25 *Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,3€ y el de pienso compuesto 0,52€, se pide:*

a) *¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero? Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.*

b) *¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto? Razona la respuesta.*

****

a)

Planteamiento

Dieta	Peso (kg)	Hierro	Vitaminas	Coste
Maíz	x	2,5x	x	0,3x
Pienso	y	y	2y	0,52y
Total		≥ 3	≥ 4	C(x, y)

⊙ Restricciones:

- El peso de maíz (x) ha de ser mayor o igual a 0.
- El peso de vitaminas (y) ha de ser mayor o igual a 0.
- El número mínimo de unidades de hierro ha de ser 3.
- El número mínimo de unidades de vitaminas ha de ser 4.

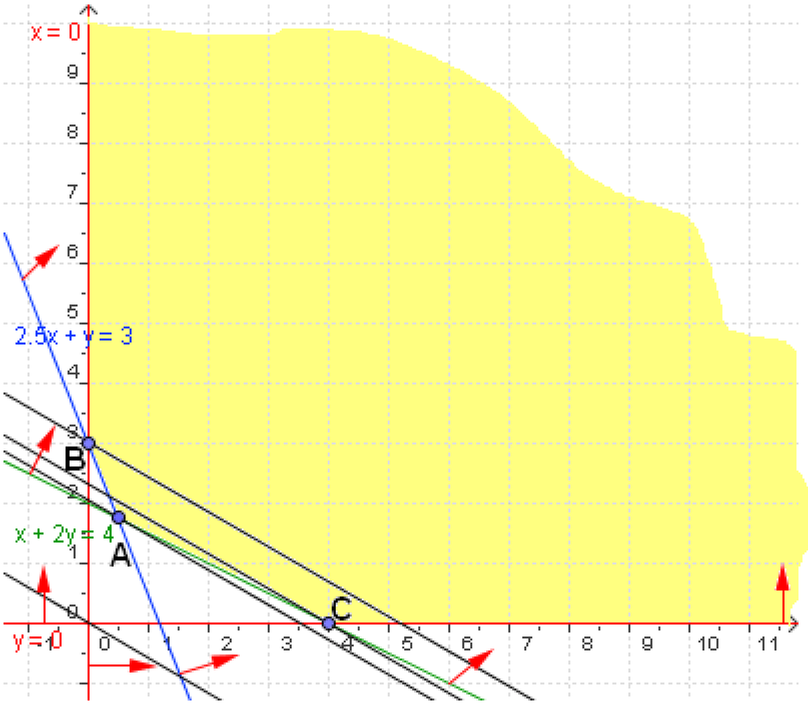
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El Coste = C(x, y) = 0,3x + 0,52y, que ha de minimizarse sujeta a las restricciones anteriores.

Resolución

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.



Es una región factible no acotada o abierta cuyo mínimo se halla en el punto A, como puede verse en el dibujo adjunto al trazar las rectas de nivel paralelas a la función objetivo trazada por el origen.

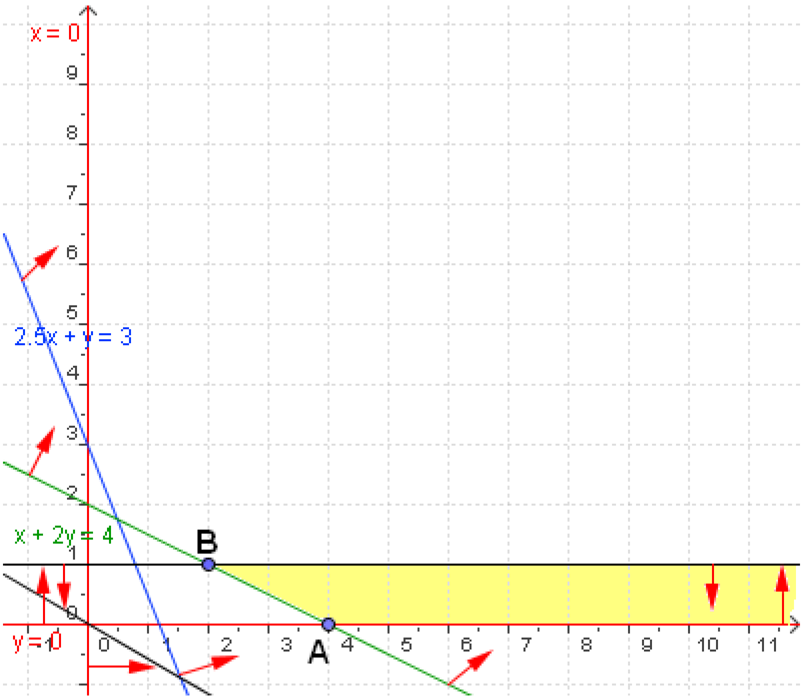
Hallamos las coordenadas del vértice A:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \xrightarrow{E_1} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \xrightarrow{-2E_2} -5x - 2y = -6 \end{cases}$$

-4x = -2; x = ½, y = $\frac{4-x}{2} = \frac{7}{4}$

Luego hay mezclar ½ kg de maíz con 7/4 kg de pienso para que los costes sean mínimos.

b) Si añadimos la restricción y ≤ 1, la región factible sería:



Ahora el mínimo (trazando las rectas de nivel) sería el punto B de coordenadas:

$$B\begin{cases} y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

B(2, 1), mezclaría 2 kg de maíz y 1 kg de pienso.

CUESTIONES TEÓRICAS

26 *¿Puede una función objetivo alcanzar su valor óptimo en un; punto interior de la región factible? (Es decir, no situado en el borde). ¿Puede ocurrir si se admiten valores decimales en x e y?*

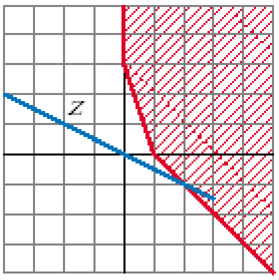
Sí, si el óptimo ha de tener valores enteros en ambas coordenadas y el vértice en que se alcanza las coordenadas no son enteras.

Si el problema admite soluciones no enteras, no puede tener el óptimo en el interior sino en algún vértice o lado de la región factible acotada.

27 *¿Puede una función objetivo representarse por una recta horizontal? ¿Y por una vertical?*

En general una función objetivo es lineal de la forma F(x, y) = ax + by +c, nada impide que la función objetivo sea horizontal F(x, y) = by +c o vertical F(x, y) = ax + c.

28 *¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?*



Ni uno ni otro pues hay rectas de nivel más altas o bajas que cualquiera que tracemos.

29 *Al representar las distintas restricciones de un problema, comprobamos que no hay ningún punto que cumpla todas a la vez (la región de validez es vacía). ¿Qué podemos afirmar sobre la solución del problema?*

Que no tiene solución optima que cumpla todas las restricciones.

PARA PROFUNDIZAR

30 *Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):*

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

Este tipo de problemas se conoce como "problemas de transporte" y su solución es ligeramente diferente (pero siempre similar) al resto de problemas:

① Planteamiento

Sea:
x = locomotoras transportadas desde la fábrica A a la estación N.
y = locomotoras transportadas desde la fábrica B a la estación N.

La fábrica A deberá transportar a la estación S el resto de las que fabrica: 9 – x.
La fábrica B deberá transportar a la estación S el resto de las que fabrica: 10 – y.
Como la estación N necesita 11 locomotoras, la fábrica C debe enviar el resto 11 – x – y.
La fábrica C deberá transportar a la estación S el resto de las que fabrica: 7 – (11 – x – y) = x + y – 4.

Lo reflejamos en la tabla siguiente:

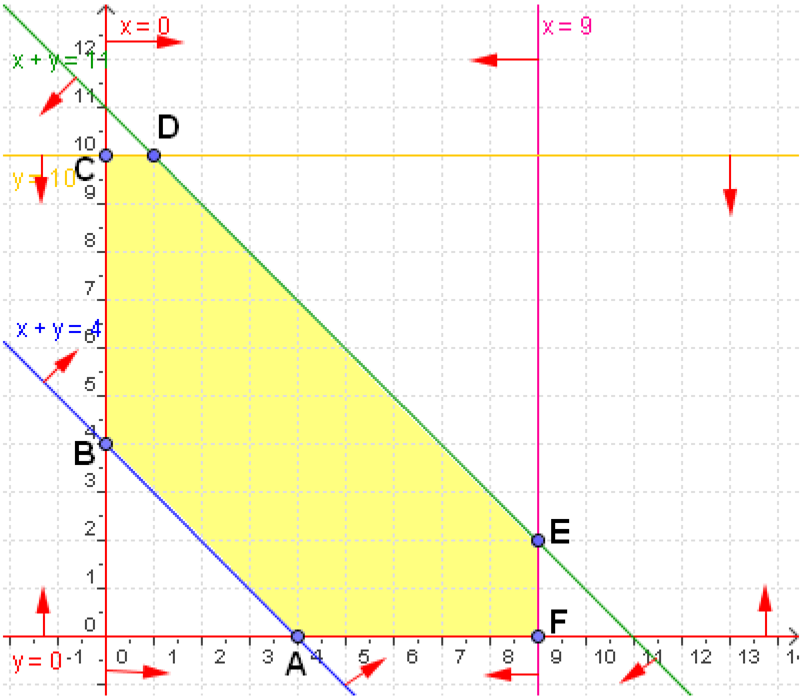
	A	B	C	Total
N	x	y	11-x-y	11
S	9 - x	10 - y	x + y - 4	15
Total	9	10	7	26

Las restricciones se obtienen haciendo que las locomotoras transportadas sean alguna (y entero):

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$11 - x - y \geq 0 \Leftrightarrow x + y \leq 11$$
$$9 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$$
$$10 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 10$$
$$x + y - 4 \geq 0$$

La función objetivo es el coste, que confeccionamos con la tabla de costes y la de transportes:
Costes: C(x, y) = 6x + 15y + 3(11 – x – y) + 4(9 – x) + 20(10 – y) + 5(x + y – 4) = 6x + 15y + 33 – 3x – 3y + 36 – 4x + 200 – 20y + 5x + 5y – 20 = 4x – 3y + 249 (en miles de €).

② Región factible



Hallamos los vértices:

$$\begin{cases} A\begin{cases} y=0 \\ x+y=4 \Rightarrow x=4-0=4 \end{cases} \Rightarrow A(4,0) \\ B\begin{cases} x=0 \\ x+y=4 \Rightarrow y=4-0=4 \end{cases} \Rightarrow B(0,4) \\ C\begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow C(0,10) \\ D\begin{cases} y=10 \\ x+y=11 \Rightarrow x=11-10=1 \end{cases} \Rightarrow D(1,10) \\ E\begin{cases} x=9 \\ x+y=11 \Rightarrow y=11-9=2 \end{cases} \Rightarrow E(9,2) \\ F\begin{cases} y=0 \\ x=9 \end{cases} \Rightarrow F(9,0) \end{cases}$$

3 Óptimo

C(x, y) = 4x – 3y + 249

$C_A(4, 0) = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 249 = 265$ miles de €.

$C_B(0, 4) = 4·0 – 3·4 + 249 = 237$ miles de €.
$C_C(0, 10) = 4·0 – 3·10 + 249 = 219$ miles de €.
$C_D(1, 10) = 4·1 – 3·10 + 249 = 223$ miles de €.
$C_E(9, 2) = 4·9 – 3·2 + 249 = 279$ miles de €.
$C_F(9, 0) = 4·9 – 3·0 + 249 = 285$ miles de €.

El coste mínimo se alcanza en el punto C(0, 10) y son 219 000 €, luego rellenamos la tabla y el reparto debe hacerse:

	A	B	C	Total
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
Total	9	10	7	26

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

31 *Un productor tabaquero posee 85 hectáreas de terreno para plantar dos variedades de tabacos VIRGINIA y PROCESADO. La variedad VIRGINIA tiene un rendimiento de 9 600€/ha, pero necesita 3 h/ha de uso de maquinaria y 80 h/ha de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 30 ha por plantación.*
La variedad PROCESADO produce un rendimiento de 7 500€/ha y utiliza 2 h/ha de uso de maquinaria y 60 h/ha de mano de obra.
La cooperativa local le ha asignado 190 h de uso de maquinaria, pero solo se dispone de 5 420 horas de mano de obra a 12 €/h. ¿Cuántas hectáreas debe dedicar a cada variedad de tabaco?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Tabacos	Ha	Maquinaria	Mano de obra	Rendimiento	Coste mano de obra
Virginia	x	3x	80x	9 600x	80·12x
Procesado	y	2y	60y	7 500y	60·12y
Total	≤ 85	≤ 190	≤ 5 420	R(x, y)	C(x, y)

⊙ <u>Restricciones</u>:

- ✧ Las has. de tabaco Virginia (x) ha de ser mayor o igual a 0.
- ✧ Las has. de tabaco Virginia (x) ha de ser como máximo 30.
- ✧ Las has. de tabaco Procesado (y) ha de ser mayor o igual a 0.
- ✧ El total de has. a sembrar debe ser como máximo 85.
- ✧ El número máximo de horas de maquinaria ha de ser 190.
- ✧ El número máximo de horas de mano de obra ha de ser 5 420.

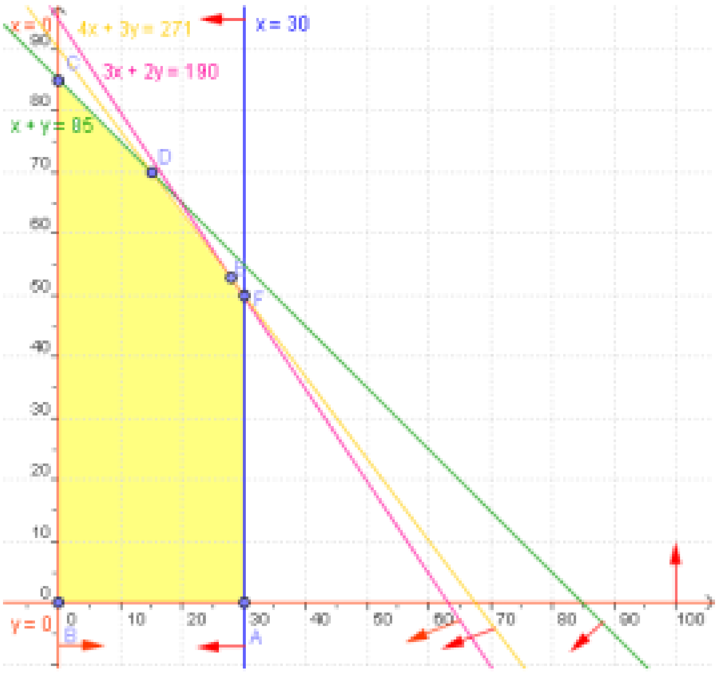
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 30 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 85 \\ 3x + 2y \leq 190 \\ 80x + 60y \leq 5420 \Leftrightarrow 4x + 3y \leq 271 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El Rendimiento - Coste = F(x, y) = R(x, y) –C(x, y) = 9 600x + 7 500y – (960x + 720y) = 8640x + 6780y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

Resolución

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.



Hallamos los vértices:

$$A\begin{cases} x = 30 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(30,0)$$

$$B\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0,0)$$

$$C\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 85 \Rightarrow y = 85 - 0 = 85 \end{cases} \Rightarrow C(0,85)$$

$$D\begin{cases} x + y = 85 \xrightarrow{-3E_1} -3x - 3y = -255 \\ 4x + 3y = 271 \xrightarrow{E_2} 4x + 3y = 271 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} x = 16, y = 85 - 16 = 69 \Rightarrow D(16,69)$$

$$E\begin{cases} 4x + 3y = 271 \xrightarrow{2E_1} 8x + 6y = 542 \\ 3x + 2y = 190 \xrightarrow{-3E_2} -9x - 6y = -570 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -x = -28, x = 28, y = \frac{190 - 84}{2} = 53 \Rightarrow E(28,53)$$

$$F\begin{cases} x = 30 \\ 3x + 2y = 190 \Rightarrow y = \dfrac{190 - 90}{2} = 50 \end{cases} \Rightarrow F(30,50)$$

Por último hallamos el valor de la función objetivo en cada vértice y tomamos el máximo:

$F(x, y) = 8640x - 6780y$

$F_A(30, 0) = 8640\cdot 30 + 6780\cdot 0 = 259\,200$ €.
$F_B(0, 0) = 8640\cdot 0 + 6780\cdot 0 = 0$ €.
$F_C(0, 85) = 8640\cdot 0 + 6780\cdot 85 = 576\,300$ €.
$F_D(16, 69) = 8640\cdot 16 + 6780\cdot 69 = 606\,060$ €.
$F_E(28, 53) = 8640\cdot 28 + 6780\cdot 53 = 601\,260$ €.
$F_F(30, 50) = 8640\cdot 30 + 6780\cdot 50 = 598\,200$ €.

Se alcanza el máximo dedicando 28 ha a la variedad Virginia y 53 ha a la variedad Procesado.

Don Elpidio decide emplear hasta 30 000€ de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10€ cada una, y en ambos casos. BLL dedica el 35% de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y el 20% al industrial. ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25% al inmobiliario y el 45% al industrial. D. Elpidio no quiere invertir más del 40% de su capital en el sector industrial ni más del 35% en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,2€/acción e ISSA de 1€/acción?

Sociedades	Número	Inversión	Seguros	Inmobiliario	Industrial	Dividendos
BLL	x	10x	3,5x	4,5x	2x	1,2x
ISSA	y	10y	3y	2,5y	4,5y	y
Total		≤ 30 000		0,35·300000	≤ 0,4·300000	D(x, y)

⦿ Restricciones:

- La cantidad de acciones de BLL (x) ha de ser mayor o igual a 0.
- La cantidad de acciones de ISSA (y) ha de ser mayor o igual a 0.
- La inversión no ha de superar los 30 000 €.
- La inversión en el sector inmobiliario no ha de superar los 10 500 €.
- La inversión en el sector industrial no ha de superar los 12 000 €...

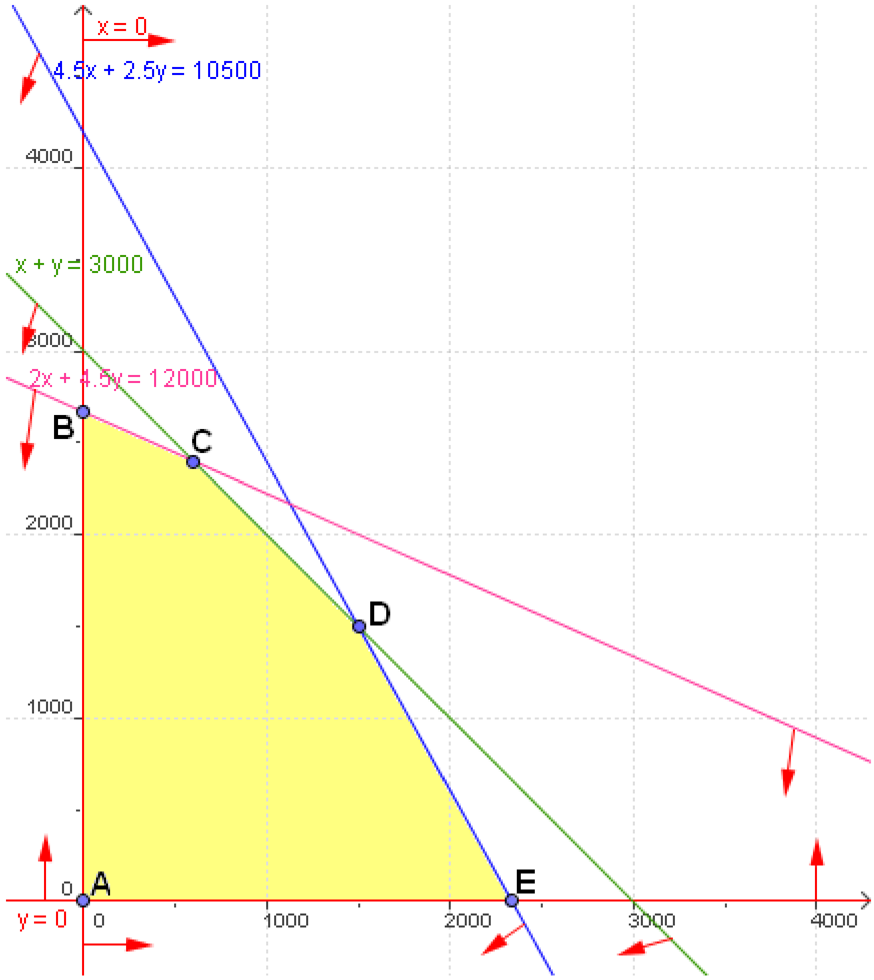
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30000 \Leftrightarrow x + y \leq 3000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y \leq 10500 \\ 2x + 4{,}5y \leq 12000 \end{cases}$$

⦿ Función objetivo: Dividendos = D(x, y) = 1,2x + y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

Resolución

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.



Como es una región acotada, el óptima se hallará en uno de los 5 vértices o en alguno de los lados, hallamos las coordenadas de los vértices:

$$A\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases}x=0\\2x+4{,}5y=12000\Rightarrow y=\dfrac{12000-0}{4{,}5}=2666{,}\widehat{6}\end{cases}\Rightarrow B(0{,}2666{,}\widehat{6})$$

$$C\begin{cases}x+y=3000 & \xrightarrow{-2E_1} -2x-2y=-6000\\2x+4{,}5y=12000 & \xrightarrow{E_2} 2x+4{,}5y=12000\end{cases}\xrightarrow{\text{sumamos}} 2{,}5y=6000\Leftrightarrow y=2400;x=600\Rightarrow C(600{,}2400)$$

$$D\begin{cases}x+y=3000 & \xrightarrow{-2{,}5E_1} -2{,}5x-2{,}5y=-7500\\4{,}5x+2{,}5y=10500 & \xrightarrow{E_2} 4{,}5x+2{,}5y=10500\end{cases}\xrightarrow{\text{sumamos}} 2x=3000\Leftrightarrow x=1500;y=1500\Rightarrow D(1500{,}1500)$$

$$E\begin{cases}y=0\\4{,}5x+2{,}5y=10500\Rightarrow x=\dfrac{10500}{4{,}5}=2333{,}\widehat{3}\end{cases}\Rightarrow E(2333{,}\widehat{3}{,}0)$$

Ahora hallamos los valores de la función objetivo en cada vértice para obtener los mayores dividendos:
D(x, y) = 1,2x + y

D_A(0, 0) = 1,2·0 + 0 = 0 €.
D_B(0, 2 666,6) = 1,2·0 + 2 666,67 = 2 666,67 €.
D_C(600, 2400) = 1,2·600 + 2400 = 3 120 €.
D_D(1500, 1500) = 1,2·1500 + 1500 = 3 300 €.
D_C(2 333,33, 0) = 1,2·2 333,33 + 0 = 2 800 €.

Luego Don Elipio debe comprar 1 500 acciones de BLL y 1 5000 acciones de ISSA.