PARA RESOLVER

⑬

a) Calcula el límite de la función f(x) cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:

$$f(x) = (x-3)/(x^2-5x+6)$$

b) Representa gráficamente los resultados obtenidos.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a)

❁ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

❁ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{-1}{0}$ indeterminado, hallamos los límites laterales $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = +\infty \end{cases}$

$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999	1,9999
$\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$	-10	-100	-1000	-10000

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001	2,0001
$\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$	10	100	1000	10000

❁ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{0}{0}$ Ind. Descomponemos en producto de factores y simplificamos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

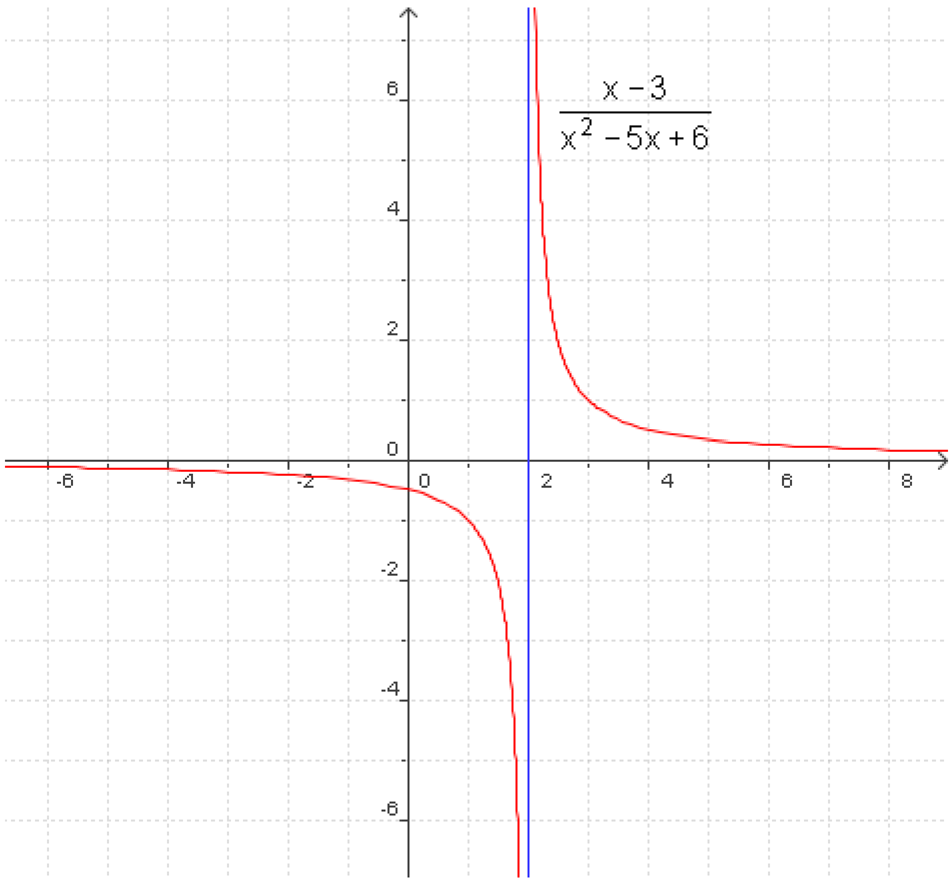
❁ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Ind. Resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

❀ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{-\infty}{\infty}$ Ind. Resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x-3}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to \infty} \frac{-\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

b)



❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀

①④

a) Calcula el límite de la función $y = (x^2 - 9)/(x^2 - 3x)$ en aquellos puntos en los que no está definida.

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$,

c) Representa la función con la información que has obtenido.

d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de la función?

❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀

a) Como es una función racional, los puntos que no pertenecen al dominio son aquellos que anulan el denominador $x^2 - 3x = 0$; $x(x - 3) = 0$, $x = 0$ y $x = 3$, luego su dominio es $R - \{0, 3\}$, hallamos los límites en los puntos que no pertenecen al dominio(no está definida):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{-9}{0} \text{ Ind. Límites laterales } \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = +\infty \end{cases}$$

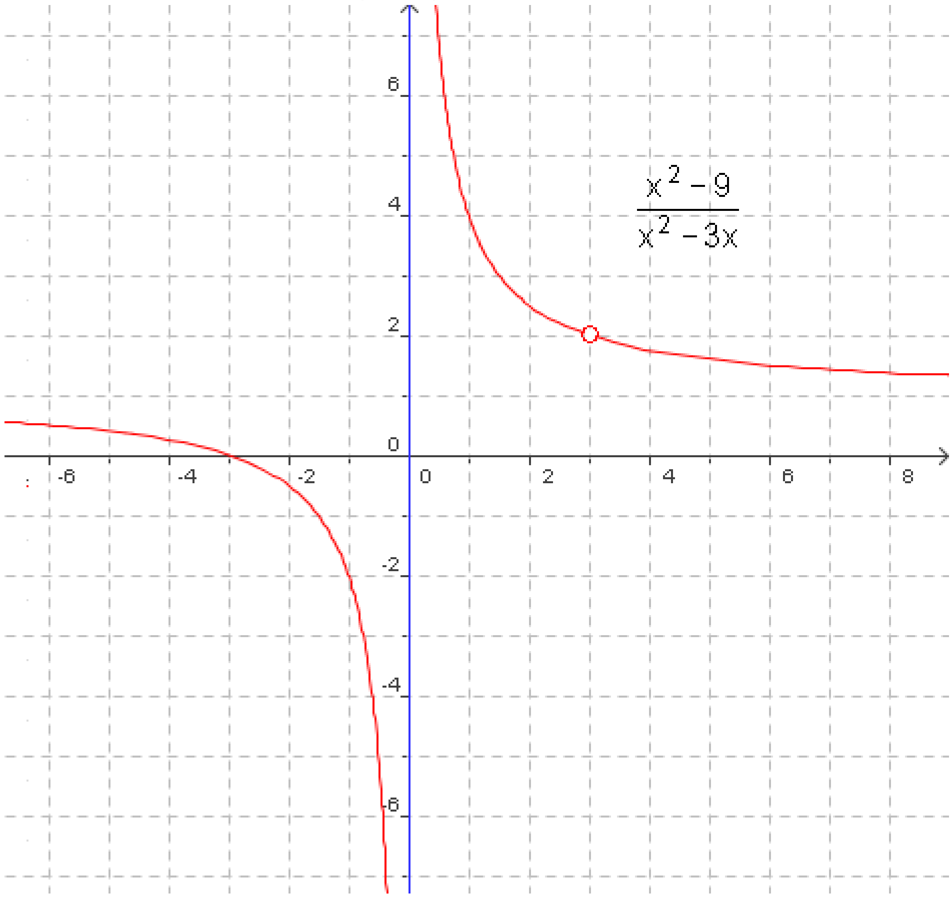
$x \to 0^-$	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$	-29	-299	-2999	-29999

$x \to 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$	31	301	3001	30001

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \text{ Ind, descomponemos y simplificamos:}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x} = 1.$



c)

d) Es discontinua en x = 0 (asíntota vertical, pues su límite es infinito) y en x = 3 (discontinuidad evitable pues su límite existe, se podría evitar haciendo que f(3) = 2).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⑤ Sea la función $f(x) = (x^4 - 3x^3 + 2x^2)/(x^2 - x)$.

a) Calcula: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

b) ¿Cuál es la función que coincide con f(x) excepto en x = 0 y en x = 1?

c) ¿En qué puntos no es continua f(x)?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$ Ind. Descomponemos y simplificamos.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-3x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}x(x-2)=0$$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$ Ind. Descomponemos y simplificamos.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x^2-3x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}x(x-2)=-1.$$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ Ind.

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x^3}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

b) La queda después de simplificar los factores x(x – 1), g(x) = x(x – 2).

c) No es continua en los valores que anulan el denominador x = 0 y x = 1 en donde la función (al tener límites) tiene dos discontinuidades evitables si f(0) = 0 y f(1) = -1.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⑥ Calcula el límite de la función $f(x) = (x^2 - x)/(2x^2 - 8)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$ y $x \to -2$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{2x^2-8}=\frac{0}{-8}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x}{2x^2-8}=\frac{4-2}{0}=\frac{2}{0}\ \text{Ind . límites laterales}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x}{2x^2-8}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x}{2x^2-8}=+\infty\end{cases}$$

$x\to 2^-$	1,9	1,99	1,999	1,9999
$\frac{x^2-x}{2x^2-8}$	-2,19...	-24,9...	-249,68...	-2499,68

$x\to 2^+$	2,1	2,01	2,001	2,0001
$\frac{x^2-x}{2x^2-8}$	2,8	25,31	250,31	2500,31

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x}{2x^2-8}=\frac{4+2}{0}=\frac{6}{0}\ \text{Ind . límites laterales}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x}{2x^2-8}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x}{2x^2-8}=-\infty\end{cases}$$

$x\to -2^-$	-2,1	-2,01	-2,001	-2,0001
$\frac{x^2-x}{2x^2-8}$	7,39	75,44	750,44	7500,44

$x\to -2^+$	-1,9	-1,99	-1,999	-1,9999
$\frac{x^2-x}{2x^2-8}$	-7,064	-74,56	-749,56	-7499,56

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

①⑦ Calcula el límite de la función f (x) = 2 + x/(x+1) cuando x → + ∞, x → -∞ y x → -1.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{x/x+1/x}=2+\frac{1}{1+0}=2+1=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=2+\lim_{x\to\infty}\frac{x/x}{x/x+1/x}=2+\frac{1}{1+0}=2+1=3$$

$$\lim_{x\to -1}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=2+\frac{-1}{0} \text{ Ind. Hallamos los límites laterales } \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(2+\frac{x}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$$

$x\to -1^-$	-1,1	-1,01	-1,001	-1,0001
$\frac{x}{x+1}$	11	101	1001	10001

$x\to -1^+$	-0,9	-0,99	-0,999	-0,9999
$\frac{x}{x+1}$	-9	-99	-999	-9999

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

①⑧ Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ si } x\le 2\\ k-x \text{ si } x>2\end{cases}$

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

- ❍ x +1 es una función lineal que es continua en su intervalo de definición.
- ❍ k - x es una función lineal (polinómica de grado 1) y por tanto continua.

La función es continua para $x \ne 2$

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 2 en este caso):

$$f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ si } x\le 2\\ k-x \text{ si } x>2\end{cases}\xrightarrow{\text{límites laterales}}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(k-x)=k-2\end{cases}$$

f(2) = 2+1 = 3 luego para que sea continua en x = 2 los límites laterales han de ser iguales e igual a f(2), k – 2 = 3, k = 5.

b) $f(x)=\begin{cases}x+k \text{ si } x\le 0\\ x^2-1 \text{ si } x>0\end{cases}$

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

- ❍ x + k es una función lineal que es continua en su intervalo de definición.
- ❍ x^2 - 1 es una función cuadrática (polinómica de grado 2) y por tanto continua.

La función es continua para $x \ne 0$.

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 0 en este caso):

$$f(x)=\begin{cases} x+k & \text{si } x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x>0 \end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+k)=0+k=k. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=0^2-1=-1 \end{cases}$$

f(0) = k luego para que sea continua en x = 0 los límites laterales han de ser iguales e igual a f(2), k = -1.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

①⑨ Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \\ k & \text{si } x=1 \end{cases}$

Para $x\ne 1$ la función es continua pues la función racional $\dfrac{x^4-1}{x-1}$ es discontinua en x = 1.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ Ind. descomponemos mediante Ruffini:

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	$\boxed{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1)=1+1+1+1=4$$

Como f(1) = k, para que sea continua $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=f(1)\Leftrightarrow 4=k$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ k & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Para $x\ne 1$ la función es continua.

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} k=k.$$

Para que f(x) sea continua los límites laterales han de ser iguales y por tanto k = 2.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

②① Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\le 2 \\ a-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

- $x^2 + ax$ es una función cuadrática que es continua en su intervalo de definición.
- $a - x^2$ es una función cuadrática (polinómica de grado 2) y por tanto continua.

La función es continua para $x \neq 2$.

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 2 en este caso):

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\le 2 \\ a-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+ax)=2^2+a\cdot 2=4+2a. \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(a-x^2)=a-2^2=a-4 \end{cases}$$

luego para que sea continua en x = 2 los límites laterales han de ser iguales, es decir 4 + 2a = a – 4; a = -8, si $a \neq -8$, la función es discontinua en x = 2.

b) $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\le 0 \\ x+2a & \text{si } x>0 \end{cases}$

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

- e^{ax} es una función exponencial que es continua en su intervalo de definición.
- x + 2a es una función lineal (polinómica de grado 1) y por tanto continua.

La función es continua para $x \neq 0$.

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 0 en este caso):

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\le 0 \\ x+2a & \text{si } x>0 \end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax}=e^0=1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2a)=2a \end{cases}$$

luego para que sea continua en x = 0 los límites laterales han de ser iguales 1 = 2a $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$, si $a \neq ½$ la función es discontinua en x = 0.

②① Se considera la función f(x) definida del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2| \text{ si } x<-1\\ x^2 \quad \text{si } -1\le x<1\\ 2x+1 \quad \text{si } x>1\end{cases}$$

Se desea saber si es continua en todos los puntos o deja de serlo en alguno.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

El trozo primero, en valor absoluto, se debe a su vez descomponer en dos intervalos teniendo en cuenta la definición de valor absoluto:

Como para que x + 2 = 0, x = -2, si x ≤ - 2, f(x) = - x - 2 y si – 2 <x < - 1 f(x) = x + 2, luego la función queda:

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 \text{ si } x\le -2\\ x+2 \text{ si } -2<x<-1\\ x^2 \text{ si } -1\le x<1\\ 2x+1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

En cada intervalo de definición, las funciones son continuas por ser polinómicas, estudiamos la continuidad en los puntos de separación o frontera, estudiando los límites laterales:

En x = -2

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-x-2)=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x+2)=0\end{cases}$ luego los límites laterales existen y son iguales, como además es igual a f(-2) = 0, la función es continua en x = -2.

En x = -1

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+2)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2=(-1)^2=1\end{cases}$ luego los límites laterales existen pero no son iguales, la función es discontinua en x = -1.

En x = 1

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3\end{cases}$ luego los límites laterales existen pero no son iguales, la función es discontinua en x = 1.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

②② Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

a) $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ x+1 \text{ si } 0<x<1 \\ x^2-2x \text{ si } 1\le x \end{cases}$

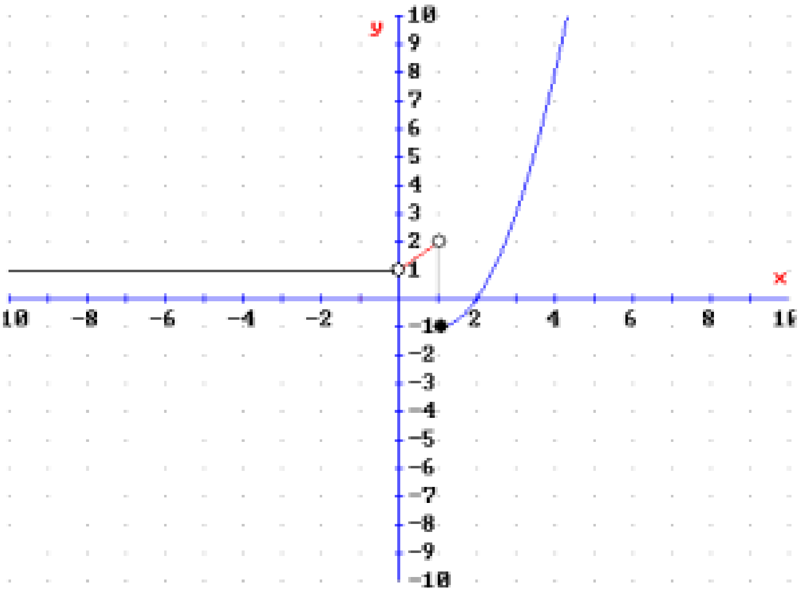
En cada intervalo de definición las funciones son continuas, luego la función es continua para $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Ahora estudiamos la continuidad en cada punto frontera:

En x = 0

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)=1 \end{cases}$ como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ pero como f(0) no existe, la función en x = 0, es discontinua evitable.

En x = 1

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-2x)=-1 \end{cases}$ como los límites laterales no coinciden en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito (2 –(-1) = 3).



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} 1=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-2x)=+\infty$

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-x^2 \text{ si } x\le 3 \\ x-3 \text{ si } 3<x<6 \\ 0 \text{ si } x\ge 6 \end{cases}$

En cada intervalo de definición las funciones son continuas, luego la función es continua para $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Ahora estudiamos la continuidad en cada punto frontera:

En x = 3

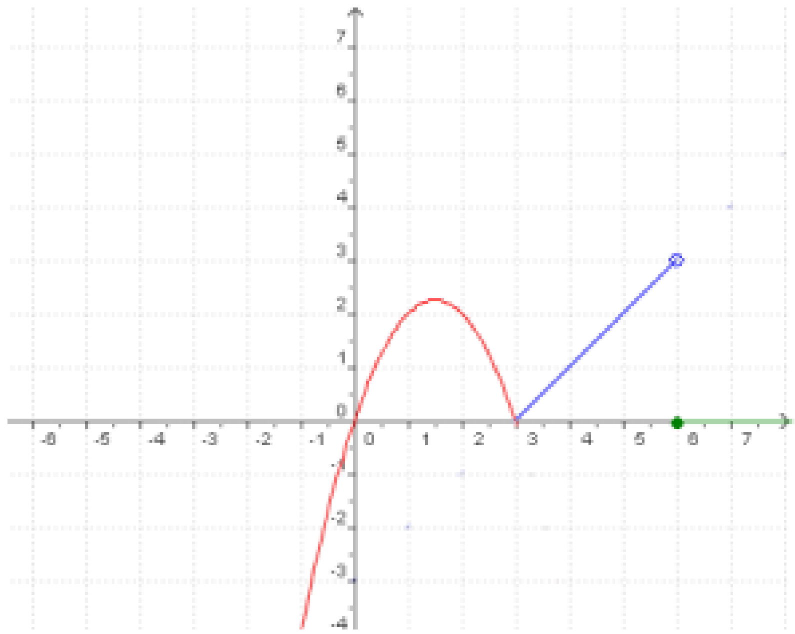
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0 \end{cases}$$ como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$ y como f(3) también es 0, la función en x = 3, es continua.

En x = 6

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} (x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+} 0 = 0 \end{cases}$$ como los límites laterales no coinciden en x = 6 tiene una discontinuidad de salto finito (3 - 0 = 3).

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 0 = 0$ asíntota horizontal por la derecha.



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

②③ Representa gráficamente la función f(x) y estudia su continuidad: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

En cada uno de los intervalos de definición es continua ya que son funciones polinómicas, en los puntos frontera estudiamos los límites laterales:

En x = 0

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \text{No existe} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + 5x) = 0 \end{cases}$$ en x = 0 f(x) es discontinua pues no tiene límite por la izquierda

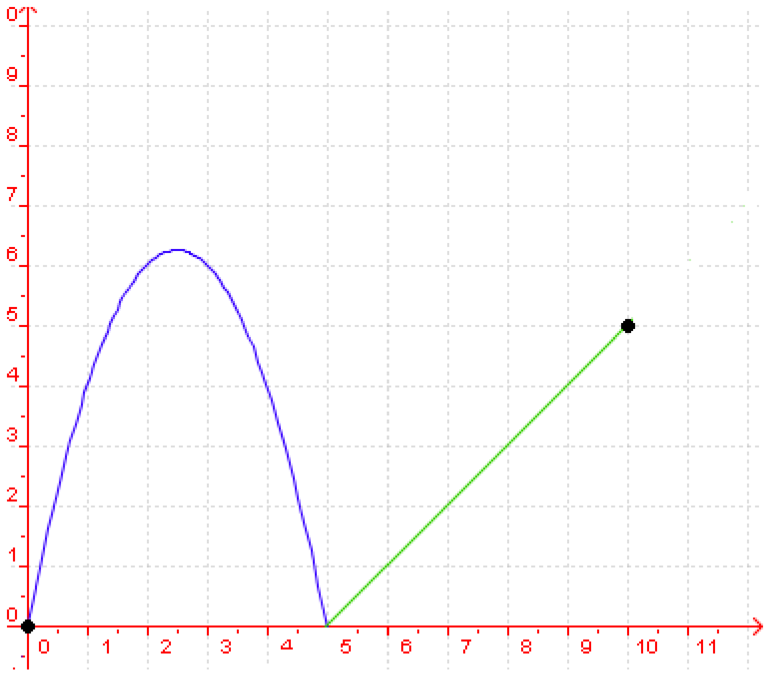
En x = 5

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (-x^2+5x) = -5^2+5\cdot 5 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} (x-5) = 5-5 = 0 \end{cases}$$ como además f(5) = 0, en x = 5 f(x) es continua.

En x = 10

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} (x-5) = 10-5 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \text{No existe} \end{cases}$$ en x = 10 f(x) es discontinua pues no tiene límite por la derecha.

Es continua en (0, 10).



②④ Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ y calcula el valor de b para que f(x) sea continua en x = -1. ¿Es continua en x = 1?

Para que f(x) sea continua en x = -1 ha de cumplirse $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$, para hallar el límite calculamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(\dfrac{1}{x^2} + b\right) = 1 + b \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (3x^2+4) = 7 \end{cases}$$ luego 1 + b = 7, b = 6.

Estudiamos la continuidad en x = 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2+4) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^3+8) = 7 \end{cases}$$ como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 7$,luego la función es continua en x = 1.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

②⑤ Representa, estudia la continuidad y halla los límites para x → -∞ y x → +∞ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2+4x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

En cada intervalo las funciones son continuas, la función es continua para x ≠ 1 y para x ≠ 2, ahora estudiamos la continuidad en los puntos frontera:

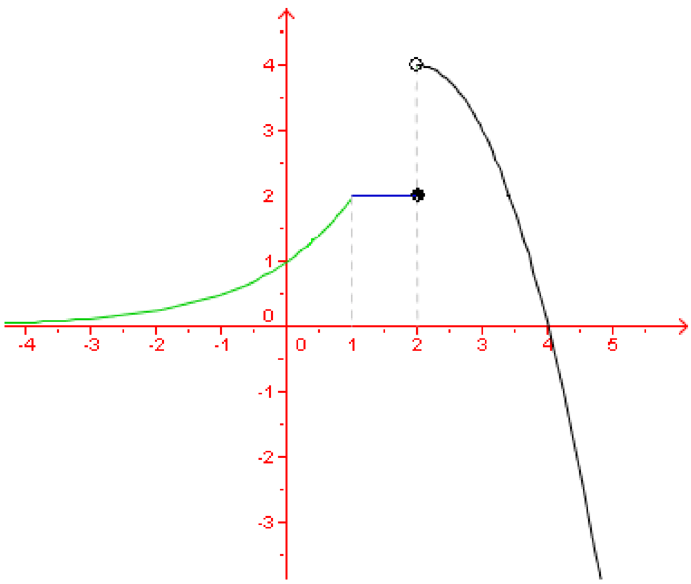
En x = 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2 \end{cases}$$ como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$,luego la función es continua en x = 1

En x = 2

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+8x) = -2^2+8{\cdot}2 = 12 \end{cases}$$

como los límites laterales no son iguales la función es discontinua (de salto finito) en x = 2.



$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

asíntota horizontal por la izquierda.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (-x^2+4x) = -\infty$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

②⑥ Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x<-1 \\ 2x+2 & \text{si } -1\le x\le 2 \\ -x^2+8x & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

En cada intervalo las funciones son continuas, la función es continua para x ≠ -1 y para x ≠ 2, ahora estudiamos la continuidad en los puntos frontera:

En x = -1

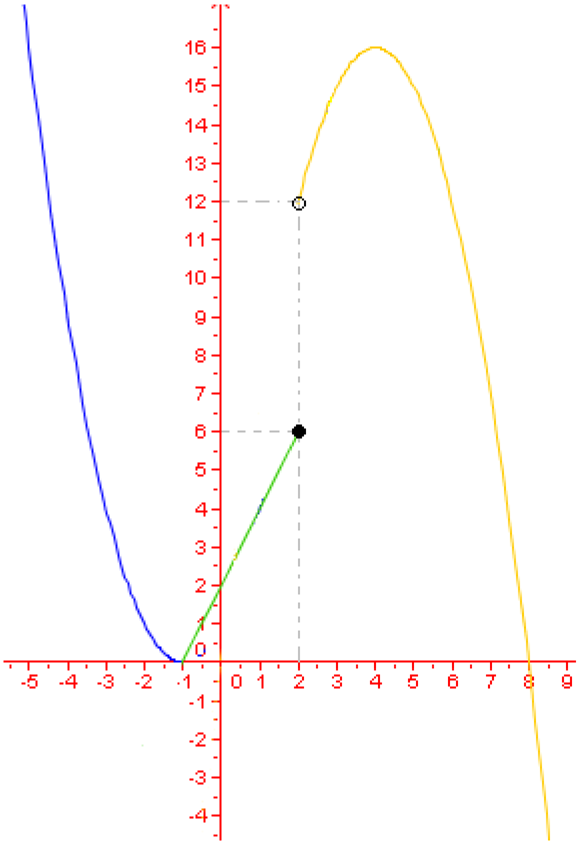
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+2x+1)=(-1)^2+2(-1)+1=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+2=2(-1)+2=0 \end{cases}$$

como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0$,luego la función es continua en x = -1

En x = 2

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+2)=2\cdot 2+2=6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+8x)=-2^2+8\cdot 2=12 \end{cases}$$

como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0$,luego la función es continua en x = -1



②⑦ Dada $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$ Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

En cada intervalo las funciones son continuas, la función es continua para x ≠ 0 y para x ≠ 3, ahora estudiamos la continuidad en los puntos frontera:

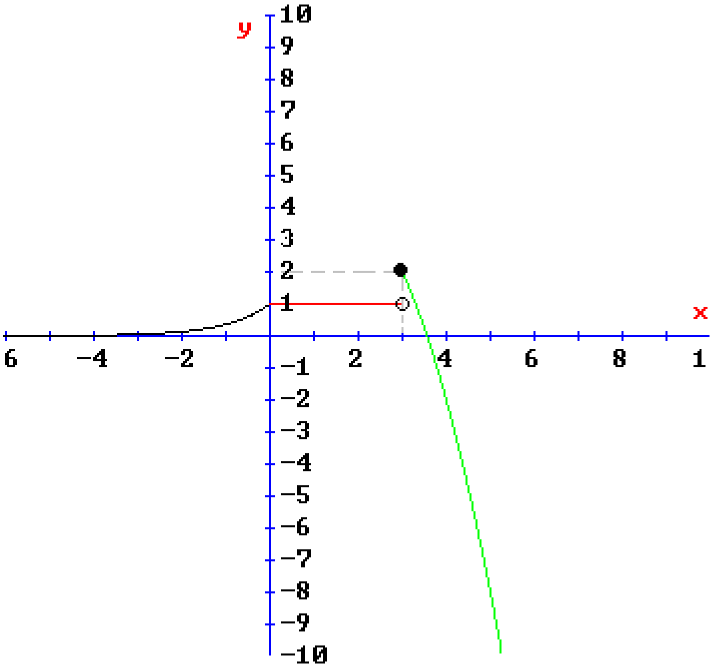
En x = 0

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1 \end{cases}$$

como los límites laterales son iguales $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$,luego la función es continua en x = 0.

En x = 3

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-x^2+3x+2) = -3^2+3{\cdot}3+2 = 2 \end{cases}$$ como los límites laterales no son iguales, luego la función es discontinua en x = 3.



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉘ El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: P(t) = $\dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde t = 0.Calcula:

a) La población inicial.

b) El tamaño de la población a largo plazo.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) P(0) = $\dfrac{15+0^2}{(0+1)^2} = \dfrac{15}{1} = 15$ millones de individuos.

b) Se refiere al límite de P(t) cuando $t \to +\infty$:

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{15+t^2}{(1+t)^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Ind $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{15+t^2}{(1+t)^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{15+t^2}{1+2t+t^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\frac{15}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+1} = \dfrac{\frac{15}{\infty}+1}{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}+1} = 1$ millón de individuos.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉙ Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}01x & \text{si } 0\le x\le 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & \text{si } x>100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f(x). Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) La función está definida para [0, +∞) y es continua en su dominio excepto para x = 100, cuyos límites laterales no coinciden:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to100^-} f(x)=\lim\limits_{x\to100^-} 0{,}01x=1\,(100€) \\ \lim\limits_{x\to100^+} f(x)=\lim\limits_{x\to100^+}\dfrac{30x}{2x+2300}=\dfrac{3000}{200+2300}=\dfrac{3000}{2500}=1{,}2\,(120€) \end{cases}$$

Los empleados que venden un valor ligeramente menor de 10 000 € (a la izquierda de x = 100) tiende a ganar 100 €, como hemos visto al hallar los límites laterales, y si las ventas son ligeramente mayores de 10 000 € (derecha de x = 100) tienden a ganar 120 €.

b) Para hallar la cantidad máxima hallamos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{30x}{2x+2300}=\frac{\infty}{\infty}\quad \text{Ind}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{30x}{2x+2300}=\lim_{x\to\infty}\frac{30}{2+\dfrac{2300}{x}}=\frac{30}{2}=15\ \ (1\,500\ €).$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉚ Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función f(t) = $\dfrac{15000t+10000}{2t+2}$ siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $f(0)=\dfrac{15000\cdot0+10000}{2\cdot0+2}=\dfrac{10000}{2}=5000$ individuos.

b) Se nos pide la TVM[4, 9] = $\dfrac{f(9)-f(4)}{9-4}=\dfrac{\dfrac{15000\cdot 9+10000}{2\cdot 9+2}-\dfrac{15000\cdot 4+10000}{2\cdot 4+2}}{5}=\dfrac{7250-7000}{5}=$ 50 individuos por año.

c) Es otra forma de pedirnos que hallemos el límite de la función cuando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{15000t+10000}{2t+2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{15000}{2}=7500 \text{ individuos.}$$

✳✳✳❀❀✪❀❀✳✳✳

31 Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & 0\le x\le 30\\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2 & x>30\end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.
b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

✳✳✳❀❀✪❀❀✳✳✳

a) Dominio [0, 30].

❀ La función racional del primer intervalo $\dfrac{300}{x+30}$ es discontinua para x = -30, pero ese valor no pertenece a su intervalo de definición, luego es continua para cualquier valor de su intervalo $x \neq 30$.

❀ La función racional del segundo intervalo $\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}$ es discontinua para x = 5 y x = 15, pero esos valores no pertenece a su intervalo de definición, luego es continua para cualquier valor de su intervalo $x \neq 30$.

Continuidad en x = 30:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 30^-}T(x)=\lim\limits_{x\to 30^-}\dfrac{300}{x+30}=\dfrac{300}{60}=5\\ \lim\limits_{x\to 30^+}T(x)=\lim\limits_{x\to 30^+}\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2=\dfrac{1125}{25\cdot 15}+2=5\end{cases}$$

como f(30) = 300/60 = 5, la función es continua en x = 30 y por tanto es continua en su dominio.

b) El mayor tiempo empleado es T(0) = 300/30 = 10 min y hallando el límite sabremos el tiempo mínimo:

$$\lim_{x\to+\infty}T(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1125}{(x-5)(x-15)}+2=\frac{1125}{\infty}+2=2\,\text{min}$$

luego, por mucho que se entrene la marca no bajará de 2 min.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③② Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ siendo x los años de vida de la empresa (x > 0) e y en cientos de miles de €.

a) Representa la función.

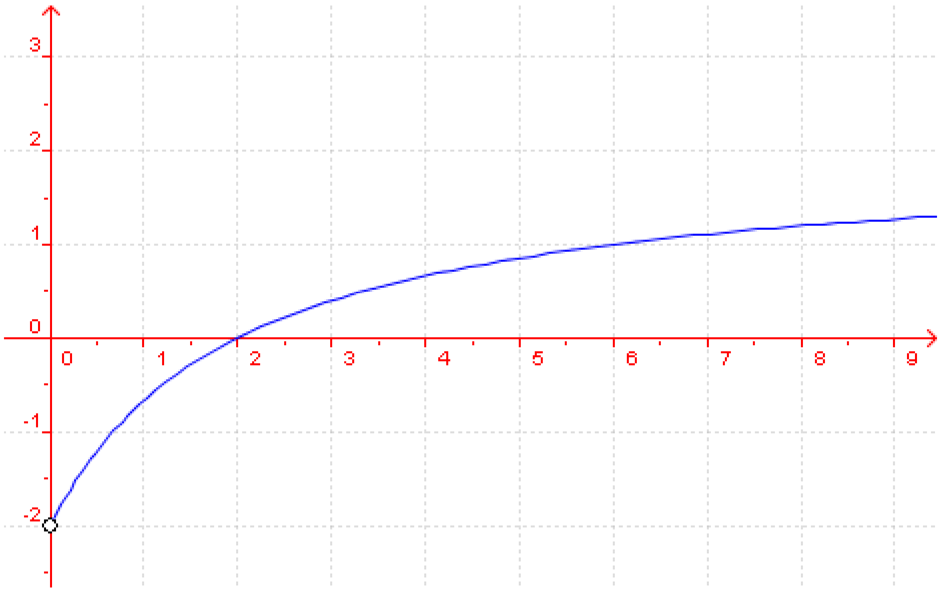
b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Dominio (0, +∞)

a)



b) Empieza a tener ganancias cuando la función sea igual o mayor que cero:

$\dfrac{2x-4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, luego deja de tener pérdidas a los 2 años.

c) Tenemos que hallar el límite cuando x→ +∞:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{2-\frac{4}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}} = 2$, el valor máximo del beneficio es de 200 000 €.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③③ Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Las funciones son continuas en su intervalo de definición, falta hacer que sea continua en el punto frontera x = 10 haciendo que los límites laterales en x = 10 sean iguales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} 5x = 5\cdot 10 = 50 \\ \lim\limits_{x\to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} \sqrt{ax^2+500} = \sqrt{100a+500} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{100a+500} = 50; 100a + 500 = 2500 \text{, es decir}$$

$100a = 2500 – 500;\ 100a = 2000;\ a = \dfrac{2000}{100} = 20$.

b) Es una forma de decirnos que hallemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{20x^2+500}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{20x^2}{x^2} + \frac{500}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{20 + \frac{500}{x^2}} = \sqrt{20 + \frac{500}{\infty}} = \sqrt{20} =$$

$2\sqrt{5} \approx 4,47$ €/unidad.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

CUESTIONES TEÓRICAS

③④ Sea la función f (x) = $(x^2-4)/(x-2)$ El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando x = 2. ¿Cómo elegimos el valor de f(2) para que la función f sea continua en ese punto?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0}$ Ind. descomponemos para resolver la indeterminación:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$, luego f(2) = 4 para que sea continua en x = 2.

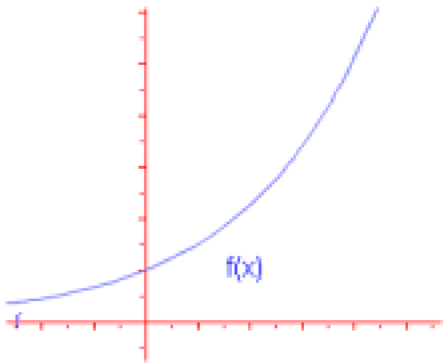
✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

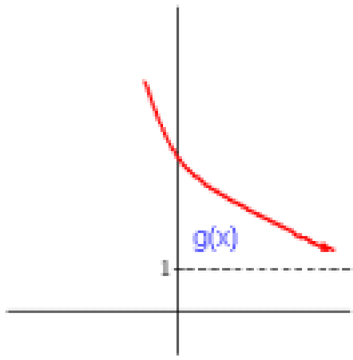
③⑤ Expresa simbólicamente cada una de estas frases y y haz una representación gráfic42 de cada caso:

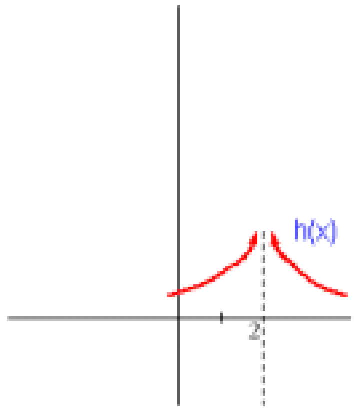
a) Podemos conseguir que f (x) sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.
b) Si pretendemos que los valores de g (x) estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.
c) Podemos conseguir que h(x) sea mayor que un número K, por grande que sea, dando a x valores suficientemente próximos a 2.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = +\infty$







✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③⑥ De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:

$g(x) = (x^2 + x) / x$

¿Cuánto vale g (0)?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$\text{Tiene que cumplirse } g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

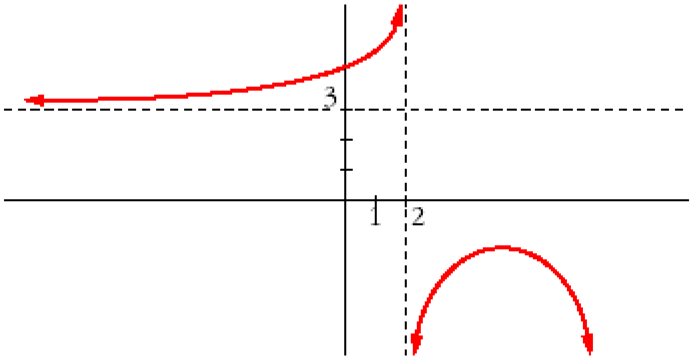
③⑦ Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Podemos conseguir que *f* (*x*) esté tan próximo a 3 como queramos sin más que darle a *x* valores suficientemente *grandes y negativos*.

b) Podemos conseguir que *f* (*x*) sea *tan negativo* como queramos sin más que tomar *x* tan grande como sea necesario.



c) Podemos conseguir que *f* (*x*) tome valores tan grandes como queramos sin más que darle a *x* valores tan próximos a 2 (pero menores que 2) como sea necesario.

d) Podemos conseguir que *f* (*x*) tome valores *tan grandes y negativos* como queramos sin más que darle a *x* valores tan próximos a 2 (pero mayores que 2) como sea necesario.

38 Si una función no está definida en x = 3, ¿puede ocurrir que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$? ¿Puede ser continua la función en x = 3?

Si puede ocurrir $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$ a pesar de no estar definida en x = 3 por ejemplo $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}$ cumple ambas condiciones.

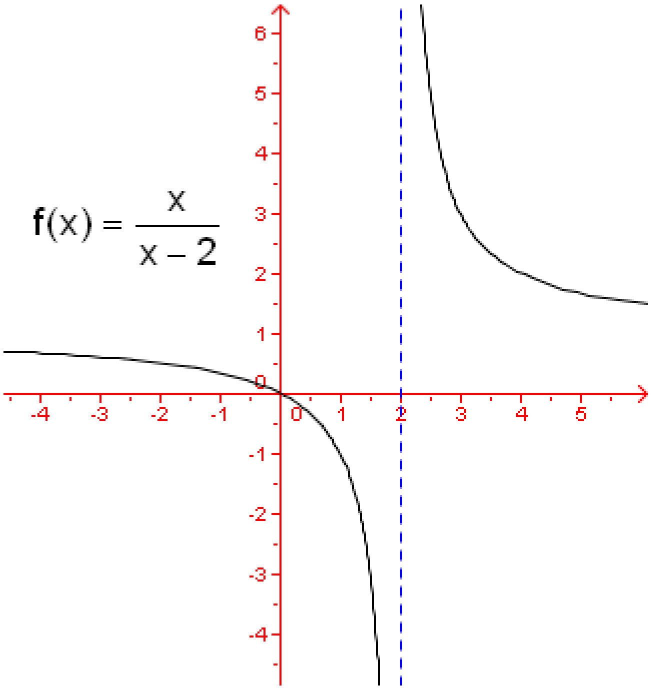
No puede ser continua en x = 3 porque no existe f(3).

39 De una función continua, f, sabemos que f(x) < 0 si x < 2 y f(x) > 0 si x > 2. ¿Podemos saber el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Como es continua y a la izquierda de 2 es negativa y a la derecha positiva, ha de pasar por cero, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$.

④⓪ Dibuja la gráfica de una función que sea negativa si x < 2, positiva si x > 2 y que no tenga límite cuando x tiende a 2.

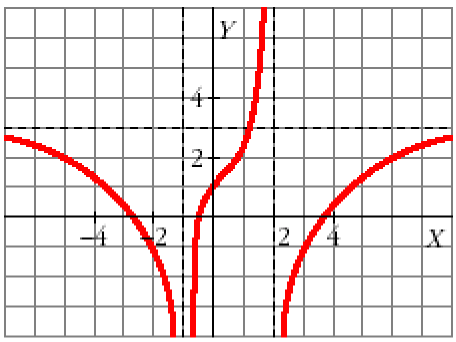
Por ejemplo $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$



④① Sea P un polinomio: P(x) = ax² + bx + c Prueba que $\dfrac{P(x)-P(0)}{x}$ tiene límite en 0 y calcula su valor.

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c-c}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(ax+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(ax+1)=1$$

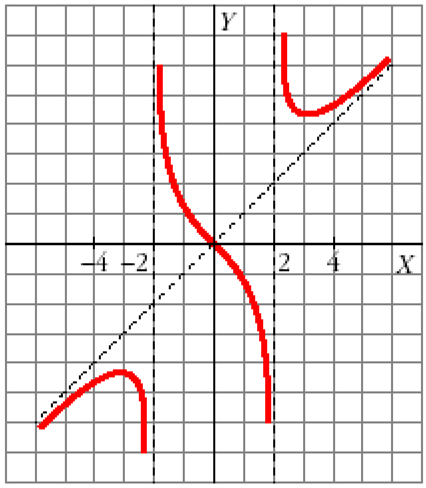
④② Calcula sobre la gráfica de esta función:



a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2 \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

b) $\lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$ **c)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$



43 Halla, observando la gráfica de esta función, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

PARA PROFUNDIZAR

44 Estudia la continuidad de las siguientes funciones, definiéndolas previamente en intervalos, y represéntalas:

a) $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x - 3| - x$ **c)** $y = 1 / |x\text{-}1|$ **d)** $y = x|x|$

e) $y = |x^2 - 1|$ **f)** $y = |x - 2| + |x|$

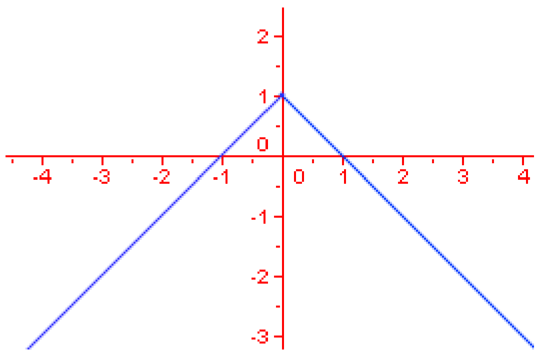
Como hay funciones en valor absoluto, recordamos la definición: $y = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f < 0 \\ f(x) \text{ si } f \geq 0 \end{cases}$

a) Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

Pasamos a la función a trozos:

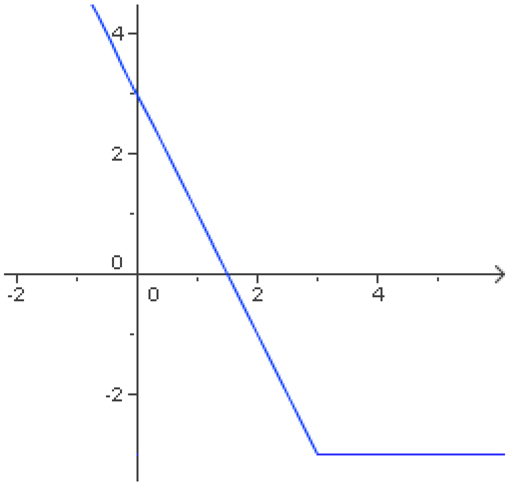
Primero hallamos para que valor se anula la función en el valor absoluto que en este caso es x = 0, para valores menores que cero |x| = - x, para x > 0 |x| = x, luego y queda:

$y = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ que representamos:



b) Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

Pasamos a la función a trozos:



Primero hallamos para que valor se anula la función en el valor absoluto que en este caso es x - 3 = 0, x = 3, para valores x < 3, |x - 3| = - (x – 3) = - x + 3 , para x > 3 |x - 3| = x - 3, luego y queda:

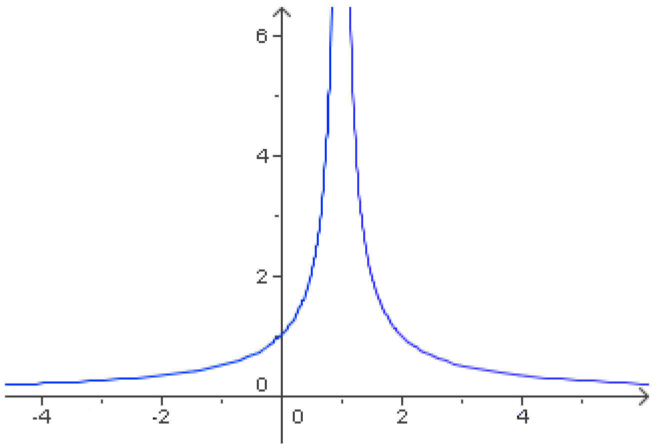
$$y = \begin{cases} -x+3-x & \text{si } x<3 \\ x-3-x & \text{si } x\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x<3 \\ -3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$ que representamos:

c) Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, pues es racional que se anula en x –1 = 0, es decir x = 1.

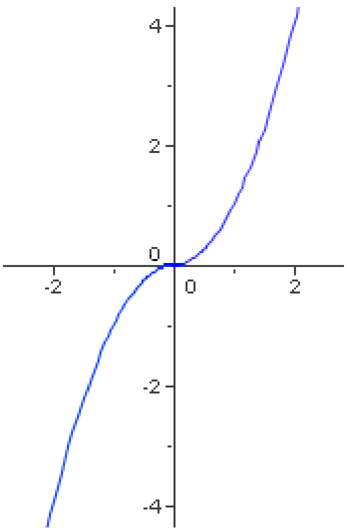
Pasamos a la función a trozos:

Primero hallamos para que valor se anula la función en el valor absoluto que en este caso es x - 1 = 0, x = 1, para valores x < 1, |x - 1| = - (x – 1) = - x + 1 , para x > 1 |x - 1| = x - 1, luego y queda:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{-x+1} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$ que representamos:



d) Es continua en $\mathbb{R}$, pues es el producto de dos funciones continuas.



Pasamos a la función a trozos:

Primero hallamos para que valor se anula la función en el valor absoluto que en este caso es x = 0, para valores menores que cero |x| = - x, para x > 0 |x| = x, luego y queda:

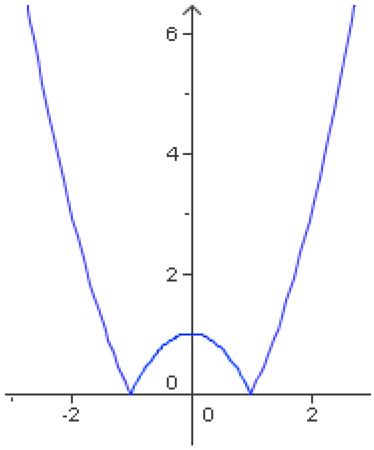
$$y = \begin{cases} x(-x) & \text{si } x<0 \\ x\cdot x & \text{si } x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$ que representamos.

e) Es continua en $\mathbb{R}$. Pasamos a la función a trozos:

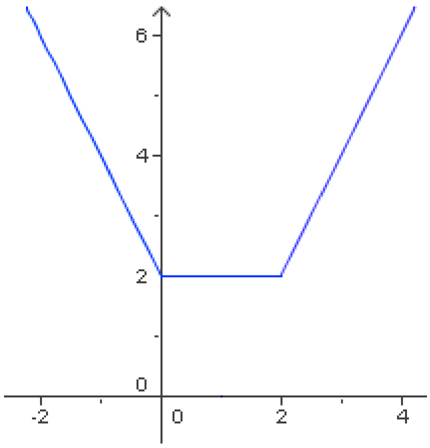
Primero hallamos para que valores se anula la función en el valor absoluto que en este caso es $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$, para valores $x < -1$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, para $-1 \le x < 1$, $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$, y para $x \ge 1$, luego y queda:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

que representamos:



f) Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la suma de dos funciones continuas.



Primero hallamos para que valor se anula la función en el valor absoluto que en este caso es $x - 2 = 0$, $x = 2$, para valores $x < 2$, $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, para $x > 2$ $|x - 2| = x - 2$, además para valores menores que cero $|x| = -x$, para $x > 0$ $|x| = x$, luego y queda: luego y queda:

$$y = \begin{cases} -x + 2 - x & \text{si } x < 0 \\ -x + 2 + x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x - 2 + x & \text{si } x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

que representamos:

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

45 Representa y estudia la continuidad de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le -1 \\ |x^2 - x - 2| & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Primero descomponemos la función en valor absoluto, hallando para que valor se anula:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

como está definido para valores mayores de -1, en el intervalo $-1 < x < 2$, $|x^2-x-2| = -x^2 + x + 2$, en el intervalo $x > 2$, $|x^2-x-2| = x^2 - x - 2$, luego la función queda:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le -1 \\ -x^2+x+2 & \text{si } -1<x<2 \\ x^2-x-2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

ahora estudiamos su continuidad:

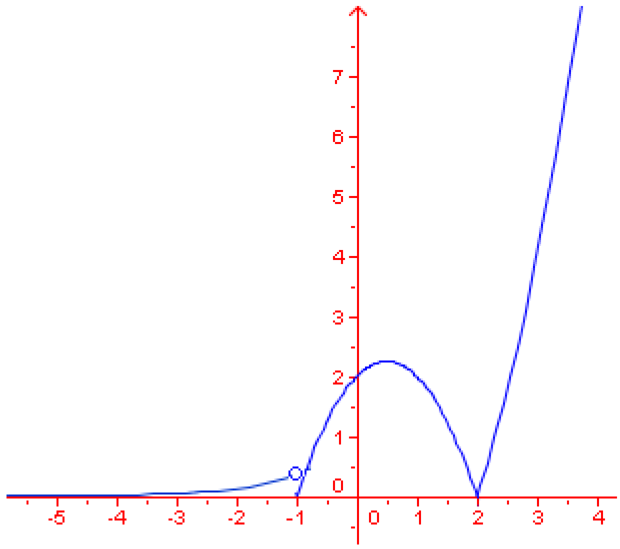
Las funciones son continuas en sus intervalos de definición ya que son exponenciales y polinómicas.

Veamos que sucede en los puntosa frontera:

En x = -1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (e^x) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x^2+x+2) = -(-1)^2+(-1)+2 = 0 \end{cases}$, como los límites son diferentes, la función tiene en x = -1 una discontinuidad inevitable de salto finito.

En x = 2 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^2+x+2) = -(2)^2+2+2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-x-2) = (2)^2+2-2 = 0 \end{cases}$ como además f(2) = 0 la función es continua en x = 2.

Ahora podemos representarla:



✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑥ Estudia la continuidad de la función $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$ en x = 0. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Como el segundo sumando es de tipo racional, no existe para los valores que anulan el denominador, que en este caso es x = 0. Descomponiendo el valor absoluto, tenemos:

$$y=\begin{cases} 2x+\dfrac{-x}{x} & \text{si } x<0 \\ 2x+\dfrac{x}{x} & \text{si } x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<0 \\ 2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$ que es continua en sus intervalos de definición, pero en en x = 0, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x-1) = -1 \ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$ es discontinua, de salto finito.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑦ Dada $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Primero convertimos la función en valor absoluto en función a trozos:

$f(x)=\begin{cases} -\frac{x}{x+1} & \text{si } x\le 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$ y ahora hallamos los límites pedidos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{x/x+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x/x}{x/x+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-1}{1+\frac{1}{\infty}}=-1$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑧ Calcula :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\infty-\infty$ Ind, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{\infty}{\infty}$ Ind. ahora esta otra indeterminación la resolvemos de otra forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}=\frac{3}{2}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑨ Calcula

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(-x)^2+2}-\sqrt{(-x)^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}\right)=\infty-\infty$ Ind.

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-4}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x^2+4}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4}}=\frac{6}{\infty}=0.$$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\frac{1}{\infty-\infty}$ Ind. Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{x^2+4x-x^2}=$$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{4x}=\frac{\infty}{\infty}$ Ind, vuelve a ser indeterminado pero la indeterminación es diferente, ahora para resolver la indeterminación, dividimos numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}+\frac{x}{x}}{\frac{4x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}{4}=\frac{\sqrt{1+\frac{4}{\infty}}+1}{4}=\frac{\sqrt{1}+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

****

50 Calcula :

$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right]=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0}=\frac{0}{0}$ Ind, para resolver la indeterminación multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{2}{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right]=\left[\frac{2}{3\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}\right]=\frac{2}{3(1+1)}=\frac{2}{3\cdot2}=\frac{1}{3}$$

****

51 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to2}\frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}=\frac{1-\sqrt{3-2}}{2-2}=\frac{1-1}{2-2}=\frac{0}{0}$ Ind, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-\sqrt{3-x}\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(1)^2-\left(\sqrt{3-x}\right)^2}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-3+x}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(1+\sqrt{3-x}\right)}=\frac{1}{1+\sqrt{3-2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}=\dfrac{\sqrt{9}-3}{0}=\dfrac{0}{0}$ Ind, para resolverlo multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-(3)^2}{x^2\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x^2\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{0}$ Ind, hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=-\infty;\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=+\infty$$