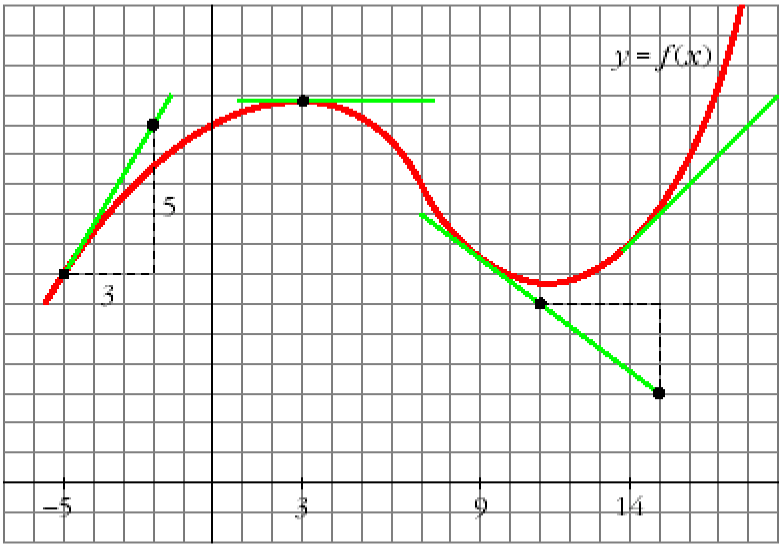
Pág 152

Tangentes a una curva



☑ Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, f' (3), f' (9) y f' (14).

La interpretación geométrica de la derivada en un punto x = a es la pendiente de la recta tangente en ese punto, f'(a) = pendiente de la recta tangente en x = a = m

f'(3) = pendiente de la tangente en x = 3 = 0 ya que es horizontal (pendiente nula).

f'(9) = pendiente de la tangente en x = 9 = -3/4.

f'(14) = pendiente de la tangente en x = 14 = 1.

☑ Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.

La derivada también es positiva en x = –3, x = –1, x = 15…, ya que las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

☑ Di otro punto en el que la derivada sea cero.

La derivada también es cero en x = 11 que es un mínimo relativo (punto de tangencia horizontal).

☑ Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.

La derivada también es negativa en x = 6, x = 8…

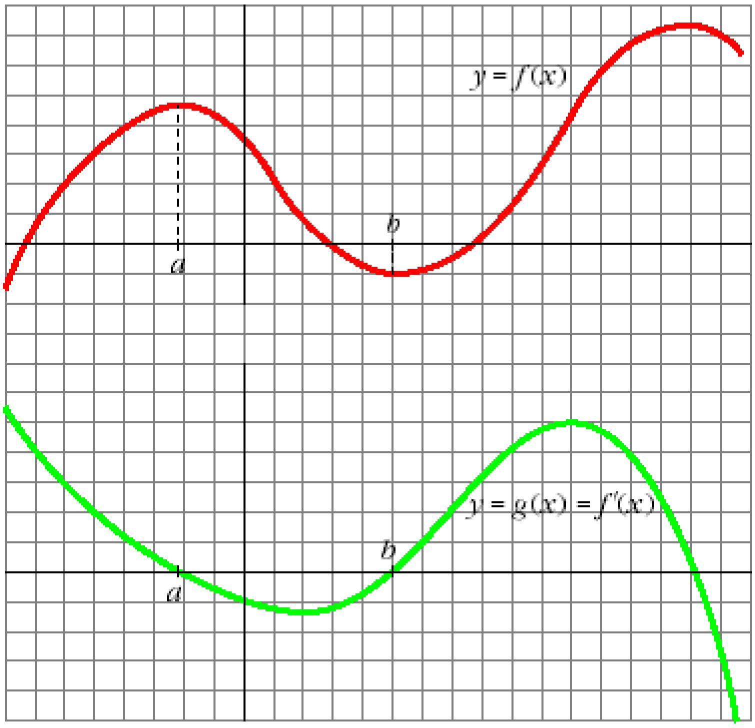
☑ Di un intervalo [a, b] en el que se cumpla que "si x ∈ [a, b], entonces f' (x) > 0".

Por ejemplo, en el intervalo [11, 15] se cumple que, si x ∈ [11, 15], entonces f ' (x) > 0.

Pág 153

Función derivada

Continúa escribiendo las razones por las cuales g (x) es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de f (x).



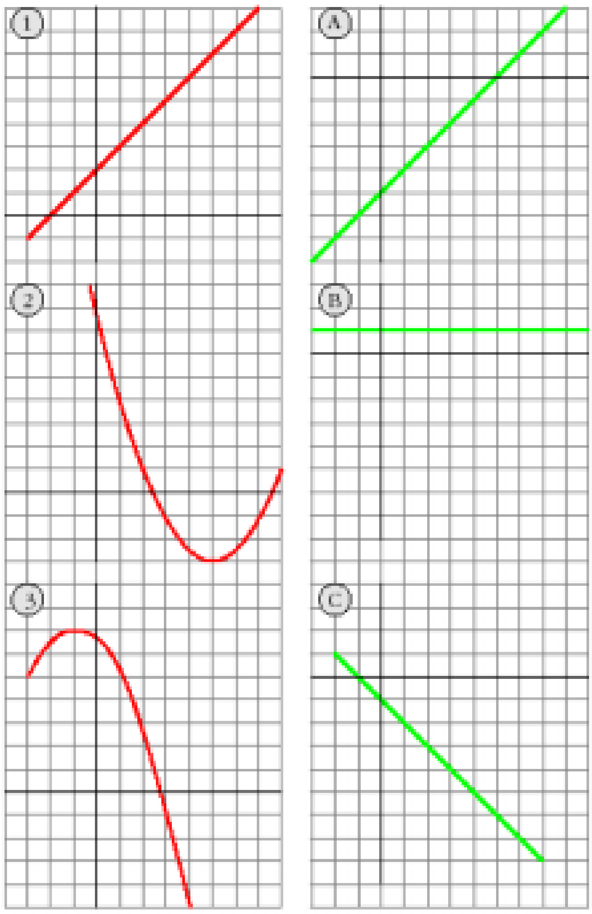
• En el intervalo (a, b), f (x) es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a g(x) en (a, b).

• La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.

• En general:

$g(x) = f'(x) = 0$ donde f (x) tiene tangente horizontal.
$g(x) = f'(x) > 0$ donde f (x) es creciente.
$g(x) = f'(x) < 0$ donde f (x) es decreciente.

Las tres gráficas de abajo, A, B, y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2, y 3, pero en otro orden. Responde razonadamente cuál es la de cada cual.



1) con B
2) con A
3) con C
La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

Pág 155

① $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \le 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en *x* = 2?**

Continuidad

En cada uno de los dos intervalos es continua pues son funciones polinómicas, estudiamos la continuidad en x = 2, hallando los límites laterales:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2-3x) = 2-3\cdot 2 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-3) = 2^2-3 = 1 \end{cases}$ como los límites laterales no son iguales, la función f(x) no es continua en x = 2 y , por tanto, tampoco es derivable en x = 2.

② $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \le 2 \\ x^2-8, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en *x* = 2?**

Continuidad

En cada uno de los dos intervalos es continua pues son funciones polinómicas, estudiamos la continuidad en x = 2, hallando los límites laterales:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2-3x) = 2-3\cdot 2 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-8) = 2^2-8 = -4 \end{cases}$ como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -4 = f(2)$, la función f(x) es continua en x = 2.

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} -3 \text{ si } x < 2 \\ 2x \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Para que una función sea derivable en un punto, las derivadas laterales han de coincidir.

$\begin{cases} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-3) = -3 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 2\cdot 2 = 4 \end{cases}$ como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en x = 2.

Pág 159

① Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{u}{v}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}=\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2}$

b)

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{u}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\overset{(1)}{=}\frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{\frac{(1+x)^2(1-x)}{1+x}}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

(1) El numerador ya se ha derivado en el apartado a)

c) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln u\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{D\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\frac{1-x}{1+x}}\overset{(1)}{=}\frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}=-\frac{2}{(1+x)(1-x)}=-\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$.

(1) El numerador ya se ha derivado en el apartado a)

d)

$$f(x)=\frac{1-tgx}{1+tgx}\Rightarrow f'(x)=\frac{D(1-tgx)\cdot(1+tgx)-D(1+tgx)\cdot(1-tgx)}{(1+tgx)^2}=\frac{-(1+tg^2x)\cdot(1+tgx)-(1+tg^2x)\cdot(1-tgx)}{(1+tgx)^2}=$$

$$=\frac{(1+tg^2x)(-1-tgx-1+tgx)}{(1+tgx)^2}=\frac{-2(1+tg^2x)}{(1+tgx)^2}$$

e)

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-tgx}{1+tgx}}\Rightarrow f'(x)=\frac{D\left(\frac{1-tgx}{1+tgx}\right)}{2\sqrt{\frac{1-tgx}{1+tgx}}}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{-2(1+tg^2x)}{(1+tgx)^2}}{2\sqrt{\frac{1-tgx}{1+tgx}}}=-\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2\sqrt{\frac{1-tgx}{1+tgx}}}=-\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)\sqrt{\frac{(1+tgx)^2(1-tgx)}{1+tgx}}}=$$

$$=-\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)\sqrt{(1+tgx)(1-tgx)}}=-\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)\sqrt{1-tg^2x}}$$

(1) Numerador derivado en el apartado anterior.

f) $f(x)=\ln\sqrt{e^{tgx}}=\ln e^{\frac{tgx}{2}}=\frac{1}{2}tgx\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2x)=\frac{1}{2}\sec^2x=\frac{1}{2\cos^2x}$

g) $f(x)=\sqrt{3^{x+1}}=3^{\frac{x+1}{2}}=a^u\Rightarrow f'(x)=u'a^u\ln a=D\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot3^{\frac{x+1}{2}}\cdot\ln3=\frac{\ln3}{2}\cdot3^{\frac{x+1}{2}}=\frac{\ln3}{2}\sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x)=\log(senx\cdot cosx)^2=2(\log senx+\log cosx)$

$$f'(x)=2\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\ln 10}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\right]=\frac{2}{\ln 10}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)=\frac{2}{\ln 10}\cdot\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=\frac{4}{\ln 10}\cdot\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=$$

$$=\frac{4}{\ln 10}\cdot\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{4}{\ln 10}\operatorname{cotg}2x.$$

i) $f(x) = \operatorname{sen}^2x + \cos^2x + x = 1 + x \Rightarrow f'(x) = 1.$

j) $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x+1}\cdot\cos\sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x)=D\left(\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\right)\cos\sqrt{x-1}+\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\cdot D\left(\cos\sqrt{x-1}\right)=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cos^2\sqrt{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}^2\sqrt{x+1}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(\cos^2\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}^2\sqrt{x+1}\right)=\frac{\cos 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}.$$

k) $f(x) = 7^{\operatorname{sen}(x^2+1)} \Rightarrow f'(x)=2x\cos(x^2+1)\cdot 7^{\operatorname{sen}(x^2+1)}\operatorname{Ln}7.$

l) $f(x) = \operatorname{sen}\left(3x^5-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{2x}\right) \Rightarrow f'(x)=\left(15x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\right)\cos\left(3x^5-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{2x}\right).$

m) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}x+x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{D\left(\operatorname{sen}x+x^2+1\right)}{2\sqrt{\operatorname{sen}x+x^2+1}}=\frac{\cos x+2x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x+x^2+1}}.$

n) $f(x) = \cos^2\sqrt[3]{x+(3-x)^2} \Rightarrow f'(x)=2\cos\sqrt[3]{x+(3-x)^2}\cdot(-\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+(3-x)^2})\cdot\frac{1+2(3-x)(-1)}{3\sqrt[3]{\left(x+(3-x)^2\right)^2}}=$

$$=\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{\left(x+(3-x)^2\right)^2}}\operatorname{sen}(2\sqrt[3]{x+(3-x)^2}).$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\cos x$ **c)** $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$; $y''' = 60x^2$.

b) y = xcosx$\Rightarrow$ y ' = cosx – xsenx; y" = -senx- (senx + x cosx) = - 2senx – x cosx; y''' = -2 cosx - (cosx – x senx) = -3cosx +xsenx.

c) $y = \operatorname{sen}^2x + \cos^2x + x = 1 + x \Rightarrow y' = 1$; $y'' = 0$; $y''' = 0$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③ **Calcula f' (1) siendo:** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}}\cdot e^4$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}}\cdot e^4 = \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{2\cdot 3^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{2}{5}}}\cdot e^4 = \frac{3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}\cdot e^4}{2}x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}} = \frac{3^{\frac{2}{15}}\cdot e^4}{2}\cdot x^{\frac{13}{30}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3^{\frac{2}{15}}\cdot e^4}{2}\cdot\frac{13}{30}\cdot x^{\frac{-17}{30}} = \frac{13\sqrt[15]{3^2}e^4}{60}\sqrt[30]{x^{17}}$$

luego $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{3^2}e^4}{60}$.

④ **Calcula f' (π/6) siendo: f (x) = (cos² 3x – sen² 3x) · sen 6x**

$f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x)\cdot \operatorname{sen} 6x = \cos 6x\cdot \operatorname{sen} 6x = \dfrac{\operatorname{sen} 12x}{2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}12\cdot\cos 12x = 6\cos 12x$

luego $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\cos 12\cdot\dfrac{\pi}{6} = 6\cdot\cos 2\pi = 6\cdot 1 = 6$

⑤ **Calcula f' (0) siendo:** $f(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)^2$

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)^2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}(2x+1)\cdot 2 = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}(2x+1)$$

luego $f'(0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-8}{2\sqrt{3}}$.

Pág 160

① **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \le 3 \\ 3x - 9 & x > 3 \end{cases}$

Continuidad

◈ Las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas para $x \neq 3$.

◈ Continuidad en x = 3:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3x) = 3^2-3\cdot 3 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(3x-9) = 3\cdot 3-9 = 0 \\ f(3) = 3^2-3\cdot 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0 = f(3) \text{ luego es continua en } x = 3$$

◈ Como es continua en $x \neq 3$ y en x = 3, es continua en R.

Derivabilidad

◈ $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x<3 \\ 3 & x>3 \end{cases}$ para $x \neq 3$.

◈ Derivabilidad en x = 3

$$\left\{\begin{array}{l} f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3) = 2\cdot 3-3 = 3 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 3 = 3 \end{array}\right. \text{Como } f'(3^-) = f'(3^+) = 3 \Rightarrow f'(3) = 3$$

◈ luego $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x\leq 3 \\ 3 & x>3 \end{cases}$.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

② Calcula m y n para que f (x) sea derivable en R $f(x) = \begin{cases} x^2-mx+5 & x\leq 0 \\ -x^2+n & x>0 \end{cases}$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

Para valores de $x \neq 0$ las funciones son continuas y derivables (para cualesquiera valores de m y n) por ser polinómicas.

Estudiamos ahora la continuidad y derivabilidad en x = 0.

Continuidad en x = 0

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-mx+5) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2+n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right. \quad \text{luego, para que sea continua en } x = 0 \text{ n ha de valer 5.}$$

Derivabilidad en x = 0

$$f'(x)=\begin{cases}2x-m & x<0\\ -2x & x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-m)=-m\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}-2x=0\end{cases}\quad \text{Como } f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -m=0\Leftrightarrow m=0$$

Luego para que f(x) sea derivable en R m = 0 y n = 5.

Pág 164

① Halla la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones en los intervalos:

[–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]

a) f (x) = x^2 + 1
b) f (x) = 7x – 5
c) f (x) = 3
d) f (x) = 2x
¿En cuáles de ellas es constante la TVM? ¿Qué tipo de funciones son?

$$\text{T.V.M.}[a,\ b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a) f(x) = x^2 + 1

$$\text{T.V.M.}[-3,\ -1]=\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{(-1)^2+1-((-3)^2+1)}{2}=\frac{-8}{2}=-4\,.$$

$$\text{T.V.M.}[0,\ 2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{((2)^2+1)-((0)^2+1)}{2}=\frac{4}{2}=2\,.$$

$$\text{T.V.M.}[2,\ 5]=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{(5^2+1)-(2^2+1)}{3}=\frac{26-5}{3}=\frac{21}{3}=7\,.$$

$$\text{T.V.M.}[1,1+h]=\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{((1+h)^2+1)-(1^2+1)}{h}=\frac{1+2h+h^2+1-2}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=\frac{h(h+2)}{h}=h+2$$

b) f(x) = 7x – 5

T.V.M.[-3, -1] = $\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{7(-1)-5)-(7(-3)-5)}{2}=\frac{-12-(-26)}{2}=\frac{14}{2}=7$.

T.V.M.[0, 2] = $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(7\cdot 2-5)-(7\cdot 0-5)}{2}=\frac{9+5}{2}=\frac{14}{2}=7$.

T.V.M.[2, 5] = $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{(7\cdot 5-5)-(7\cdot 2-5)}{3}=\frac{30-9}{3}=\frac{21}{3}=7$.

T.V.M.[1,1+h]= $\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{(7(1+h)-5)-(7\cdot 1-5)}{h}=\frac{7+7h-5-7+5}{h}=\frac{7h}{h}=7$.

c) f(x) = 3

T.V.M.[-3, -1] = $\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{3-3}{2}=\frac{0}{2}=0$.

T.V.M.[0, 2] = $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-3}{2}=\frac{0}{2}=0$.

T.V.M.[2, 5] = $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{3-3}{3}=\frac{0}{3}=0$.

T.V.M.[1,1+h]= $\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{3-3}{h}=\frac{0}{h}=0$.

d) f(x) = 2^x

T.V.M.[-3, -1] = $\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{2^{-1}-2^{-3}}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{2}=\frac{\frac{4-1}{8}}{2}=\frac{3}{16}$.

T.V.M.[0, 2] = $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2^2-2^0}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$.

T.V.M.[2, 5] = $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{2^5-\cdot 2^2}{3}=\frac{32-4}{3}=\frac{28}{3}$.

T.V.M.[1,1+h]= $\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{2^{1+h}-2^1}{h}=\frac{2\cdot 2^h-2}{h}=\frac{2(2^h-1)}{h}$.

La TVM es constante en las funciones polinómicas de grado menor o igual a uno:

f(x) = 7x – 5(afín) y f(x) = 3 (constante).

② **Halla la T.V.M. de la función f (x) = –x² + 5x – 3 en el intervalo [2, 2 + h] y, con el resultado obtenido, calcula f' (2).**

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$

T.V.M.[2,2+h]=

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\frac{-(2+h)^2+5(2+h)-3-(-2^2+5\cdot 2-3)}{h}=\frac{-(4+4h+h^2)+10+5h-3-3}{h}=$$

$$=\frac{-4-2h-h^2+10+5h-3-3}{h}=\frac{-h^2+hh}{h}=\frac{h(-h+1)}{h}=-h+1$$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}(-h+1)=1$.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

③ **Utilizando la definición de derivada, calcula *f'* (3) en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{3}{2}$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(3+h)-2}{2}-\frac{3\cdot 3-2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{9+3h-2-9+2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

b) $f(x) = x^2 - 4$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-4-3^2+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3^2+6h+h^2-4-3^2+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=$$

$\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=6$.

c) $f(x) = (x - 5)^2$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h-5)^2-(3-5)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h-2)^2-(-2)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h+4-4}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h-4)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4.$$

d) $$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+3+h}{3+h}-\frac{2+3}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(5+h)-5(3+h)}{3(3+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{15+3h-15-5h}{3h(3+h)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{3h(3+h)}=\lim_{h\to 0}-\frac{2}{3(3+h)}=-\frac{2}{3\cdot 3}=-\frac{2}{9}.$$

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

④ **Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:**

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{5(x+h)+1}{2}-\frac{5x+1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{5x+5h+1-5x-1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{5h}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{2h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}.$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2-1-(3x^2-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x^2+2xh+h^2)-1-3x^2+1}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2+6xh+3h^2-1-3x^2+1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6xh+3h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6x+3h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6xh+3h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6x+3h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6x+3h) = 6x$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h-2}-\frac{1}{x-2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{x-2-x-h+2}{(x-2)(x+h-2)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{-h}{(x-2)(x+h-2)}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(x-2)(x+h-2)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x-2)(x+h-2)} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}.$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h-1) = 2x-1.$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤ **Calcula, aplicando la definición de derivada, *f '* (2), *f '* (–1) y *f '* (*x*), siendo *f* (*x*) =** $\mathbf{\dfrac{x-1}{x}}$ **.**

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

◈ $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2+h-1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{4+2h-2-2-h}{2(2+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h}{2(2+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{2h(2+h)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{2(2+h)} = \dfrac{1}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}.$

◈ $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1+h-1}{-1+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2+h+2-2h}{h(-1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(-1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{-1+h} = 1$

◈ $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h-1}{x+h}-\frac{x-1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+xh-x-x^2-xh+x+h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{xh(x+h)} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x\cdot x} = \frac{1}{x^2}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑥ **Comprueba, utilizando la definición de derivada, que la función *f* (*x*) = $\sqrt{x}$ no tiene derivada en *x* = 0.**

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{0} = \pm\infty$ Ind, luego no tiene derivada en x = 0.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑦ **Halla la tasa de variación media de la función f (x) = e^x en el intervalo [2; 2,001] y comprueba que su valor está muy próximo a e^2.**

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

T.V.M. [2; 2,001] = $\frac{f(2{,}001)-f(2)}{2{,}001-2} = \frac{e^{2{,}001}-e^2}{0{,}001}$ = – 7,3928

$e^2 \approx 7{,}3891$. Los dos valores están muy próximos.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑧ **Dada f (x) = $\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ x-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$, halla f '(1) y f '(3) utilizando la definición de derivada.**

$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)-3-(2\cdot 1-3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2+2h-3+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2$

$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h-1)-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑨ Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\Rightarrow y'=\dfrac{2x(x^2+3)-2x(x^2-3)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$.

b) $y=\dfrac{x+1}{(2-x)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{(2-x)^2-2(2-x)(-1)(x+1)}{(2-x)^4}=\dfrac{(2-x)(2-x+2x+2)}{(2-x)^4}=\dfrac{x+4}{(2-x)^3}$.

c)

$$y=\frac{3x^2}{x+\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{6x(x+\sqrt{x})-3x^2(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{6x^2+6x\sqrt{x}-3x^2-\frac{3x^2}{2\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{6x^2\sqrt{x}+12x^2-3x^2}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{6x^2\sqrt{x}+9x^2}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^2}.$$

d) $y=\left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^4\Rightarrow y'=4\left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^3\left(-\dfrac{1}{10}\right)=-\dfrac{2}{5}\left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^3$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⓪ Halla la derivada de estas funciones:

a) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)\cdot x^3}{(x+1)^4}=\dfrac{(x+1)(3x^2(x+1)-2x^3)}{(x+1)^4}=\dfrac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3}=$

$=\dfrac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}=\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

b) $y=\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3\Rightarrow y'=3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2\cdot\dfrac{2x\cdot x-x^2-1}{x^2}=3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

c) $y=\dfrac{1}{\text{sen}x}=\text{sen}^{-1}x\Rightarrow y'=-\text{sen}^{-2}x\cdot\cos x=-\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2x}=-\text{cotg}x\cdot\text{cosec}x$.

d) $y=\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}\Rightarrow y'=\dfrac{\cos^2x+\text{sen}^2x}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\cos^2x}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①① Deriva las funciones siguientes:

a) $y = e^{4x}(x-1) \Rightarrow y' = 4 \cdot e^{4x}(x-1) + e^{4x} = e^{4x}(4(x-1)+1) = (4x-3)e^{4x}$.

b) $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x} \Rightarrow y' = \dfrac{2(1-x)(-1) \cdot e^x - e^x(1-x)^2}{(e^x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x[-2-1+x]}{e^{2x}} = \dfrac{(1-x)(x-3)}{e^x}$.

c) $y = \sqrt{2^x} \Rightarrow y' = \dfrac{2^x \ln 2}{2\sqrt{2^x}}$.

d) $y = \ln(2x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{2x-1}$.

①② Deriva estas funciones:

a) $y = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

b) $y = \ln\sqrt{1-x} \Rightarrow y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2\left(\sqrt{1-x}\right)^2} = \dfrac{-1}{2(1-x)} = \dfrac{1}{2x-2}$.

c) $y = \dfrac{\ln x}{e^x} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{x}e^x - e^x \ln x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x\left[\frac{1}{x} - \ln x\right]}{e^{2x}} = \dfrac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \dfrac{1 - x\ln x}{xe^x} = \dfrac{1 - \ln x^x}{xe^x}$.

d) $y = \operatorname{sen}^2 x^2 \Rightarrow y' = 2\operatorname{sen} x^2 \cdot (\cos x^2) 2x = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$.

①③ Calcula la derivada de estas funciones:

a) $y = (x-1) \cdot e^{4x} \Rightarrow y' = e^{4x} + (x-1) \cdot 4 \cdot e^{4x} = e^{4x}(4x-3)$.

b) $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x} \Rightarrow y' = \dfrac{-2(1-x)e^x - (1-x)^2 e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(-2+2x-(1-2x+x^2))}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}$

c) $y = \sqrt{2^x} \Rightarrow y' = \dfrac{2^x \ln 2}{2\sqrt{2^x}}$

d) $y = \ln(2x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{2x-1}$

①④ Deriva las funciones siguientes:

a) $y=\log_2 \frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{\ln 2}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln 2}=-\frac{1}{x}\frac{1}{\ln 2}$.

b) $y=\sqrt[3]{\operatorname{sen} x^2} \Rightarrow y'=\frac{(\operatorname{sen} x^2)'}{3\sqrt[3]{(\operatorname{sen} x^2)^2}}=\frac{2x\cos x^2}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x^2}}$.

c) $y=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} \Rightarrow y'=\frac{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}=\frac{\frac{2(1-2x)+2(1+2x)}{(1-2x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}=\frac{\frac{2-4x+2+4x}{(1-2x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}=\frac{4}{2(1-2x)^2\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}=$

$$\frac{2}{(1-2x)\sqrt{\frac{(1+2x)(1-2x)^2}{1-2x}}}=\frac{2}{(1-2x)\sqrt{(1+2x)(1-2x)}}=\frac{2}{(1-2x)\sqrt{1-4x^2}}.$$

d) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}} \Rightarrow y'=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

①⑤ Halla la derivada de:

a) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{x\cdot x^2}}=\sqrt[4]{x^3}=x^{3/4} \Rightarrow y'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

b)

$$y=\ln\sqrt{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow y'=\frac{D\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}=\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}=\frac{1}{2(x+1)^2\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}=\frac{1}{2(x+1)^2\cdot\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{2x(x+1)}$$

c) $y=\ln\left(\operatorname{sen}\sqrt{e^x}\right) \Rightarrow y'=\frac{\cos\sqrt{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}}{\operatorname{sen}\sqrt{e^x}}=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\operatorname{cotg}\sqrt{e^x}$.

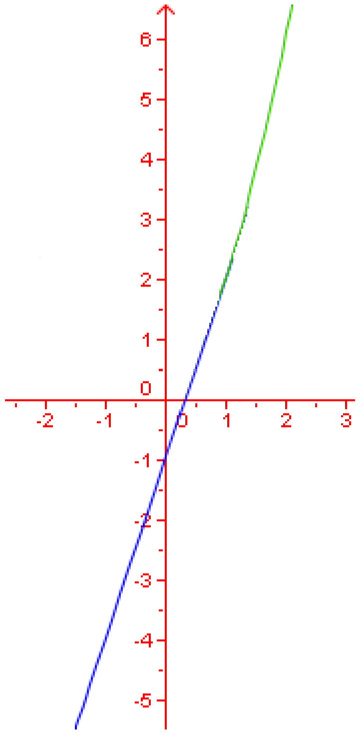
d)

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow y'=\frac{D\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)}=\frac{2}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{1}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

Continuidad y derivabilidad

①⑥ Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican, y represéntalas:



a) $\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2+x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

En x = 1

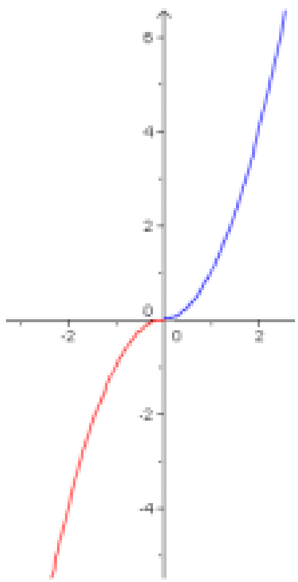
◈ **Continuidad** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=3\cdot 1-1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)=1^2+1=2 \end{cases}$ como

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)=1^2+1$, la función es continua en x = 1.

◈ **Derivabilidad** $f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ y ahora comprobamos si las derivadas laterales en x = 1 son iguales: $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1} 3=3$;

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=2\cdot 1+1=3$

Como las derivadas laterales en x = 1 son iguales ($f'(1^-)=f'(1^+)=3$) es derivable en x = 1 y su derivada f'(1) = 3.



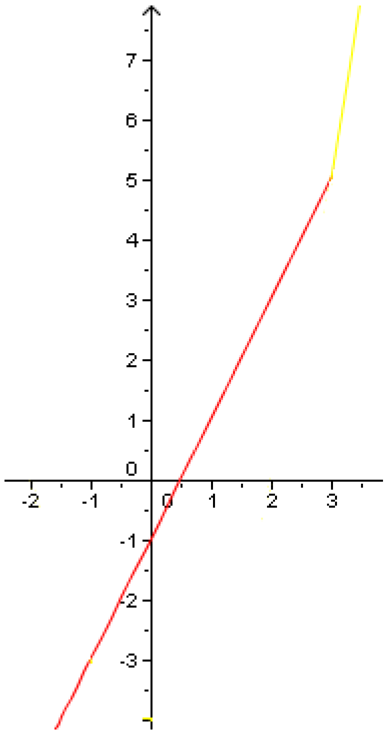
b) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

En x = 0

◈ **Continuidad** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, la función es continua en x = 0.

◈ **Derivabilidad** $f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$ y ahora comprobamos si las derivadas laterales en x = 1 son iguales: $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} -2x=0$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x)=0$

Como las derivadas laterales en x = 0 son iguales ($f'(0^-) = f'(10) = 0$) es derivable en x = 0 y su derivada f '(0) = 0.



c) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<3\\ x^2-4 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

En x = 3

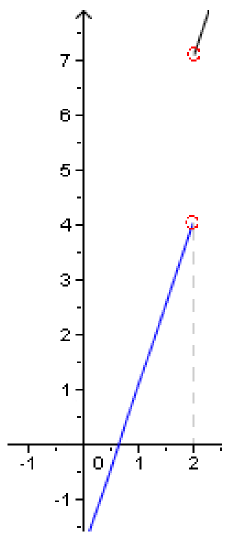
◈ **Continuidad** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4)=5\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5=f(3)$, la función es continua en x = 3.

◈ **Derivabilidad** $f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<3\\ 2x & \text{si } x>3\end{cases}$ y ahora comprobamos si las derivadas laterales en x = 3 son iguales:

$f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3} 2=2$; $f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x)=2\cdot 3=6$

Como las derivadas laterales en x = 3 no son iguales ($f'(3^-) = 2 \neq f'(3^+) = 6$) no es derivable en x = 3 .

d) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{si } x\le 2\\ 3x+1 & \text{ai } x>2\end{cases}$



En x = 2

◈ **Continuidad** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=3\cdot 2-2=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=3\cdot 2+1=7\end{cases}$ como los límites laterales no son iguales, la función es discontinua en x = 2, la discontinuidad es salto finito y la magnitud del salto es 3 (7 – 4).

◈ **Derivabilidad** $f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<2\\ 3 & \text{si } x>2\end{cases}$, como la función es discontinua en x = 2. no puede ser derivable en ese punto.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

⑪⑦ Comprueba que f(x) es continua, pero no derivable, en x = 2:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & \text{si } x<2\\ 3x-6 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

En x = 2

◈ **Continuidad** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \ln(x-1) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(3x-6) = 3\cdot 2 - 6 = 0 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$, la función es continua en x = 2.

◈ **Derivabilidad** $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y ahora comprobamos si las derivadas laterales en x = 2 son iguales: $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1$; $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2}(3) = 3$

Como las derivadas laterales en x = 2 no son iguales ($f'(2^-) = 1 \neq f'(2^+) = 3$) no es derivable en x = 2.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⓵⓼ Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Continuidad

◈ Para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas.

◈ En x = 0 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \end{cases}$ como , la función es continua en x = 0.

◈ En x = 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$, la función es continua en x = 0.

Teniendo en cuenta los tres puntos anteriores concluimos que la función es continua en $\Re$.

Derivabilidad

◈ Para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ la función es derivable y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

◈ En x = 0, $f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$; $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x) = 0$

Como las derivadas laterales en x = 0 son iguales ($f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$) es derivable en x = 0.

◈ En x = 1, $f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1} 2x = 2\cdot 1 = 2$; $f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1} 1 = 1$

Como las derivadas laterales en x = 1 no son iguales (f'(1^-) = 2 ≠ f'(1^+) = 3) no es derivable en x = 1.

La función es derivable en $\Re$ - {1} y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⑨ Prueba que la función f(x) = |x + 1| no es derivable en x = -1. Continuidad en x = 2.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Primero convertimos la función en valor absoluto en una a trozos o intervalos:

Como x +1 = 0, se anula para x = -1 y, a la izquierda de -1 la función es negativa y a la derecha de x = -1 es positiva, la función queda:

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & x \le -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$$

Continuidad

◈ Para x ≠ -1 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas.

◈ En x = -1 $\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(-x-1)=0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(x+1)=0 \end{cases}$ como $\lim_{x\to -1} f(x)=0=f(-1)$, la función es continua en x = -1.

Derivabilidad

◈ Para x ≠ -1 la función es derivable y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} -1 & x < -1 \\ 1 & x > -1 \end{cases}$.

◈ En x = -1, $f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1} -1 = -1$; $f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1}(1)=1$

Como las derivadas laterales en x = -1 no son iguales (f'(-1^-) = -1 ≠ f'(-1^+) = 1) no es derivable en x = -1.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

②⓪ Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$

Continuidad

◈ Para $x\neq 1$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas.

◈ En x = 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$, la función es continua en x = 1.

Derivabilidad

◈ Para $x\neq 1$ la función es derivable y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$.

◈ En x = 1, $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$; $f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1)=1$

Como las derivadas laterales en x = 1 no son iguales ($f'(1^-)=2\neq f'(1^+)=1$) no es derivable en x = 1.

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

②① Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\le 0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

Continuidad

◈ Para $x\neq 0$, f(x) es continua pues las funciones de cada intervalo son continuas (la exponencial y la polonómica de primer grado).

◈ En x = 0 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x})=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$, la función es continua en x = 0.

Derivabilidad

◈ Para $x\neq 0$ la función es derivable y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & x<0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$.

◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} -e^{-x}=-e^0=-1$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$

Como las derivadas laterales en x = 0 son iguales ($f'(0^-)=-1=f'(0^+)=-1$) es derivable en x = 0. y por tanto es derivable en $\Re$.

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

㉒ ¿ En qué puntos no es derivable la función f(x) = $|x^2 - 4|$?

Transformamos la función en valor absoluto en función a trozos, para lo cual vemos primero para que valores se anula $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, teniendo, pues que es tediar el signo de la función en tres intervalos:

- Valores de $x \leq -2$, la función $x^2 - 4 > 0$.
- Valores del intervalo $-2 < x \leq 2$, la función $x^2 - 4 < 0$.
- Valores de $x > 2$, la función $x^2 - 4 > 0$.

Con lo que la función queda: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ahora podemos estudiar la continuidad y derivabilidad:

Continuidad

◈ Para $x \neq -2$ y $x \neq 2$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas.

◈ En x = -2 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(-x^2 + 4) = 0 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0 = f(-2)$, la función es continua en x = -2.

◈ En x = 2 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} -x^2 + 4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4) = 0 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$, la función es continua en x = 2.

Teniendo en cuenta los tres puntos anteriores concluimos que la función es continua en $\Re$.

Derivabilidad

◈ Para $x \neq -2$ y $x \neq 2$ la función es derivable y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

◈ En x = -2, $f'(-2^-) = \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2} 2x = -4$; $f'(-2^+) = \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2}(-2x) = 4$

Como las derivadas laterales en x = -2 no son iguales ($f'(-2^-) = -4 \neq 4 = f'(-2^+)$) no es derivable en x = -2.

◈ En x = 2, $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-2x) = -4$; $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x) = 4$

Como las derivadas laterales en x = 2 no son iguales (f'(2⁻) = -4 ≠ 4 = f'(2⁺)) no es derivable en x = 2.

Resumiendo, la función no es derivable en los puntos (-2, 0) y (2, 0).

②③ Dada $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{si } x\le 2\\ x^2+1 & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Calcula f '(1) y f '(3).

b) Comprueba que f '(2⁻) ≠ f '(2⁺).

a) Como x = 1 pertenece al primer intervalo de definición y la derivada de la función de este intervalo es 3, f'(1) = 3, sin embargo x = 3 pertenece al 2º intervalo de definición en el que la derivada es 2x, luego f'(3) = 2·3 = 6.

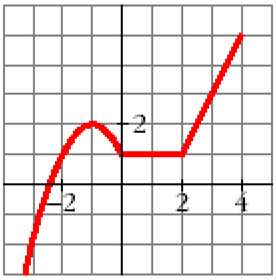
b) Para $x\ne 2$ $f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<2\\ 2x & \text{si } x>2\end{cases}$ luego $f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3=3$;

$f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x=4$ y, por tanto $f'(2^-) = 3 \ne 4 = f'(2^+)$.

②④ Esta es la gráfica de una función *y* = *f* (*x*). Observándola, di el valor de:

f' (–1), *f'* (1) y *f'* (3)

¿En qué puntos no es derivable?



La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente geométrica en ese punto, luego:
f' (–1) = 0 (ya que es un máximo, la tangente es horizontal, pendiente nula); *f'* (1) = 0 (la gráfica es horizontal y su pendiente tabién); *f'* (3) = 2 ya que la gráfica en ese punto es una recta de pendiente : $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

No es derivable en *x* = 0 ni en *x* = 2 pues las derivadas laterales (pendientes) en esos puntos son distintas.

②⑤ ¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada? y = $|x^2 + 6x + 8|$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

▣ Primero convertimos la función en valor absoluto en una función a trozos:

◈ Hallamos los valores que la anulan resolviendo la ecuación:

$$x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases}-2\\-4\end{cases}$$

◈ Hallamos el signo de la función en cada uno de los tres intervalos que los valores anteriores forman sobre la recta real:

⊙ Para valores de $x \leq -4$, $x^2 + 6x + 8 > 0$.
⊙ Para valores $-4 < x \leq -2$, $x^2 + 6x + 8 < 0$.
⊙ Para valores de $x > -2$, $x^2 + 6x + 8 > 0$.

Ahora ya podemos definir la función en intervalos o “a trozos” teniendo en cuenta que en los intervalos en que sea positiva, el valor absoluto mantiene el signo y en donde sea negativa hay que cambiarla de signo: $y=\begin{cases}x^2+6x+8 & \text{si } x\leq -4\\ -x^2-6x-8 & \text{si } -4<x\leq -2\\ x^2+6x+8 & \text{si } x>-2\end{cases}$

▣ La derivada de la función para $x \neq -4$ y $x \neq -2$ es $y'=\begin{cases}2x+6 & \text{si } x<-4\\ -2x-6 & \text{si } -4<x<-2\\ 2x+6 & \text{si } x>-2\end{cases}$

▣ Ahora estudiamos su continuidad y derivabilidad:

Continuidad

◈ Para $x \neq -4$ y $x \neq -2$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas.

◈ En x = -2 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(-x^2-6x-8)=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x^2+6x+8)=0\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0=f(-2)$, la función es continua en x = -2.

◈ En x = -4 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4}(x^2+6x+8)=0\\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4}(-x^2-6x-8)=0\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=0=f(-4)$, la función es continua en x = -4.

Teniendo en cuenta los tres puntos anteriores concluimos que la función es continua en $\Re$.

Derivabilidad

◈ En x = -2, $f'(-2^-)=\lim\limits_{x\to-2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-2}(-2x-6)=-2$; $f'(-2^+)=\lim\limits_{x\to-2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to-2}(2x+6)=2$

Como las derivadas laterales en x = -2 no son iguales (f'(-2⁻) = -2 ≠ 2 = f'(-2⁺)) no es derivable en x = - 2.

◈ En x = -4, $f'(-4^-)=\lim\limits_{x\to-4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-4}(2x+6)=-2$; $f'(-4^+)=\lim\limits_{x\to-4^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to-4}(-2x-6)=2$

Como las derivadas laterales en x = -4 no son iguales (f'(-4⁻) = -2 ≠ 2 = f'(-4⁺)) no es derivable en x = -4.

La función no es derivable en (-4, 0) ni en (-2, 0), pues (a pesar de ser continua) las derivadas laterales(las pendientes de las tangentes a derecha e izquierda) no son iguales.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉖ Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Para que sea derivable ha de ser continua y como es continua para x ≠ 2, tenemos que hacer que sea continua en x = 2, han de ser iguales los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(ax^2+3x)=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x^2-bx-4)=-2b \end{cases} \Rightarrow 4a+6=-2b \Leftrightarrow 4a+2b=-6 \Leftrightarrow 2a+b=-3$$

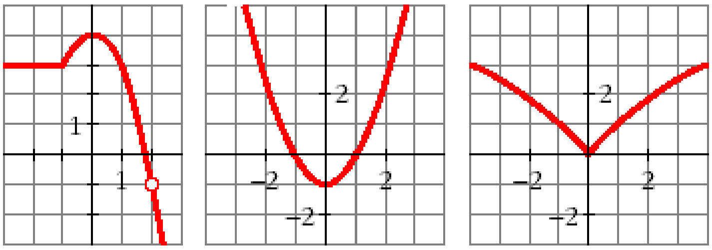
Si $x\neq 2$ la derivada es $f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & \text{si } x<2 \\ 2x-b & \text{si } x>2 \end{cases}$ y en x = 2 hallamos las derivadas laterales $f'(2^-)=\lim\limits_{x\to2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to2}(2ax+3)=4a+3$; $f'(2^+)=\lim\limits_{x\to2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to2}(2x-b)=4-b$ e igualamos f'(2⁻) = f'(2⁺); 4a+3 = 4 – b; 4a + b = 1.

Si resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones, tendremos los valores de a y b para que f(x) sea derivable en $\Re$:

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ 4a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=3 \\ 4a+b=1 \\ \hline 2a=4 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow b=-3-2a=-3-2\cdot2=-7$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

27 Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables. ¿Alguna de ellas es derivable en todo $\Re$?



a) b) c)

a) No es derivable en x = -1 (las derivadas laterales son distintas, “punto anguloso”) ni en x = 2 (no está definida la función).

b) Es continua y derivable en $\Re$.

c) No es derivable en x = 0 pues las derivadas laterales son diferentes (punto anguloso).

28 La función f(x) está definida por $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$, calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Para que sea derivable ha de ser continua y como es continua para x ≠ 0, tenemos que hacer que sea continua en x = 0, han de ser iguales los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)=b \end{cases} \Rightarrow b=0$$

Si x $\neq 0$ la derivada es $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x<0 \\ a & \text{si } x>0 \end{cases}$ y en x = 0 hallamos las derivadas laterales $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-1)=-1$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} a=a$ e igualamos $f'(0^-)$ = $f'(0^+)$; a= – 1.

Para que sea continua y derivable a = -1 y b = 0.

29 La función f(x) está definida $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ 1 & 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & x\ge 3\end{cases}$**. Estudia su continuidad y derivabilidad.**

Continuidad

◈ Para $x\neq 0$ y $x\neq 3$ es continua pues las funciones de cada intervalo son exponenciales y polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 0 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$, la función es continua en x = 0.

◈ En x = 3 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-x^2+3x+2) = 2\end{cases}$ como los límites laterales son distintos, no existe limite en x = 3 y la función es discontinua en x = 3.

Teniendo en cuenta los tres puntos anteriores concluimos que la función es continua en $\Re$ - {3}.

Derivabilidad

Para $x\neq 0$ y $x\neq 3$ $f'(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ 0 & 0<x<3 \\ -2x+3 & x>3\end{cases}$

◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to -0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x)=e^0=1;\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(0)=0$

Como las derivadas laterales en x = 0 no son iguales ($f'(0^-) = 1 \neq 0 = f'(0^+)$) no es derivable en x = 0.

◈ En x = 3 al no ser continua no puede ser derivable.

La función no es derivable en (0, 1) ni en (3, 2).

30 Averigua para qué valores de x es f'(x) = 0 en cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2(3x-8)}{12}=\dfrac{1}{12}x^2(3x-8)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{12}\left[2x(3x-8)+x^2\cdot 3\right]=\dfrac{1}{12}\left(6x^2-16x+3x^2\right)$ y ahora igualamos a cero y resolvemos la ecuación :

$$9x^2-16x=0\Leftrightarrow x(9x-16)=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ 9x-16=0\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{9}\end{cases}$$

b) $f(x) = x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x$, y ahora resolvemos la ecuación:

$4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0; x = 0$ pues $x^2 + 1 \neq 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ ahora igualamos a cero $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0;$ $x = 0$.

d) $f(x) = e^x(x - 1)$; $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$ que igualamos a cero y resolvemos:

$xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$ ya que e^x sólo se anula para $x = -\infty$.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

③① Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 en cada una de las siguientes funciones.

Como la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en ese punto, hallamos la derivada primera e igualamos a cero:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ ahora hacemos $f'(x) = 0$; $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $y = f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$ luego el punto pedido es (0, -1).

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{\quad}{(x^2-1)^2}$ igualamos a cero y resolvemos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Los puntos que anulan la derivada primera son: $\begin{cases} (0,0) \\ \left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(4x-3)(2-x)-(2x^2-3x)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{8x-6-4x^2+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Los puntos en que se anula la derivada primera son: $\begin{cases}(1,-1)\\(3,-9)\end{cases}$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Los puntos en que se anula la derivada primera son: $\begin{cases}(-1,-2)\\(1,2)\end{cases}$.

❊❊❊❁❁✪❁❁❊❊❊

③② Averigua si en las siguientes funciones existen puntos en los que *f ' (x)* = 0:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{5}{(x+1)^2}$ luego la derivada primera no se anula para ningún valor de x.

b) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{6(x^2+1)-6x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$.

f'(x) =0; $-6x^2+6=0$; $x=\pm1$

Los puntos en que se anula la derivada primera son: $\begin{cases}(-1,-3)\\(1,3)\end{cases}$.

c) f(x) = ln(x+1) $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ que no se anula para ningún valor de x.

d) f(x) = 10 – $(x-2)^4$ $\Rightarrow$ f'(x) = $-4(x-2)^3$ luego para que f'(x) = 0, x – 2 = 0, es decir x = 2 y el punto en que se anula la primera derivada es (2, 10).

❊❊❊❁❁✪❁❁❊❊❊

③③ Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, la derivada primera es una función de tipo racional que no está definida para los valores que anulan al denominador, x = 0.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ luego la derivada no existe para x + 2 $\le$ 0, es decir el dominio de f´(x) es (-2, + ∞).

c) $f(x)=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ función que esta definida para valores de x tal que $x^2 - 1 > 0$, Dom(f'(x)) = (- ∞, -1) ∪ (1, +∞).

d) $f(x)=|x-3|=\begin{cases}-x+3 & x<3\\ x-3 & x\geq 3\end{cases}$

Continuidad

◈ Para $x \neq 3$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 3 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-x+3)=0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0=f(3)$ es continua en x = 3.

Es continua en $\Re$.

Derivabilidad

Para $x\neq 3$ $f'(x)=\begin{cases}-1 & x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$

◈ En x = 3, $f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-1)=-1$; $f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(1)=1$

Como las derivadas laterales en x = 3 no son iguales ($f'(3^-) = -1 \neq 1 = f'(3^+)$) no es derivable en x = 3.

e) $f(x)=\left|\dfrac{4x-5}{2}\right|$ como se anula en x = 5/4 y negativa para x < 5/4 y positiva para x > 5/4, la función a intervalos queda: $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(4x-5) & x<\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{1}{2}(4x-5 & x\geq\dfrac{5}{4}\end{cases}$

Continuidad

◈ Para $x \neq 5/4$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 5/4 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5/4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5/4}-\dfrac{1}{2}(4x-5)=0\\ \lim\limits_{x\to 5/4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5/4}\dfrac{1}{2}(4x-5)=0\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 5/4} f(x)=0=f(5/4)$ es continua en x = 5/4.

Es continua en $\Re$.

Derivabilidad

Para x ≠ 5/4 $f'(x)=\begin{cases}-2 & x<5/4\\ 2 & x>5/4\end{cases}$

◈ En x = 5/4, $f'(5/4^-)=\lim\limits_{x\to 5/4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 5/4}(-2)=-2$; $f'(5/4^+)=\lim\limits_{x\to 5/4^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 5/4}(2)=2$ Como las derivadas laterales en x = 5/4 no son iguales (f'(5/4⁻) = -2 ≠ 2 = f'(5/4⁺)) no es derivable en x = 5/4.

f) $f(x) = |x^2 – 2x|$, $x^2 – 2x = 0$; $x(x – 2) = 0$, x = 0, y x = 2 la función queda:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x<0\\ -x^2+2x & 0\le x\le 2\\ x^2-2x & x>2\end{cases}$$

Continuidad

◈ Para x ≠ 0 y x ≠ 2 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 0 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2+2x)=0\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, la función es continua en x = 0.

◈ En x = 2 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+2x)=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+3x+2)=2\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$, la función es continua en x = 2.

Teniendo en cuenta los tres puntos anteriores concluimos que la función es continua en $\Re$.

Derivabilidad

Para x ≠ 0 y x ≠ 3 $f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<0\\ -2x+2 & 0<x<2\\ 2x-2 & x>2\end{cases}$

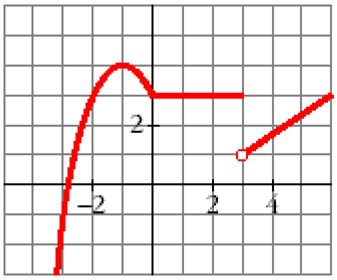
◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x-2)=-2$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2x+2)=2$

Como las derivadas laterales en x = 0 no son iguales (f'(0⁻) = -2 ≠ 2 = f'(0⁺)) no es derivable en x = 0.

◈ En x = 3 $f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-2x+2)=-4$; $f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-2)=4$

Como las derivadas laterales en x = 3 no son iguales (f'(3⁻) = -4 ≠ 4 = f'(3⁺)) no es derivable en x = 3.

③④ Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Estudia su continuidad y derivabilidad.



$f(x)$ es continua en R–{3}. En $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto finito.
$f(x)$ es derivable en R–{0, 3}. En $x = 0$ hay un punto anguloso (las derivadas laterales no coinciden) y en $x = 3$ no es continua, por tanto, no puede ser derivable.

③⑤ Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & x \le 1 \\ -x^2 + nx & x > 1 \end{cases}$ Calcula m y n para que f sea derivable en $\Re$.

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

Continuidad

◈ Para $x \ne 1$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x^2 + nx) = n - 1 \end{cases}$ para que sea continua en x = 1 los límites laterales han de ser iguales, luego n – 1 = m – 4, n – m = -3.

Derivabilidad

Para $x \ne 1$ $f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x < 1 \\ -2x + n & x > 1 \end{cases}$

◈ En x = 1, $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x - 5) = -3$; $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-2x + n) = -2 + n$

Como las derivadas laterales, para que f(x) sea derivable en x = 1 han de ser iguales, -3 = - 2 + n, de donde n = -1.

Como n = -1, sustituyendo en n – m = -3, podemos despejar m: -1 – m = - 3, m = 2.

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

③⑥ Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x \le 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$? Represéntala gráficamente.

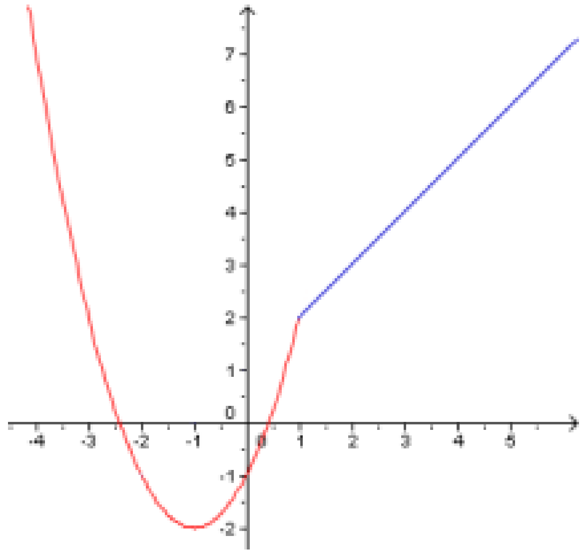
Continuidad

◈ Para $x \ne 1$ es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$ es continua en x = 1.

Es continua en $\Re$.

Derivabilidad



Para x ≠ 1 $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

◈ En x = 1, $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x+2) = 4$;

$f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1) = 1$

Como las derivadas laterales en x = 1 no son iguales ($f'(1^-) = 4 \neq 1 = f'(1^+)$) no es derivable en x = 1.

La única función de la derivada que puede anularse es la correspondiente al primer intervalo de definición 2x + 2 = 0 si x = - 1.

❋❋❋❁❁✪❁❁✻✻✻

③⑦ Halla a y b para que la función f(x) sea continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & x<-1 \\ ax+b & -1\le x\le 0 \\ 3x^2+2 & x\ge 0 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

❋❋❋❁❁✪❁❁✻✻✻

Continuidad

◈ Para x ≠ -1 y x ≠ 0 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = -1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(2x+a) = -2+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax+b) = b-a \end{cases}$ como, para que la función sea continua en x = - 1, los límites laterales han de ser iguales, ha de cumplirse -2 + a = b – a, es decir 2a – b = 2.

◈ En x = 0 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(ax+b) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(3x^2+2) = 2 \end{cases}$ como, l como, para que la función sea continua en x = - 0, los límites laterales han de ser iguales, ha de cumplirse b = 2.

Han de cumplirse las dos condiciones : $\begin{cases} b=2 \\ 2a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow 2a-2=2 \Leftrightarrow a=2$.

Por tanto f(x) será continua si a = 2 y b = 2.

Con lo que la función queda $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x<-1 \\ 2x+2 & -1\le x\le 0 \\ 3x^2+2 & x\ge 0 \end{cases}$ que, como los dos intervalos primeros son iguales, se puede refundir en $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x<0 \\ 3x^2+2 & x\ge 0 \end{cases}$.

Derivabilidad

Para $x\neq 0\, f'(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ 6x & x>0 \end{cases}$

◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2)=2$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(6x)=0$

Como las derivadas laterales en x = 0 no son iguales ($f'(0^-) = 2 \neq 0 = f'(0^+)$) no es derivable en x = 0.

✳✳✳❁❁✪❁❁✳✳✳

③⑧ Calcula f'(0), siendo f(x) = $\ln\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2x+1}}$

✳✳✳❁❁✪❁❁✳✳✳

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2x+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2x+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(e^x+e^{-x}\right)-\ln(2x+1)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-\frac{2}{2x+1}\right] \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^0-\frac{1}{e^0}}{e^0+\frac{1}{e^0}}-\frac{2}{2\cdot 0+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1-1}{1+1}-2\right]=\frac{1}{2}(-2)=-1.$$

✳✳✳❁❁✪❁❁✳✳✳

③⑨ Halla la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) y = sen x cos x en x = π/4

b) y = x lnx en x = e.

c) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ en x = 0 y x = 1.

d) y = e^{x^2-1} en x = 1.

✳✳✳❁❁✪❁❁✳✳✳

a) y’ = cosx·cos x – senx ·senx = $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ = cos 2x.

Ahora sustituimos x = π/4, y’(π/4) = cos2·(π/4) = cos(π/2) = 0.

b) y = xlnx $\Rightarrow y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

Ahora sustituimos x = e, y’(e) = lne + 1 = 1 + 1 = 2.

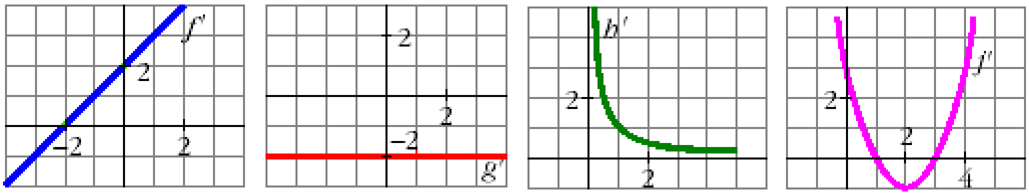
c) $y = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{2x\cdot e^x - x^2\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x(-x^2+2x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-x^2+2x}{e^x}$

Luego $y'(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0; \quad y'(1) = \frac{-1+2}{e^1} = \frac{1}{e}$

d) y = $e^{x^2-1} \Rightarrow y' = 2xe^{x^2-1} \Rightarrow y'(1) = 2\cdot e^{1-1} = 2$

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

40 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?
c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.
- f tiene un punto de tangente horizontal en x = –2, pues f' (–2) = 0.
- j tiene dos puntos de tangente horizontal en x = 1 y en x = 3, pues j' (1) = j' (3) = 0.
- g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f '.

❋❋❋❁❁✪❁❁✳✳✳

CUESTIONES TEÓRICAS

Pág 167

④① Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener? ¿Puede tener uno o ninguno?

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de un grado inferior es decir de segundo grado.Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

Por ejemplo:

$f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x$; $3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Dos puntos

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Un punto

$f(x) = x^3 + 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 5 \neq 0$ que no tiene solución real $\Rightarrow$ Ninguno.

④② Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre unpunto de tangente horizontal.

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

④③ Si una función tiene un punto anguloso en x = a, ¿qué podemos decir de f'(a)?

f' (a) no existe pues las derivadas laterales en x = a no son iguales.

④④ Sea f una función de la que sabemos que:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -1 \qquad f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

¿Es f derivable en x = 2?

No, pues las derivadas laterales no coinciden.

④⑤ La función f (x) = $\sqrt{x-3}$ es continua en x = 3 y f '(3) = +∞. ¿Cómo es la recta tangente a f en x = 3?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Es una recta vertical pues su pendiente en x = 3 es m = f'(3) = + ∞.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑥ Dada la función f (x) = $\frac{x^2}{2}$, halla f ' (x) y f '' (x) aplicando dos veces la definición de derivada.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^2}{2}-\frac{x^2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+2hx+h^2}{2}-\frac{x^2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{2}=\frac{2\cdot x+h}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

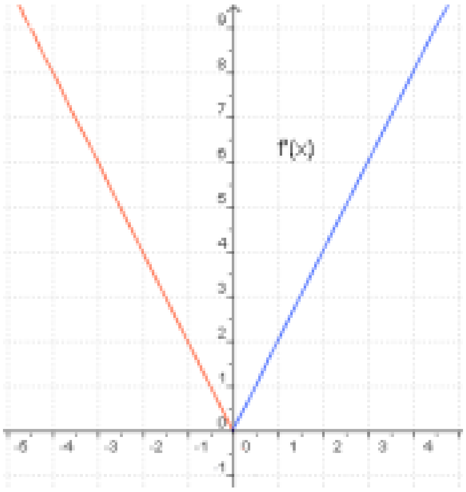
$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

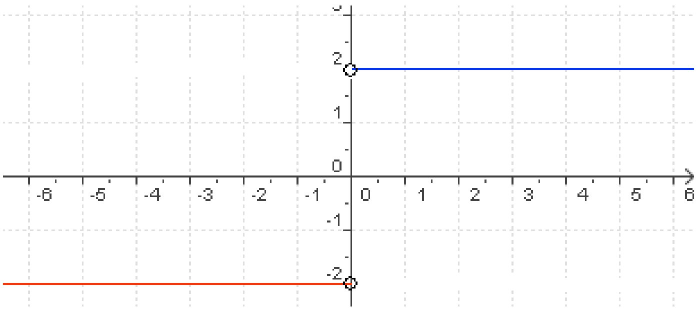
④⑦ Sea la función f (x) = x|x| = $\begin{cases}-x^2 & \text{si } x\le 0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$. Halla f' (x), f'' (x) y represéntalas.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & x\le 0\\ 2x & x>0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-2 & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$$



Ya que f(x) es continua en ℜ, $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ y $f''(0^-) = -2 \neq f''(0^+) = 2$.



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑧ Prueba que la función *f* (*x*) = *x* + |*x* – 3| no es derivable en *x* = 3.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

Como x – 3 = 0, es decir x = 3, para valores x < 3 |x – 3| = -x + 3 ya que es negativa y para valores x > 3 |x – 3| = x + 3 ya que es positiva. La función convertida en función a trozos queda:

$$f(x)=\begin{cases} x-x+3 & x\le 3 \\ x+x-3 & x>3 \end{cases}=\begin{cases} 3 & x\le 3 \\ 2x-3 & x>3 \end{cases}$$

Continuidad

◈ Para x ≠ 3 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 3 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)=3 \end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3=f(3)$ es continua en x = 3.

Es continua en $\Re$.

Derivabilidad

Para x ≠ 3 $f'(x)=\begin{cases} -2 & x<3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$

◈ En x = 3, $f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-2)=-2$; $f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2)=2$

Como las derivadas laterales en x = 3 no son iguales ($f'(3^-)$ = -2 ≠ 2 = $f'(3^+)$) no es derivable en x = 3.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

④⑨ Calcula la derivada de orden *n* de la función *f* (*x*) = e^{2x}.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

$f(x) = e^{2x}$
$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$
$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x}$
...
$f''(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

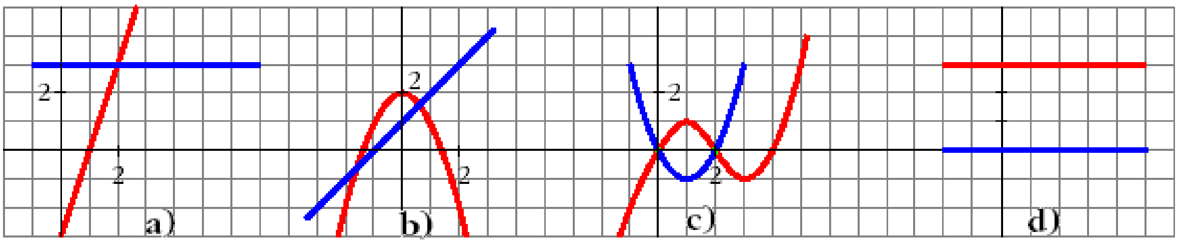
⑤⓪ Dada la función *f* (*x*) = e^x + *ln* (1 – *x*), comprueba que *f'* (0) = 0 y *f''* (0) = 0. ¿Será también *f'''* (0) = 0?

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

$$f'(x)=e^x+\frac{-1}{1-x}\Rightarrow f'(0)=e^0-\frac{1}{1}=1-1=0$$
$$f''(x)=e^x-\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(0)=e^0-\frac{1}{1}=1-1=0$$
$$f'''(x)=e^x-\frac{2}{(1-x)^3}\Rightarrow f'''(0)=e^0-\frac{2}{1}=1-2=-1\neq 0$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤① ¿Cuál de estas gráficas representa la función *f* y cuál su derivada *f'* ? Justifica tu respuesta.



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es *y* = 3. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En x = 0, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0). No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En *x* = 1, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

d) La función es una recta de pendiente 0. Por tanto, su derivada es y = 0. Luego, estas gráficas sí representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera y la última son válidas.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤② La función *f* (*x*) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que *f* (1) = 1, *f* '(1) = 0 y *f* '' (1) = 0. Calcula *a*, *b* y *c*.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$

Aplicando las tres condiciones tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a, b y c) cuya resolución nos da los valores buscados

$$\begin{cases} f(1)=1+a+b+c=1 \\ f'(1)=3+2a+b=0 \\ f''(1)=6+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=-3 \\ 2a=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} c=-a-b=3-3=0 \\ b=-3-2a=-3+6=3 \\ a=-3 \end{matrix} \text{ luego:}$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤③ **Determina el valor de *k* que hace que la función *f* (*x*) = $\frac{e^x}{x^2+k}$ tenga un solo punto en el que se verifique *f '* (*x*) = 0.**

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+k)-2xe^x}{\left(x^2+k\right)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+k)}{\left(x^2+k\right)^2}$$

Si $f'(0) = \frac{e^x(x^2-2x+k)}{\left(x^2+k\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+k=0$, que para que tenga solución única su discriminante $b^2 - 4ac = 0$; $4 - 4k = 0$, es decir $k = 1$ para que f'(0) sólo tenga una solución.

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

⑤④ **Calcula *a*, *b* y *c* para que la función *f* (*x*) = $ax^2 + bx + c$ pase por el punto (0, 3) y verifique *f* '(1) = –2 y *f* '(2) = 0.**

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

Hallamos la primera derivada: f' (x) = 2ax + b e imponemos las condiciones:

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f'(1)=-2 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} c=3 \\ 2a+b=-2 \\ 4a+b=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ -4a-b=0 \\ \hline -2a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=-2-2a=-2-2=-4 \\ c=3 \end{matrix}$$, luego la función es:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$.

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

⑤⑤ **Halla los puntos de la función *y* = $\frac{2x}{x-1}$ en los que la pendiente de la recta tangente es igual a –2.**

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

Si la pendiente de la recta tangente ha de ser –2, en esos puntos f'(x) = -2.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Luego los puntos son: $\begin{cases} (0, f(0)) = (0,0) \\ (2, f(2)) = (2,4) \end{cases}$

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

56 Halla *a* y *b* para que la función *f* (*x*) sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & x<-1 \\ -2x^3+b & -1\le x<0 \\ e^x-a & x\ge 0 \end{cases}$$

Para los valores de *a* y *b* obtenidos, estudia la derivabilidad de *f*.

Continuidad

◈ Para x ≠ -1 y x ≠ 0 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = -1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+a)=1+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-2x^3+b)=2+b \end{cases}$ como, para que la función sea continua en x = - 1, los límites laterales han de ser iguales, ha de cumplirse 1 + a = 2+ b, es decir a – b = 1.

◈ En x = 0 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2x^3+b)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=1-a \end{cases}$ como, para que la función sea continua en x = 0, los límites laterales han de ser iguales, ha de cumplirse b = 1 - a.

Han de cumplirse las dos condiciones : $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1; b=1-1=0$.

Por tanto f(x) será continua si a = 1 y b = 0, quedando: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<-1 \\ -2x^3 & -1\le x<0 \\ e^x-1 & x>0 \end{cases}$

Derivabilidad

Para $x\neq -1$ y $x\neq 0$ $f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \\ -6x^2 & -1<x<0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$

◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-6x^2)=0$; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x)=e^0=1$

Como las derivadas laterales en x = 0 no son iguales ($f'(0^-)$ = 0 ≠ 1 = $f'(0^+)$) no es derivable en x = 0.

◈ En x = -1 $f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1}(2x)=-2$; $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-6x^2)=-6$

Como las derivadas laterales en x = -1 no son iguales (f'(-1⁻) = -2 ≠ -6 = f'(-1⁺)) no es derivable en x = -1.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

58 ¿Existe algún punto en el que $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ no sea derivable? Justifica tu respuesta.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

Pasamos la función en valor absoluto a una a trozos o intervalos:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<0\\ \dfrac{1}{1+x} & x\geq 0\end{cases}$$

Continuidad

◈ Para x ≠ 0 es continua pues las funciones de cada intervalo son polinómicas y por tanto continuas.

◈ En x = 0 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)=1\end{cases}$ como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ es continua en x = 0 y por tanto es continua en $\Re$.

Derivabilidad

Para $x\neq 0$ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & x<0\\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & x>0\end{cases}$

◈ En x = 0, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)=1;\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{(1+x)^2}\right)=-1$

Como las derivadas laterales en x = 0 no son iguales (f'(0⁻) = 1 ≠ -1 = f'(0⁺)) no es derivable en x = 0.

f(x) es derivable en $\Re$ - {0}.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋