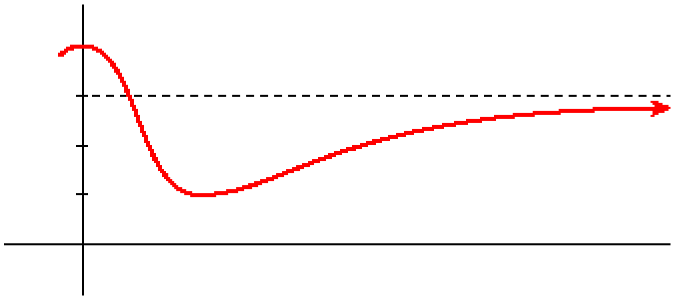
PARA EMPEZAR REFLEXIONA Y RESUELVE

Visión gráfica de los límites

Describe las siguientes ramas:

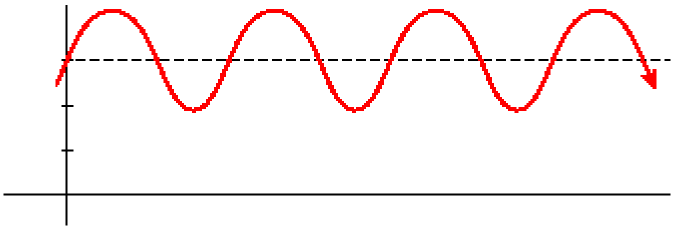
a)



Como a medida que aumenta x, la función se acerca cada vez más a 3 por valores menores:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3^-$$

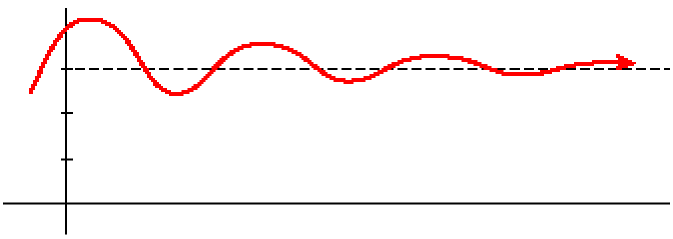
b)



Por mucho que crezca x no tiende a un valor determinado, oscila por encima y por debajo de 3:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \text{No existe.}$$

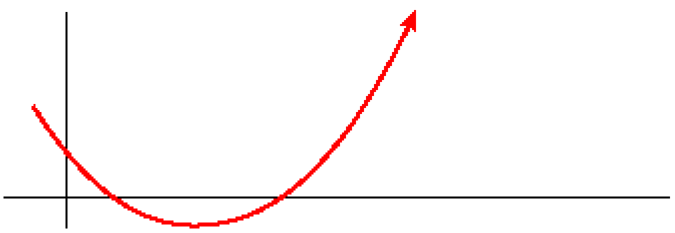
c)



A medida que x crece, la función se acerca más a 3:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$$

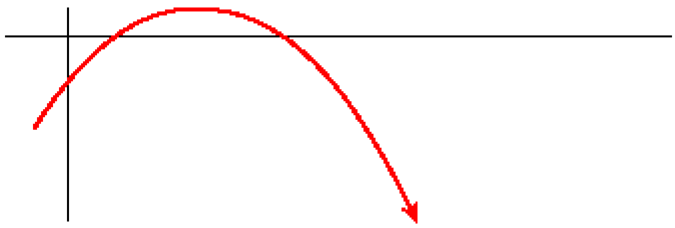
d)



Cuanto mayor sea x, más grande es valor de la función:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

e)



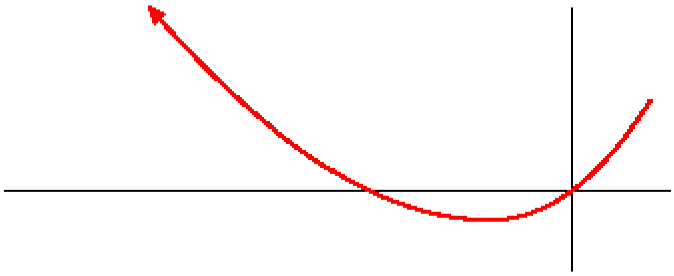
A medida que crece la x, la función se hace menor, luego :

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

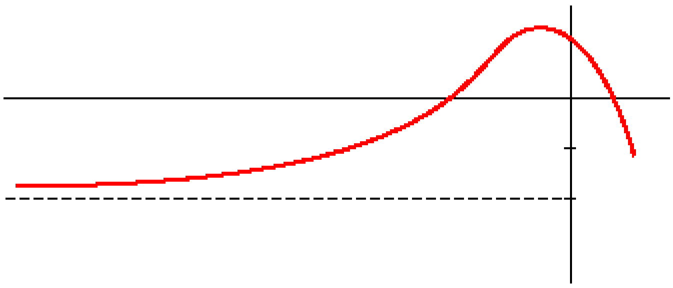
f)

Como al tender x a - ∞, la función se hace cada vez más grande:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



g)



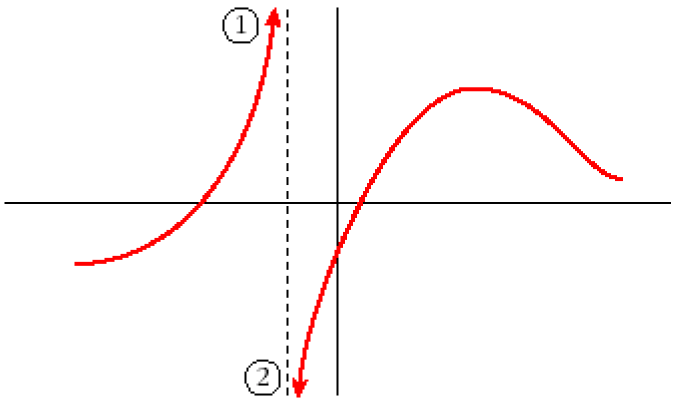
Como al tender x a - ∞, la función se acerca cada vez más a - 2:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

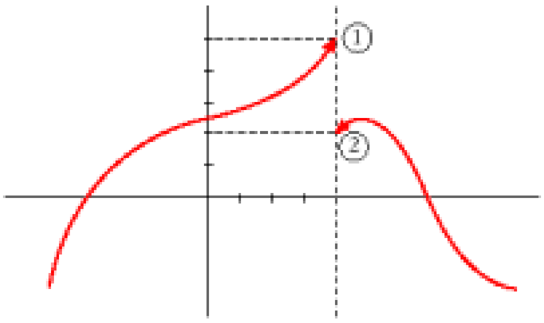
h)

① Al acercarnos a – 1 por la izquierda, la función se hace cada vez mayor, es decir el límite cuando x tiende a – 1 por la izquierda es + ∞ : $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.

② Al acercarnos a – 1 por la derecha, la función se hace cada vez menor, es decir el límite cuando x tiende a – 1 por la derecha es - ∞ : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.



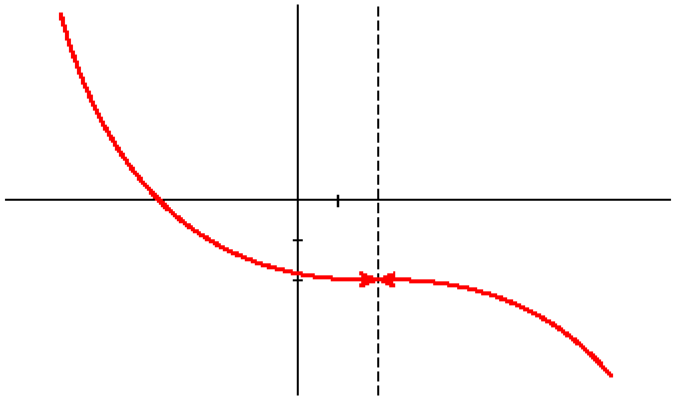
i)



① Al acercarnos a 1 por la izquierda, la función se acerca cada vez más a 5, es decir el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda es 5 : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 5$.

② Al acercarnos a 1 por la derecha, la función se acerca cada vez más a 2, es decir el límite cuando x tiende a 1 por la derecha es 2 : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$.

j)



① Al acercarnos a 2 por la izquierda, la función se acerca cada vez más a -2, es decir el límite cuando x tiende a 2 por la izquierda es -2 : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$.

② Al acercarnos a 2 por la derecha, la función se acerca cada vez más a -2, es decir el límite cuando x tiende a 2 por la derecha es -2 : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2$.

Como los límites laterales son iguales:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 131)

① Si u (x) → 2 , y v (x) → -3 cuando x → + ∞, calcula el límite cuando x → + ∞ de:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)+v(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}u(x) + \lim\limits_{x\to+\infty}v(x) = 2-3 = -1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)} = \dfrac{-3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{u(x)} = 5^{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{v(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)} = \sqrt{-3}$ no existe.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}v(x) = 2\cdot(-3) = -6$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)} = \sqrt[3]{2}$

② Si u (x) → -1 y v (x) → 0 cuando x → + ∞ calcula el límite cuando x → + ∞ de:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)-v(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}u(x) - \lim\limits_{x\to+\infty}v(x) = -1+0 = -1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(v(x)-u(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}v(x) - \lim\limits_{x\to+\infty}u(x) = 0-(-1) = +1$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 v(x) = \log_2 \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \log_2 0 = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(u(x)\cdot v(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -1\cdot 0 = 0$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)} = \sqrt[3]{-1}$ = - 1.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 132)

③. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos (±∞) cuando x → + ∞:

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^5 - \sqrt{x} + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}5^x = 0{,}5^{+\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} -1{,}5^x = -1{,}5^{+\infty} = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x = \log_2 \lim\limits_{x\to+\infty} x = \log_2 +\infty = +\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = \sqrt{+\infty} = +\infty$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^x = 4^{+\infty} = +\infty$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{-x} = 4^{-\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} -4^x = -4^{+\infty} = -\infty$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④. **a)** Ordena los órdenes de estos infinitos:

a) El orden de los límites que dan infinito está relacionado con la rapidez con que crece (o decrece si es menos infinito) la función al crecer la variable independiente x, luego (además de consultar el orden en el libro) podemos hacer una tabla comparativa para distintos valores de x:

	10	20	30
$\log_2 x$	3,3219281...	4,321921...	4,9068906...
$\sqrt{x}$	3,1622777...	4,472136...	5,4772256...
x^2	100	400	900
$3x^5$	300 000	9 600 000	72 900 000
$1{,}5^x$	57,665039	3325,2567	191751,06
4^x	1 048 576	$1{,}09 \cdot 10^{12}$	$1{,}15 \cdot 10^{18}$

Podemos ver la velocidad de crecimiento hallando los incrementos al pasar de un valor de x a otro y tenemos el orden:

$$4^x > 1{,}5^x > 3x^5 > x^2 > \sqrt{x} > \log_2 x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$ ya el denominador es de orden mayor que el numerador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$ ya el denominador es de orden mayor que el numerador.

⑤ Sí, cuando $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty - \infty$ Indeterminado

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)} = 0^0$ Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}[-h(x)]^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}-h(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=-\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=-(-\infty)^{-\infty}=\infty^{-\infty}=\dfrac{1}{\infty^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=4^{-\infty}=\dfrac{1}{4^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=\dfrac{0}{-\infty}=0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{u(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)}=\dfrac{+\infty}{0}$ Indeterminado ($\pm\infty$).

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{u(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)}=\dfrac{-\infty}{0}$ Indeterminado ($\pm\infty$).

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{u(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)}=\dfrac{4}{0}$ Indeterminado ($\pm\infty$).

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+(+\infty)=+\infty$

ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=(+\infty)^{-\infty}=\dfrac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+h(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty+(-\infty)=+\infty-\infty$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=(-\infty)^{-\infty}$ No existe

q) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-x}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x}=(+\infty)^{-\infty}=\dfrac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 134)

⑥ Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 5 (página anterior). Di cuáles de la: siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+h(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty+(-\infty)=+\infty-\infty$ Indeterminado

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$ Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{-h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}-h(x)}=(+\infty)^{-(-\infty)}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=(+\infty)^{-\infty}=\dfrac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\cdot 0$ Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)^{h(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=(0)^{-\infty}$ Indeterminado ($\pm\infty$)

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{4}\right)^{f(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{4}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=\left(\dfrac{4}{4}\right)^{+\infty}=1^{+\infty}$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)^{f(x)}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=(4)^{+\infty}=\dfrac{1}{(4)^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 135)

① Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-6x+1}{5x^3+3x^2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}(\text{In})\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=\dfrac{3-\frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\dfrac{3}{0}=+\infty$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-6x+1}{-5x^3+3x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{In})\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{-5x^3}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{-5}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{3-\frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{3}{0}=-\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-3x}{x^3+1}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{In})\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{In})\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{3+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{5-\frac{6}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{5}{3}$$

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

➋. Calcula:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2(x-1)x}{x^3-(x+3)^3}=\frac{\infty}{\infty}(\text{In})\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2(x^2-x)}{x^3-(x^3+9x^2+27x+27)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x^2-x}{-9x^2-27x+27}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{-\frac{9x^2}{x^3}-\frac{27x}{x^3}+\frac{27}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{-\frac{9}{x}-\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x}}=\frac{3-\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{-\frac{9}{\infty}-\frac{27}{\infty}+\frac{27}{\infty}}=\frac{3}{0}=-\infty$$ ya que +/- = -

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2x}{x^3-10x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2x}{(x^2-10)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2}{(x^2-10)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+6x+1}{x^2-10}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{Ind})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9x^2+6x+1}{x^2}}{\frac{x^2-10}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{10}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{10}{x^2}}=\frac{9+\frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{10}{\infty}}=\frac{9}{1}=9$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3-5x+3}{x^2-2x}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x+3}{x^2-2x}}=\frac{\infty}{\infty}(\text{Ind})\Rightarrow\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-5x+3}{x^3}}{\frac{x^2-2x}{x^3}}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}}=$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3}}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}} = \sqrt{\frac{1}{0}} = \sqrt{\infty} = \infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{x}}{\frac{3x}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{8x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3}}}{\frac{3x}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{x^2}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{\infty}}}{3} =$

$= \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{2}{3}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 136)

③ Sin operar, dí el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$ pues x^2 es de mayor grado que $(2x)^{1/3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - 2^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2^x = -2^{\infty} = -\infty$ ya que la exponencial (2^x) es de mayor orden que la potencial x^2.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ ya que es de mayor grado la primera raíz que la segunda.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3^x - 2^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = 3^{+\infty} = +\infty$ ya que 3^x crece más deprisa que 2^x.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5^x = 5^{+\infty} = +\infty$ ya que es de mayor orden la exponencial que la potencial.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \log_5 x^4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ya que la función potencial ($x^{1/2}$) es de mayor orden que la logarítmica.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④ Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes expresiones

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3+5}{x+2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3-x}{x-2} = \infty - \infty$ Indeterminado.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)(3x^3+5)-(x+2)(4x^3-x)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4}=-\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=\infty-\infty$ Indeterminado, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{4x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{4}=0$$

ya que el grado del numerador es menor que el del denominador.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2}-\frac{x^2-2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x}=\infty-\infty$ (Ind)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2}-\frac{x^2-2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+5)-2(x^2-2)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+4}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+5x+4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

d) $\lim_{x\to+\infty}(x+5)^{x^2-5x+1}=\left(\lim_{x\to+\infty}(x+5)\right)^{\lim_{x\to+\infty}(x^2-5x+1)}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)^{\lim_{x\to+\infty}x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}x}=\left(\frac{3+\frac{5}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}}\right)^{+\infty}=$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^{\lim_{x\to+\infty}x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}x^2+x}=\left(\frac{1-\frac{2}{\infty}}{2-\frac{3}{\infty}}\right)^{+\infty}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0 \text{ y}$$

a que todo número < 1 elevado a infinito se hace cada vez menor y tiende a cero

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 136)

① Halla el límite cuando x → - ∞ de las siguientes expresiones:

Para hallar límites de una función f(x) cuando x → - ∞, se halla el límite de f(-x) cuando x → + ∞

a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5(-x)^4-6(-x)+2}{3(-x)^4+(-x)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+6x+2}{3x^4-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^4+6x+2}{x^4}}{\frac{3x^4-x-1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{6x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{3-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{5+\frac{6}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{5}{3}$$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^3-5x+3}}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^3-5(-x)+3}}{(-x)^2-2(-x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{-x^3+5x+3}}{x^2+2x}=$ No existe ya que no existe una raíz cuadrada de valores negativos.

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

② Halla el límite cuando x → - ∞ de las siguientes expresiones:

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+3}}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2-5(-x)+3}}{3(-x)-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x+3}}{-3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+5x+3}{x^2}}}{\frac{-3x-2}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{\frac{-3x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{-3-\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}}{-3-\frac{2}{\infty}}=\frac{\sqrt{1}}{-3}=-\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3(-x)^3+5}{(-x)+2}-\frac{4(-x)^3-(-x)}{(-x)-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3+5}{-x+2}-\frac{-4x^3+x}{-x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(-x-2)(-3x^3+5)-(-x+2)(-4x^3+x)}{(-x+2)(-x-2)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+14x^3+x^2-7x-10}{x^2-4}=-\infty$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}3^x=\lim_{x\to+\infty}3^{-x}=3^{-\infty}=\frac{1}{3^\infty}=\frac{1}{+\infty}=0$$

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 139)

① Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$ di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)-\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3-2=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3\cdot 2=6\,.$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}=\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1} f(x)^{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}=3^2=9\,.$

e) $\sqrt{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}=\sqrt{2}\,.$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4f(x)-5g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1} 4f(x)-\lim\limits_{x\to 1} 5g(x)=4\lim\limits_{x\to 1} f(x)-5\lim\limits_{x\to 1} g(x)=4\cdot 3-5\cdot 2=12-10=2\,.$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

② Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=l+m$ Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

① $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l\pm m$

② $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l\cdot m$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{m}$

④ $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=l^m$

⑤ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$ si n es par y si $l\geq 0$.

⑥ $\lim\limits_{x\to a}\log_n f(x)=\log_n \lim\limits_{x\to a} f(x)=\log_n l$ si $n>0$ y $l>0$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

③ Si $\lim\limits_{x\to 2} p(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} q(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} r(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 2} s(x)=0$ di, en el caso que sea posible, el valor del límite cuando x tiende a 2 de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 2p(x)+q(x) = \lim\limits_{x\to 2} 2p(x) + \lim\limits_{x\to 2} q(x) = 2\lim\limits_{x\to 2} p(x) + \lim\limits_{x\to 2} q(x) = 2\cdot(+\infty)+\infty = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} p(x)-3q(x) = \lim\limits_{x\to 2} p(x) - 3\lim\limits_{x\to 2} q(x) = \lim\limits_{x\to 2} p(x) - 3\lim\limits_{x\to 2} q(x) = +\infty-\infty$. Indeterminado

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} r(x)}{\lim\limits_{x\to 2} p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x\to 2} 1 = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} s(x)}{\lim\limits_{x\to 2} p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$.

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} p(x)}{\lim\limits_{x\to 2} q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x\to 2} s(x)\cdot p(x) = \lim\limits_{x\to 2} s(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2} p(x) = 0\cdot\infty$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x\to 2} s(x)^{r(x)} = \lim\limits_{x\to 2} s(x)^{\lim\limits_{x\to 2} r(x)} = 0^3 = 0$.

i) $\lim\limits_{x\to 2} p(x)^{r(x)} = \lim\limits_{x\to 2} p(x)^{\lim\limits_{x\to 2} r(x)} = +\infty^3 = +\infty$.

j) $\lim\limits_{x\to 2} r(x)^{s(x)} = \lim\limits_{x\to 2} r(x)^{\lim\limits_{x\to 2} s(x)} = 3^0 = 1$.

k) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-r(x)}{s(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(3-r(x))}{\lim\limits_{x\to 2} s(x)} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{\lim\limits_{x\to 2} s(x)} = \left(\dfrac{3}{3}\right)^0 = 1^0 = 1$ Indeterminado.

m) $\lim\limits_{x\to 2} r(x)^{p(x)} = \lim\limits_{x\to 2} r(x)^{\lim\limits_{x\to 2} p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$.

n) $\lim\limits_{x\to 2} r(x)^{-q(x)} = \lim\limits_{x\to 2} r(x)^{\lim\limits_{x\to 2} -s(x)} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

ñ) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{p(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{\lim\limits_{x\to 2} p(x)} = \left(\dfrac{3}{3}\right)^{+\infty} = 1^{+\infty}$ Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{-p(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{-\lim\limits_{x\to 2} p(x)} = \left(\dfrac{3}{3}\right)^{-\infty} = 1^{-\infty}$ Indeterminado.

EJERCICIOS PROPUESTOS (PÁG 140)

④ Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}=\dfrac{(-1)^3-2(-1)^2+2(-1)+5}{(-1)^2-6(-1)-7}=\dfrac{-1-2-2+5}{1+6-7}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminado.

Descomponemos el numerador y denominador :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & 5\\ -1 & & -1 & 3 & -5\\ \hline & 1 & -3 & 5 & \boxed{0}\end{array}\qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & -7\\ -1 & & -1 & 7\\ \hline & 1 & -7 & \boxed{0}\end{array}$$

Luego $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 = (x + 1)(x^2 -3x + 5)$ y $x^2 - 6x - 7 = (x +1)(x - 7)$ y por tanto, el límite queda:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x-7)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+5}{x-7}=\frac{(-1)^2-3(-1)+5}{-1-7}=-\frac{9}{8}$$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}=\dfrac{4^3-5\cdot 4+1}{4^3+2\cdot(4)^2-3\cdot 4}=\dfrac{45}{84}=\dfrac{15}{28}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤ Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\frac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x+1}{x^3+x}=\frac{2}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty \text{ Indeterminado,}$$

lo resolvemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\frac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)(x^2-5x+2)-(x+2)(x^3+2x+1)}{x(x+2)(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^3+x^2-10x}{x(x+2)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(-7x^2+x-10)}{x(x+2)(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{-10}{2}=-5$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

① Sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ¿En cuáles de los siguientes casos hay indeterminación para $x\to+\infty$? En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty-\infty$ Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+h(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty+3=-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)}=\dfrac{+\infty}{3}=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$ Indeterminado.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)^{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=3^{-\infty}=\dfrac{1}{3^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-h(x))f(x)=(3-\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(3-3)\cdot(+\infty)=0\cdot(+\infty)$ Indeterminado.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

② Calcula los límites cuando x → -∞ de las siguientes funciones:

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

Para calcular el límite cuando x → - ∞ de una función f(x) hallamos el límite cuando x → + ∞ de f(-x).

a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(-x)+5}{2-(-x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+5}{2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2x+5}{x}}{\frac{2+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{5}{x}}{\frac{2}{x}+1}=$$

$$=\frac{-2+\frac{5}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+1}=\frac{-2}{1}=-2$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x-5}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}g(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10(-x)-5}{(-x)^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10x-5}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-10x-5}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-10}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{-10}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1}=0$$

c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} h(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(-x)^2-4}{2(-x)+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4}{-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-4}{x^2}}{\frac{-2x+3}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{4}{x^2}}{-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{3-\frac{4}{\infty}}{-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}} = \frac{3}{0} = -\infty$.

d)

$\lim_{x\to-\infty} i(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x}{7+5x^3} = \lim_{x\to+\infty} i(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^3+2(-x)}{7+5(-x)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3-2x}{7-5x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^3-2x}{x^3}}{\frac{7-5x^3}{x^3}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}{\frac{7}{x^3}-\frac{5x^3}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{2}{x^2}}{\frac{7}{x^3}-5} = \frac{-1-\frac{2}{\infty}}{\frac{7}{\infty}-5} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$.

❋❋❋✽✽✪✽✽❋❋❋

③ Calcula los siguientes límites comparando los exponentes del numerador y denominador:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{5x^2-7}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-7}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} 5x} = \sqrt{+\infty} = +\infty$.

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{+\infty} = 0$.

❋❋❋✽✽✪✽✽❋❋❋

④ Calcula estos límites observando cuál es el infinito de orden superior:

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^3\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

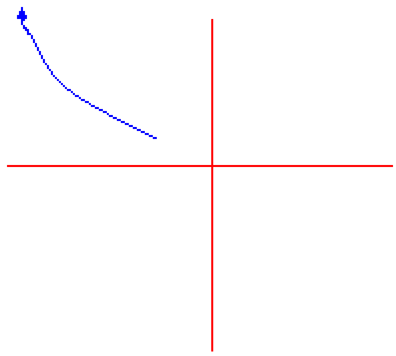
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$.

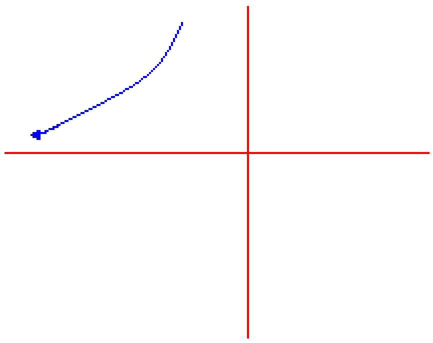
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑤ Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(0{,}5^x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}0{,}5^x=0{,}5^{-\infty}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty}=2^{+\infty}=+\infty$.





b) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x+1}=2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

⑥ Si $\lim\limits_{x\to2}p(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2}q(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2}r(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to2}s(x)=0$ di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{s(x)}{p(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}s(x)}{\lim\limits_{x\to2}p(x)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to2}\left[s(x)\cdot q(x)\right]=\lim\limits_{x\to2}s(x)\cdot\lim\limits_{x\to2}q(x)=0\cdot(-\infty)$ Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x\to2}r(x)^{q(x)}=\lim\limits_{x\to2}r(x)^{\lim\limits_{x\to2}q(x)}=3^{-\infty}=\dfrac{1}{3^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

d) $\lim_{x\to 2}\left[p(x)-2q(x)\right]=\lim_{x\to 2}p(x)-2\lim_{x\to 2}q(x)=+\infty-2(-\infty)=+\infty+\infty=+\infty$.

⑦ Calcula:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{3}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ Indeterminado, resolvemos la indeterminación haciendo la diferencia:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3}=\frac{3}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^3}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^3}=+\infty\end{cases}$ ya que al acercarnos a cero por la izquierda, por valores negativos, el cociente se hace más pequeño y viceversa.

b)

$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2}{(1-1)^2}-\frac{1}{1(1-1)}=\frac{2}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ Ind.

$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{1+1}{1(1-1)^2}=\frac{2}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x(x-1)^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x(x-1)^2}=+\infty\end{cases}$

$x\to 1^-$	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{x+1}{x(x-1)^2}$	211,111...	20101,0101...	2001001	200010001

$x\to 1^+$	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{x+1}{x(x-1)^2}$	190,9...	19900,9901...	1999000,99901...	199990000,999...

⑧ Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x\to+\infty$:

a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminado

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x+1}{4x^2-4x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2-2x+1}{x^2}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{5-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{4-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{5}{4}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\log x}=+\infty$ ya que x +1 es de mayor orden que logx.

c) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminado.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}+2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{3}{+\infty}+2}{\sqrt{2+\frac{1}{+\infty}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

d) $\lim_{x\to+\infty}i(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{2^x+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminado.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{2^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^x}{3^x}}{\frac{2^x+1}{3^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3^x}}=\frac{1}{0}=+\infty$$ ya que la exponencial es siempre positiva.

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

⑨ Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x\to+\infty$:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x}{x+1}-\frac{3x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2}=+\infty-\infty$ Indeterminado, para resolver la indeterminación realizamos la diferencia:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x}{x+1}-\frac{3x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-5x)-3x(x+1)}{2(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-13x}{2(x+1)}=\frac{-\infty}{\infty}$ Indeterminado, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-13x}{2(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2-13x}{x^2}}{\frac{2x+2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2}{x^2}-\frac{13x}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{13}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-1-\frac{13}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-3}{x}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)}=\left(\frac{2+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}\right)^{-\infty}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1{,}2^{x}-\dfrac{3x^2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}1{,}2^{x}=1{,}2^{+\infty}=+\infty$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x+4}{x}}{\frac{2x+5}{x}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)}=\left(\frac{3+\frac{4}{\infty}}{2+\frac{5}{\infty}}\right)^{+\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=+\infty$$

10 Calcula

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-5}=\dfrac{(1-1)^2}{1-5}=\dfrac{0}{-4}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}=\dfrac{1^2-7\cdot 1+6}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminado descomponemos el numerador en producto de factores resolviendo la ecuación de 2º grado:

$x^2-7x+6=0\Rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}6\\1\end{cases}$ luego $x^2 - 7x + 6 = (x - 6)\,(x - 1)$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-6)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-6)=1-6=-5$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x}=\dfrac{1^2+1-2}{2\cdot 1^2-2\cdot 1}=\dfrac{0}{0}$ Ind.

$x^2+x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{2x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{2x}=\dfrac{1+2}{2\cdot 1}=\dfrac{3}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$ Ind.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x-3)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-3)}{x-1}=\dfrac{0}{-1}=0$.

➀➀ Averigua si las siguientes funciones son continuas en x = 2:

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Para que una función f(x) sea continua en x = a se ha de cumplir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 \text{ si } x<2\\ 6-x \text{ si } x\geq 2\end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 3\cdot 2-2=4\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(6-x) = 6-2=4\end{cases}$

Como los límites laterales existen y son iguales $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, además f(2) = 6 - 2 = 4 luego es continua en x = 2 ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ si } x\leq 2\\ 2x+1 \text{ si } x\geq 2\end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-1) = 4-1=3\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x+1) = 4+1=5\end{cases}$

Como los límites laterales existen pero son distintos no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, luego es discontinua en x = 2.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

➀➁ Estudia la continuidad de las dos funciones siguientes:

a)

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

- 2^x es una función exponencial que es continua en su intervalo de definición.
- 4 es una función constante (polinómica de grado 0) y por tanto continua.

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 2 en este caso):

$f(x)=\begin{cases}2^x \text{ si } x<2\\ 4 \text{ si } x\geq 2\end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2^x = 2^2 = 4\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4 = 4\end{cases}$

Como los límites laterales existen y son iguales $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, además f(2) = 4 luego es continua en x = 2 ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Como es continua para x < 2, para x > 2 y además en x = 2, es continua en R, (-∞,∞)

b)

❶ Primero estudiamos la continuidad de las funciones definidas en cada intervalo o "trozo":

❍ 1/x es una función racional que es discontinua cuando el denominador se anula, en x = 0 en este caso.

❍ 2x –1 es una función lineal (polinómica de grado 1) y por tanto continua.

❷ Ahora estudiamos la continuidad en los punto frontera (en x = 1 en este caso):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} \text{ si } x<1\\ 2x-1 \text{ si } x\geq 1\end{cases} \xrightarrow{\text{límites laterales}} \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-1=1\end{cases}$$

Como los límites laterales existen y son iguales $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, además f(1) = 2·1 - 1 = 1, luego es continua en x = 1 ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$.

La función es discontinua en x = 0 luego es continua (-∞ , 0) ∪ (0, ∞) ≡ ℜ - {0}.