en *medicamentos* (**M**), *prendas de vestir* (**P**) y *alimentos* (**AL**), a cuatro países africanos **A, B**, **C** y **D**.

La matriz siguiente recoge las toneladas anuales de cada tipo de ayuda a cada país:

$$X = \begin{array}{cccc|c} A & B & C & D & \\ 10 & 30 & 15 & 12 & M \\ 215 & 512 & 317 & 300 & P \\ 745 & 862 & 613 & 923 & AL \end{array}$$

Por otra parte, el **valor**, en miles de pesetas, de una tonelada de cada tipo de ayuda era, en los años **1997** y **1998** :

$$Y = \begin{array}{ccc|c} M & P & AL & \\ 6000 & 30 & 14 & 1997 \\ 6200 & 31 & 14'5 & 1998 \end{array}$$

- Calcula el valor total de los envíos cada país en cada uno de los años citados.

---oo0oo---

El valor total de los envíos a cada país en cada año se obtiene por la matriz Y · X, en la que obtendemos por filas los años (las filas de la primera) y en columnas los países (columnas de la segunda :

$$Y \cdot X = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 76880 & 207428 & 108092 & 93922 \\ 79467'5 & 214371 & 111715'5 & 97083'5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1997 \\ 1998 \end{matrix} \end{array}$$

26 Una fábrica de electrodomésticos exporta *lavadoras* (**L**), *frigoríficos* (**F**) y *lavavajillas* (**V**) a dos países, $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$.

La matriz siguiente expresa, en miles, las unidades de cada tipo, durante los tres últimos años :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} L & F & V \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 125 & 275 & 230 \\ 250 & 104 & 375 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \end{array}$$

El precio de cada electrodoméstico, en miles de unidades monetarias, durante los tres últimos años viene dado por la matriz :

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1996 & 1997 & 1998 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 35 & 40 & 39 \\ 70 & 75 & 75 \\ 60 & 62 & 63 \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ F \\ V \end{matrix} \end{array}$$

Calcula la matriz que relaciona las ventas brutas totales del último trienio con los países a los que exporta. ¿ En qué país es mayor el valor de los exportado en el último año ?

---oo0oo---

En la matriz buscada hemos de tener las ventas por años y por países, hemos de buscar un producto que nos de esta información. Como las ventas brutas se obtinen multiplicando el número de electrodomésticos de cada tipo por el precio, habra que hacer :

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 125 & 275 & 230 \\ 250 & 104 & 375 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 & 40 & 39 \\ 70 & 75 & 75 \\ 60 & 62 & 63 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 37425 & 39885 & 39990 \\ 38530 & 41050 & 41175 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1996 & 1997 & 1998 \end{matrix} \end{array}$$

Para saber en qué país es mayor el valor de lo exportado en el último año hemos de fijarnos en la 3ª columna, en donde vemos que es mayor lo exportado al país P_2 (41 175).