*① Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además, el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades.*
*Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8□ y cada unidad de vinagre 2€.*

**Planteamiento**

| Productos | Unidades | Beneficio |
|---|---|---|
| Vino | x | 8x |
| Vinagre | y | 2y |
| | | B(x, y) |

⊙ Restricciones:
- ✧ Las unidades de vino (x) producidas han de ser cero o un número positivo.
- ✧ Las unidades de vinagre (y) producidas han de ser cero o un número positivo.
- ✧ El doble de la producción de vino (2x) es menor o igual (≤) que la de vinagre (y) más 4.
- ✧ El triple de la producción de vinagre (3y) más 4 veces la de vino (4x) es menor o igual que 18.

Transformadas en símbolos quedan:

$$\text{Restricciones}\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \Leftrightarrow 2x - y \leq 4 \\ 4x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 8x + 2y, que ha de hacerse máximo.

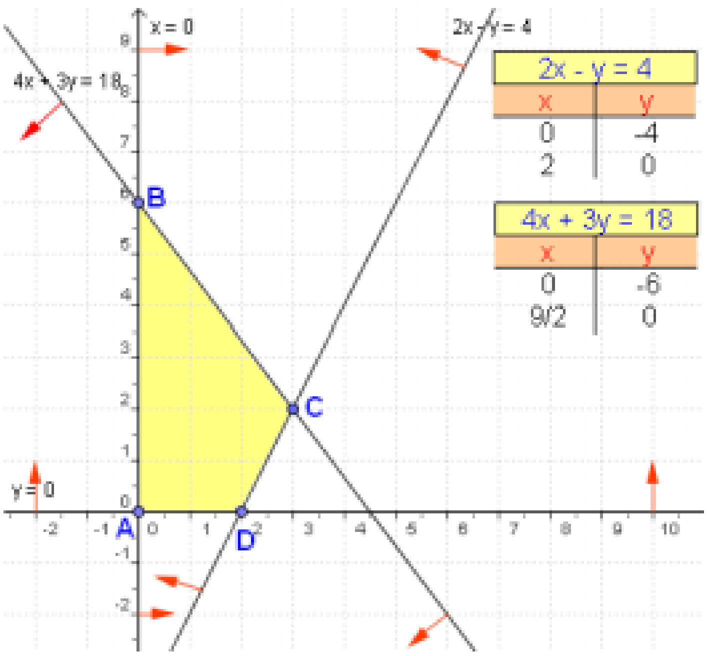
**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones. Teniendo en cuenta que si tomamos el (0,0) para hallar los semiplanos válidos:

2·0 – 0 = 0 < 4, el semiplano válido está a la izquierda de 2x – y = 4.

4·0 + 3·0 = 0 < 18, el semiplano válido está a la izquierda de 4x + 3y = 18.

Como es una región factible acotada, el máximo estará en uno de los vértices (o uno de los lados que unen vértices consecutivos), luego necesitamos saber las



coordenadas de los vértices, como punto de corte de las rectas que los forman, es decir, como solución del sistema formado por las ecuaciones de las rectas que se cortan en cada punto:

$$A\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} x=0 \\ 4x+3y=18 \end{cases} \Rightarrow 3y=18 \Leftrightarrow y=6 \Rightarrow B(0,6)$$

$$C\begin{cases} 2x-y=4 \xrightarrow{3E_1} 6x-3y=12 \\ 4x+3y=18 \xrightarrow{E_2} 4x+3y=18 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 10x=30 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=6-4=2 \Rightarrow C(3,2)$$

$$D\begin{cases} y=0 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(2,0)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices y la solución buscada será el máximo:

$B_A(0, 0) = 8·0 + 2· 0 = 0$ €.
$B_B(0, 6) = 8·0 + 2· 6 = 12$ €.
$B_C(3, 2) = 8·3 + 2· 2 = 28$ €.
$B_D(2, 0) = 8·2 + 2·0 = 16$ €.

Luego el beneficio máximo lo obtiene si produce 3 unidades de vino y 2 unidades de vinagre, que se corresponde con el vértice C( 3, 2), siendo este beneficio 28 €.

***Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100€ y a no fumadores al precio de 60€. Si al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?***

**Planteamiento**

| Plazas | Plazas (oferta) | Equipaje(kg) | Beneficio |
|---|---|---|---|
| Fumador | x | 20x | 100x |
| No fumador | y | 50y | 60y |
| | ≤ 90 | ≤ 3 000 | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

- Las plazas para **fumador** ofertadas (x) han de ser cero o un número positivo entero.
- Las plazas para **no fumador** ofertadas (y) han de ser cero o un número positivo entero.
- El total de plazas ofertadas no puede rebasar la capacidad del autobús, 90 plazas.
- El total de peso de equipaje a transportar debe ser menor o igual a 3 000 kg.

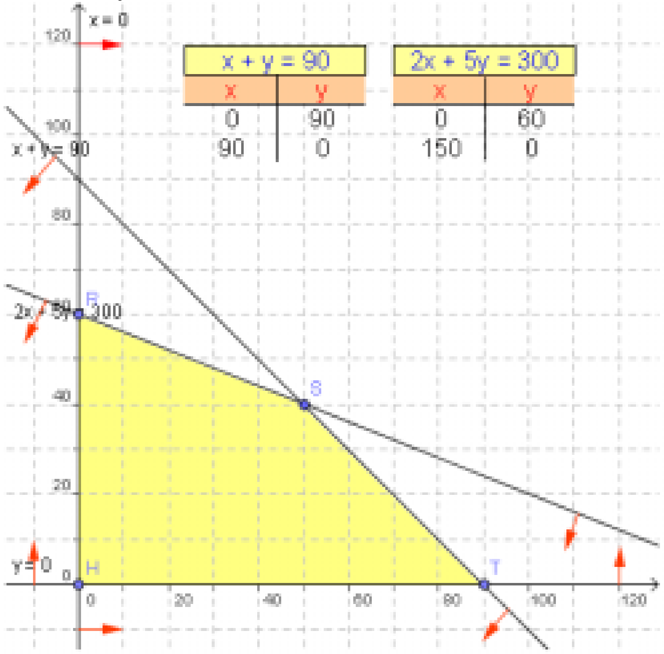
Transformadas en símbolos quedan:

$$\text{Restricciones}\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3000 \Leftrightarrow 2x + 5y \leq 300 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 100x + 60y, que ha de hacerse máximo.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones. Teniendo en cuenta que si tomamos el (0,0) para hallar los semiplanos válidos:




0 + 0 = 0 < 90, el semiplano válido está a la izquierda de x + y = 90.

2·0 + 5·0 = 0 < 300, el semiplano válido está a la izquierda de 2x + 5y = 300.

Como es una región factible acotada, el máximo estará en uno de los vértices (o uno de los lados que unen vértices consecutivos), luego necesitamos saber las coordenadas de los vértices, como punto de corte de las rectas que los forman, es decir, como solución del sistema formado por las ecuaciones de las rectas que se cortan en cada punto:

$$H\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$R\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases} \Rightarrow 5y = 300 \Leftrightarrow y = 60 \Rightarrow B(0,60)$$

$$S\begin{cases} x + y = 90 & \xrightarrow{-2E_1} -2x - 2y = -180 \\ 2x + 5y = 300 & \xrightarrow{E_2} \quad 2x + 5y = 300 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 3y = 120 \Leftrightarrow x = 40 \Rightarrow y = 90 - 40 = 50 \Rightarrow C(40,50)$$

$$T\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 90 \end{cases} \Rightarrow x = 90 \Rightarrow D(90,0)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices y la solución buscada será el máximo:

B(x, y) = 60x + 100y

$B_H$(0, 0) = 100·0 + 60· 0 = 0 €.

$B_R$(0, 60) = 100·0 + 60·60 = 3 600 €.

$B_S$(40, 50) = 100·40 + 60· 50 = 7 000 €.

$B_T$(90, 0) = 100·90 + 60·0 = 9 000 €.

Luego el beneficio máximo lo obtiene si se ofertan 90 plazas para fumador y 0 plazas para no fumador, que se corresponde con el vértice T( 90, 0), siendo este beneficio 9 000 €.

①③ *Una persona quiere invertir 100 000€ en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal. Decide invertir como máximo 60 000€ en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe invertir los 100 000€ para que el beneficio anual sea máximo?*

**Planteamiento**

| Acciones(tipo) | Cantidad | Beneficio |
|---|---|---|
| A | x | 0,1x |
| B | y | 0,07y |
| | ≤ 100 000 | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

- La cantidad invertida en acciones del tipo A (x) ha de ser cero o positiva.
- La cantidad invertida en acciones del tipo B (x) ha de ser como mínimo 20 000 €.
- La cantidad invertida en acciones del tipo A (x) ha de ser como máximo 60 000 €.
- Lo invertido en acciones del tipo A(x) ha de ser mayor o igual a lo invertido en B(y).
- La cantidad invertida en acciones del lo dos tipos ha de ser como máximo 100 000 €.

Transformadas en símbolos (y las cantidades en decenas de miles de €) quedan:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2 \\ x \leq 6 \\ x \geq y \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 0,1x + 0,07y, que ha de hacerse máximo.

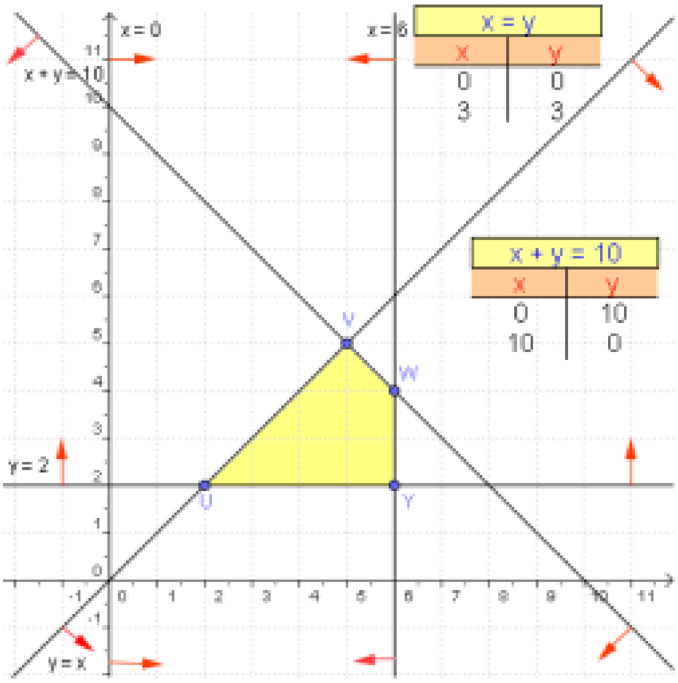
**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.

Teniendo en cuenta que si tomamos el (0,0) para hallar el semiplano válido 0 + 0 = 0 < 10, el semiplano válido está a la izquierda de x + y = 10.

Si tomamos el (1, 0), 1 > 0, el semiplano válido está por encima de x = y.

El resto de las restricciones son evidentes.




Como es una región factible acotada, el máximo estará en uno de los vértices (o uno de los lados que unen vértices consecutivos), luego necesitamos saber las coordenadas de los vértices, como punto de corte de las rectas que los forman, es decir, como solución del sistema formado por las ecuaciones de las rectas que se cortan en cada punto:

$$U\begin{cases} y = 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow U(2,2)$$

$$V\begin{cases} y = x \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 2y = 10 \Leftrightarrow x = y = 5 \Rightarrow V(5,5)$$

$$W\begin{cases} x = 6 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow y = 10 - x = 4 \Rightarrow W(6,4)$$

$$Y\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow Y(6,2)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices y la solución buscada será el máximo:

$B(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$

$B_U(2, 2) = 0{,}1·2 + 0{,}07· 2 = 0{,}34$ €.
$B_V(5, 5) = 0{,}1·5 + 0{,}07·5 = 0{,}85$ €.
$B_W(6, 4) = 0{,}1·6 + 0{,}07· 4 = 0{,}88$ €.
$B_Y(6, 2) = 0{,}1·6 + 0{,}07·2 = 0{,}74$ €.

Luego para obtener el beneficio máximo ha de invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B y obtendría 88 000 € de beneficio.

⓵⓸ *Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg. Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar el comerciante para obtener beneficio máximo?*

***❀❀✪❀❀***

**Planteamiento**

| Naranjas(tipo) | Cantidad(kg) | Coste (€) | Importe (€) | Beneficio(€) |
|---|---|---|---|---|
| A | x | 0,5x | 0,58x | (0,58-0,5)x=0,08x |
| B | y | 0,8y | 0,9y | (0,9 - 0,8)y = 0,1y |
| | ≤ 700 | ≤ 500 | | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

✧ Los kg de naranjas del tipo A (x) ha de ser cero o positiva.
✧ Los kg de naranjas del tipo B (x) ha de ser cero o positiva.
✧ La cantidad invertida en comprar las naranjas ha de ser como máximo 500 €.
✧ La cantidad comprada en total ha de ser como máximo 700 kg (no tiene más espacio).

Transformadas en símbolos quedan:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \Leftrightarrow 5x + 8y \leq 5000 \\ x + y \leq 700 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 0,08x + 0,1y, que ha de hacerse máximo.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.

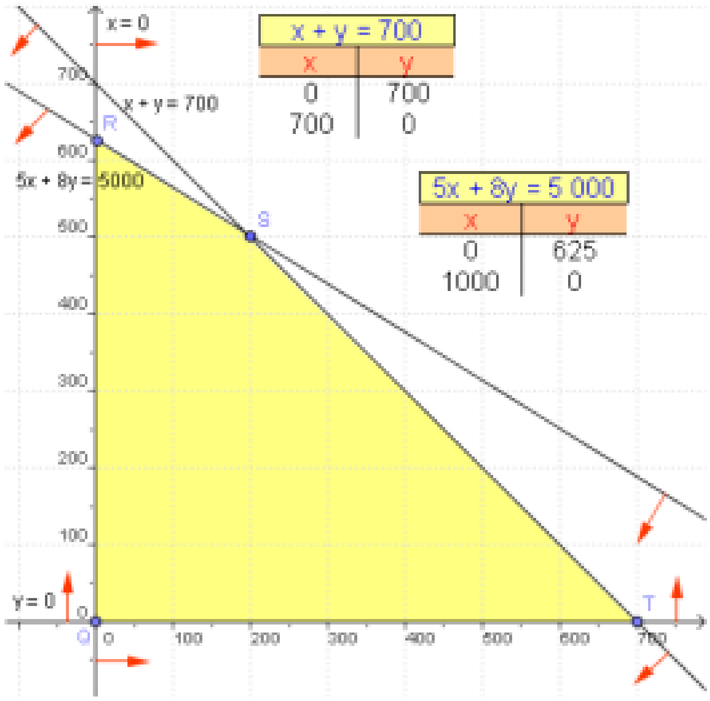
Representamos las rectas asociadas y hallamos las regiones válidas. Tomamos el punto (0,0), que está por debajo de x + y = 700 y 5x + 8y = 5000, cumple las dos restricciones. Por tanto la región factible es el cuadrilátero que se dibuja a continuación. La solución óptima estará en alguno de los cuatro vértices (o uno de los lados que unen dos vértices consecutivos) luego necesitamos hallar las coordenadas de los vértices:

$$Q\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0,0)$$

$$R\begin{cases} x = 0 \\ 5x + 8y = 5000 \end{cases} \Rightarrow y = 625 \Rightarrow R(0,625)$$

$$S\begin{cases} x + y = 700 \\ 5x + 7y = 5000 \end{cases} \Rightarrow S(200,500)$$

$$T\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 700 \end{cases} \Rightarrow T(700,0)$$




Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices y la solución buscada será el máximo:

B(x, y) = 0,08x + 0,1y

$B_Q(0, 0) = 0{,}08\cdot 0 + 0{,}1\cdot 0 = 0$ €.
$B_R(0, 625) = 0{,}08\cdot 0 + 0{,}1\cdot 625 = 62{,}5$ €.
$B_S(200, 500) = 0{,}08\cdot 200 + 0{,}1\cdot 500 = 66$ €.
$B_T(700, 0) = 0{,}08\cdot 700 + 0{,}1\cdot 0 = 56$ €.

Luego para obtener el beneficio máximo ha de comprar 200 kg de naranjas del tipo A y 500 kg de tipo B, con lo que obtendrá un beneficio máximo de 66 €.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**15** *Un sastre tiene 80 m² de tela de algodón y 120 m² de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m² de algodón y 3 m² de lana y un vestido de señora necesita 2 m² de cada una de las telas. Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**Planteamiento**

| Vestidos | Número | Algodón | Lana | Beneficio(€) |
|---|---|---|---|---|
| Caballero | x | x | 3x | px |
| Señora | y | 2y | 2y | py |
| | | ≤ 80 | ≤ 120 | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

- ✧ El número de trajes de caballero (x) ha de ser cero o un entero positivo.
- ✧ El número de vestidos de señora (y) ha de ser cero o un entero positivo.
- ✧ La superficie máxima de tela de algodón es de 80 $m^2$ ( no se tiene más).
- ✧ La superficie máxima de tela de lana es de 120 $m^2$.

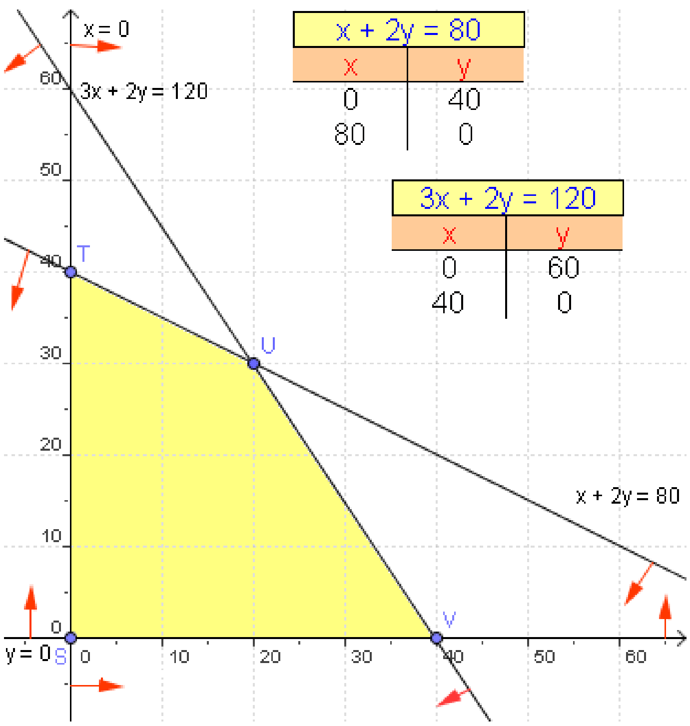
Transformadas en símbolos quedan:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = px + py = p(x + y), que ha de hacerse máximo.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




Representamos las rectas asociadas y hallamos las regiones válidas. Tomamos el punto (0,0), que está por debajo de x + 2y = 80 y 3x + 2y = 120, cumple las dos restricciones. Por tanto la región factible es el cuadrilátero que se dibuja a continuación.
La solución óptima estará en alguno de los cuatro vértices (o uno de los lados que unen dos vértices consecutivos) luego necesitamos hallar las coordenadas de los vértices:

$$S\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S(0,0)$$

$$T\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow y = 40 \Rightarrow T(0,40)$$

$$U\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow U(20,30)$$

$$V\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow V(40,0)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices y la solución buscada será el máximo:

B(x, y) = p(x + y) que será máxima cuando lo sea x + y

$B_S(0, 0) = p\cdot(0 + 0) = 0$ €.
$B_T(0, 40) = p\cdot(0 + 40) = 40p$ €
$B_U(20, 30) = p\cdot(20 + 30) = 50p$ €
$B_V(40, 0) = p\cdot(40 + 0) = 40$ €

Luego para obtener el beneficio máximo ha de confeccionar 20 trajes de hombre y 30 vestidos de mujer, con lo que obtendrá un beneficio máximo de 50p € ( siendo p el precio a que los venda).

16 *Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta:*
*"Pague a solo 2,5 € el litro de aceite C y a 1,25 € el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D". Disponemos de un máximo de 31,25€.*

**a)** *Representa gráficamente los modos existentes de acogernos a la oferta.*

**b)** *Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?*

**a)**

**Planteamiento**

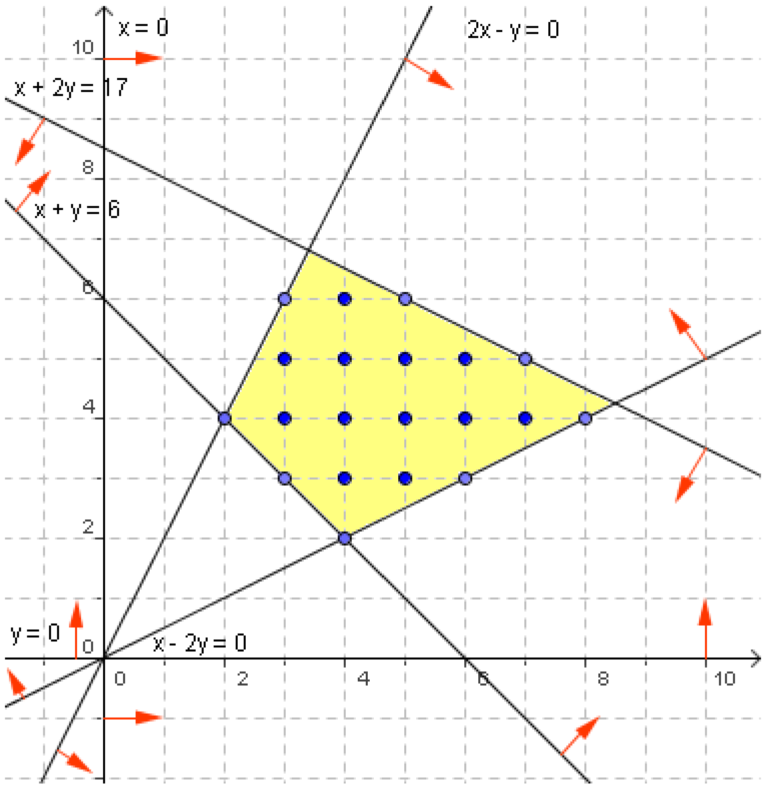
| Aceite(tipo) | Cantidad(l) | Importe (€) |
|---|---|---|
| D | x | 1,25x |
| C | y | 2,5y |
| | ≥ 6 | ≤ 31,25 |

⊙ Restricciones:

- Los l de aceite del tipo D (x) ha de ser cero o entero positivo.
- Los l de aceite del tipo C (y) ha de ser cero o entero positivo.
- El volumen total de ambos tipos de aceite ( x + y ) ha de ser como mínimo 6 l.
- La cantidad de aceite de tipo C ha de ser como mínimo la mitad del tipo D.
- La cantidad de aceite de tipo C ha de ser como máximo el doble del tipo D.
- El dinero máximo para gastarse es como máximo 31, 25 €.

Transformadas en símbolos quedan:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 6 \\ y \ge \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2y \le 0 \\ y \le 2x \Leftrightarrow 2x - y \ge 0 \\ 1{,}25x + 2{,}5y \le 31{,}25 \Leftrightarrow 2y + x \le 17 \end{cases}$$




Hay 20 modos distintos de acogerse a la oferta, los veinte puntos representados en la gráfica anterior, que son:

| Oferta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| C | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| Punto | (2,4) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (7,4) | (7,5) | (8,4) |

**b)** Como puede verse en la gráfica o la tabla la mínima cantidad de aceite D necesaria para acogerse a la oferta es de 2 l y la máxima de C es de 6 l.

*************

*①⑦ Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.*

*Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0,3€ y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:*

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 1 | 20 | 2 |
| Q | 1 | 3 | 7,5 | 0 |

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

Planteamiento

| | Peso(kg) | A | B | C | D | Gasto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | x | x | x | 20x | 2x | 0,3x |
| Q | y | y | 3y | 7,5y | 0 | 0,3y |
| Total | | ≥ 2 | ≥ 3 | ≥ 30 | ≥ 2 | G(x, y) |

⊙ Restricciones:

- ✧ El peso de vitamina A han de ser como mínimo 2 mg.
- ✧ El peso de vitamina B han de ser como mínimo 3 mg.
- ✧ El peso de vitamina C han de ser como mínimo 30 mg.
- ✧ El peso de vitamina B han de ser como mínimo 2 mg.

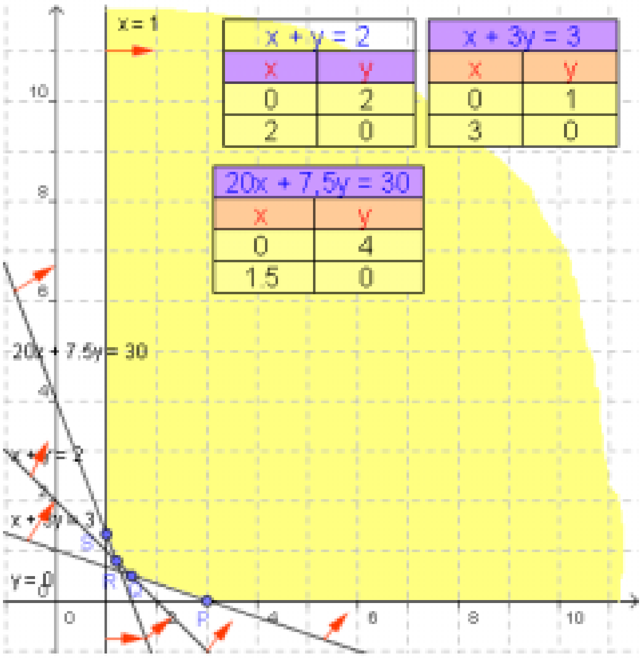
Es decir:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \\ 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El Gasto = G(x, y) = 0,3x + 0,3y = 0,3(x + y), que ha de hacerse mínimo.

Resolución

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




Ahora se trata de una región factible abierta superiormente y como la función objetivo tiene pendiente negativa, no tendrá máximo y el mínimo será alguno de los cuatro vértices o uno de los segmentos que los conectan.

Como la función objetivo G(x,y) = 0,3(x + y) es paralela a la restricción x + y = 2 ( coeficientes de las incógnitas proporcionales) los infinitos mínimo están en el segmento $\overline{RQ}$, hallamos las coordenadas de R y Q:

$$R\begin{cases} x + y = 2 \\ 20x + 7{,}5y = 30 \end{cases} \Rightarrow R(1{,}8{,}0{,}8)$$

$$Q\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**18** *Un pastelero fabrica dos tipos de tartas $T_1$ y $T_2$, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta $T_1$ debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta $T_2$ necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.*

**a)** *Si se venden las tartas $T_1$ a 10 €, y las tartas $T_2$ a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?*

**b)** *Si se fija el precio de una tarta del tipo $T_1$ en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo $T_2$ si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo $T_1$ y 15 del tipo $T_2$?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)**

**Planteamiento**

| Tartas | Cantidad | A | B | C | INGRESOS(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | x | x | x | 2x | 10x |
| $T_2$ | y | 5y | 2y | y | 23y |
| Total | | ≤ 150 | ≤ 90 | ≤ 150 | $I_a(x, y)$ |

⊙ Restricciones:

- ✧ El número de tartas $T_1$ (x) ha de ser mayor o igual a 0.
- ✧ El número de tartas $T_2$ (y) ha de ser mayor o igual a 0.
- ✧ El peso de ingrediente A (x + 5y) han de ser como máximo 150 kg.
- ✧ El peso de ingrediente B (x + 2y) han de ser como máximo 90 kg.
- ✧ El peso de ingrediente C (2x + y) han de ser como máximo 150 kg.

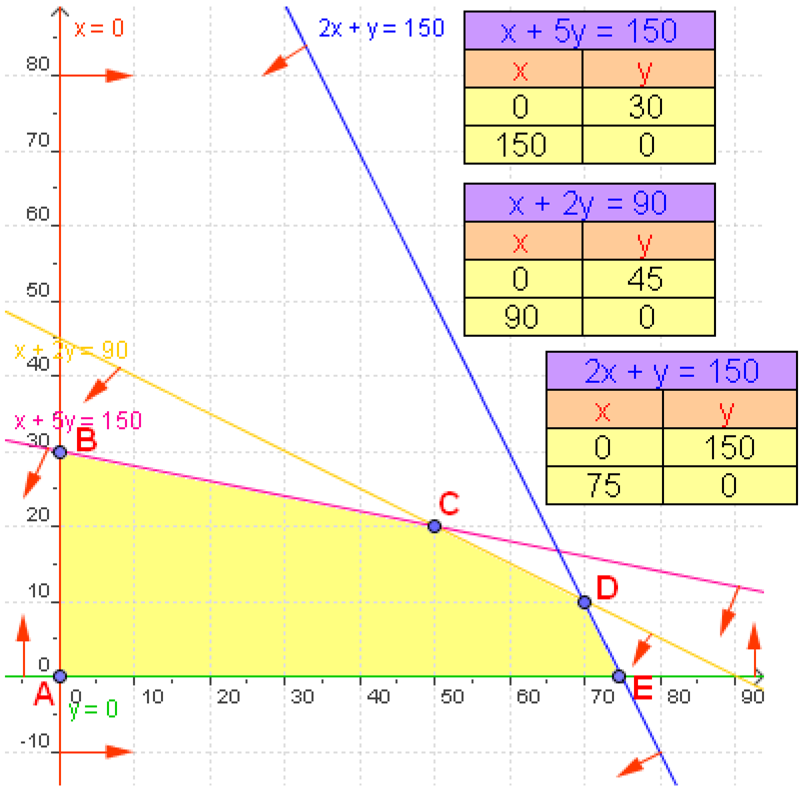
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: Los Ingresos = $I_a(x, y) = 10x + 23y$, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




| x + 5y = 150 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 30 |
| 150 | 0 |

| x + 2y = 90 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 45 |
| 90 | 0 |

| 2x + y = 150 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 150 |
| 75 | 0 |

Para obtener la región factible hemos tenido en cuenta que el punto (0, 0) está por debajo de las rectas x + 2y = 90, 2x + y = 150 y x + 5y= 150 y cumple las restricciones asociadas.

Además debe estar a la derecha del eje vertical ( x > 0) y por encima del horizontal ( y > 0).

El máximo estará en alguno de los cinco vértices del pentágono (o en alguno de los lados), en cualquier caso hay que hallar las coordenadas de los cinco vértices:

$$\begin{cases} A\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0) \\ B\begin{cases} x=0 \\ x+5y=150 \Leftrightarrow y=\dfrac{150}{5}=30 \end{cases} \Rightarrow B(0,30) \\ C\begin{cases} x+2y=90 \xrightarrow{-E_1} -x-2y=-90 \\ x+5y=150 \xrightarrow{E_2} \quad x+5y=150 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 3y=60 \Leftrightarrow y=\dfrac{60}{3}=20 \Rightarrow x=90-2y=50 \Rightarrow C(50,20) \\ D\begin{cases} 2x+y=150 \xrightarrow{-2E_1} -4x-2y=-300 \\ x+2y=90 \xrightarrow{E_2} \quad x+2y=90 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -3x=-210 \Leftrightarrow x=70, y=150-2x=10 \Rightarrow D(70,10) \\ E\begin{cases} y=0 \\ 2x+y=150 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{150}{2}=75 \Rightarrow E(75,0) \end{cases}$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$I_a(x, y) = 10x + 23y$

$I_A(0, 0) = 10·0 + 10·0 = 0$ €.
$I_B(0, 30) = 10·0 + 10·30 = 30$ €.
$I_C(50, 20) = 10·50 + 10·20 = 700$ €.
$I_D(70, 10) = 10·70 + 10·10 = 800$ €.
$I_E(75, 0) = 10·75 + 10·0 = 750$ €.

El máximo se alcanza para el punto D(70, 10), tenemos que fabricar 70 tartas de tipo $T_1$ y 10 de tipo $T_2$, logrando un ingreso de 800 €.

**b)** Si llamamos p al precio de las tartas $T_2$, ahora la función de ingresos es I(x, y) = 15x + py, que alcanza la solución óptima en el punto (60, 15) que, según vemos en la gráfica, pertenece a la recta x + 2y = 90 y no es un vértice, luego esta recta y la de ingresos han de ser paralelas y, por lo tanto, los coeficientes de las incógnitas proporcionales:

$\frac{15}{1} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2 \cdot 15 = 30$ € será el precio de las tartas tipo $T_2$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**19** *Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas de cortar, coser y teñir se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, una hora y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, doce y la de cortar, siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón.*

*¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**Planteamiento**

| Prendas | Cantidad | Cortar(Hr) | Coser(hr) | Teñir(hr) | BENEFICIOS |
|---|---|---|---|---|---|
| Chaquetas | x | x | 3x | x | 8x |
| Pantalones | y | y | y | 0 | 5y |
| Total | | ≤ 7 | ≤ 12 | ≤ 3 | B(x, y) |

⊙ <u>Restricciones</u>:

- ✧ El número de chaquetas (x) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número de pantalones (y) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número máximo que podemos usar la máquina de cortar es de 7 horas.
- ✧ El número máximo que podemos usar la máquina de coser es de 12 horas.
- ✧ El número máximo que podemos usar la máquina de teñir es de 3 horas.

Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

⊙ <u>Función objetivo</u>: El beneficio = B(x, y) = 8x + 5y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

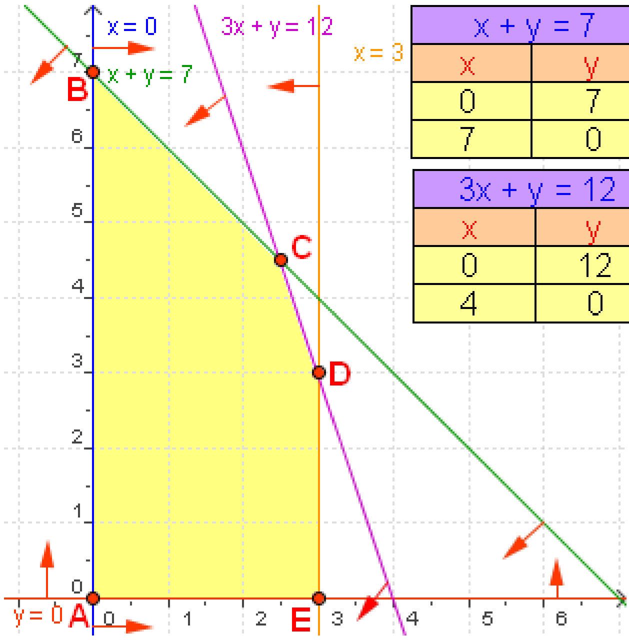
Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.

La región factible obtenida es el pentágono de la figura.

El semiplano solución de la inecuación x + y < 7 es el inferior ya que al sustituir el punto (0, 0) que está por debajo se cumple la restricción 0 + 0 = 0 < 7.

El semiplano solución de la inecuación 3x + y < 12 es el de la izquierda ya que al sustituir el punto (0, 0) que está a la izquierda se cumple la restricción 0 + 0 = 0 < 12.

El óptima se hallará en uno de los vértices ( o los lados) del pentágono, luego hemos de hallar sus coordenadas:




| x + y = 7 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 7 |
| 7 | 0 |

| 3x + y = 12 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 12 |
| 4 | 0 |

$$A\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} x=0 \\ x+y=7 \Rightarrow y=7-x=7 \end{cases} \Rightarrow B(0,7)$$

$$C\begin{cases} x+y=7 \xrightarrow{-E_1} -x-y=-7 \\ 3x+y=12 \xrightarrow{E_2} 3x+y=12 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 2x=5 \Rightarrow \begin{matrix} x=\dfrac{5}{2} \\ y=7-\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2} \end{matrix} \Rightarrow C\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$D\begin{cases} x=3 \\ 3x+y=12 \end{cases} \Rightarrow y=12-3x=3 \Rightarrow D(3,3)$$

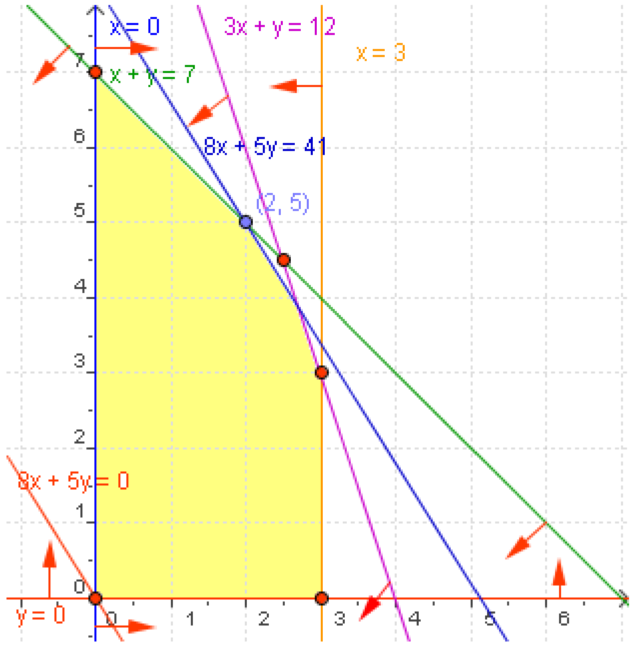
$$E\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow E(3,0)$$

Ahora calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cinco vértices para saber el máximo:

B(x, y) = 8x + 5y

$B_A$(0, 0) = 8·0 + 5·0 = 0 €.
$B_B$(0, 7) = 8·0 + 5·7 = 35 €.
$B_C$(5/2, 9/2) = 8·(5/2) + 5·(9/2) = 85/2 €.
$B_D$(3, 3) = 8·3 + 5·3 = 39 €.
$B_E$(3, 0) = 8·3 + 5·0 = 24 €.

El máximo corresponde al punto C(5/2, 9/2) pero como deben ser valores enteros, no es posible, hay que hallar los valores enteros que dentro de la región factible hagan máximo la función objetivo, usamos el método grafico buscando la paralela a la de la recta objetivo 8x + 5y = 0, de mayor ordenada:




Esa recta es la de ecuación 8x + 5y = 41 que pasa por el punto (2, 5) que es el punto solución, 2 chaquetas y 5 pantalones y obtendríamos un beneficio de B(2, 5) = 8·2 + 5·5 = 41 €, que es el término independiente de la recta paralela a la función objetivo que pasa por el máximo.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**20** *Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso $P_1$ y $P_2$, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los que aparecen en la tabla:*

| | A | B |
|---|---|---|
| $P_1$ | 2 | 6 |
| $P_2$ | 4 | 3 |

*Si el kilogramo de pienso $P_1$ vale 0,4€ y el del $P_2$ 0,6€, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**Planteamiento**

| Piensos | Cantidad(kg) | Vit. A | Vit. B | Coste (€) |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | x | 2x | 6x | 0,4x |
| $P_2$ | y | 4y | 3y | 0,6y |
| Total | | ≥ 4 | ≥ 6 | C(x, y) |

⊙ Restricciones:

✧ El peso (kg) del pienso $P_1$ (x) ha de ser mayor o igual a 0.
✧ El peso (kg) del pienso $P_2$ (y) ha de ser mayor o igual a 0..
✧ El peso mínimo de vitamina A (mg) en la mezcla (2x + 4y ) ha de ser 4.
✧ El peso mínimo de vitamina B (mg) en la mezcla (6x + 3y ) ha de ser 6.

Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+4y \geq 4 \Leftrightarrow x+2y \geq 2 \\ 6x+3y \geq 6 \Leftrightarrow 2x+y \geq 2 \end{cases}$$

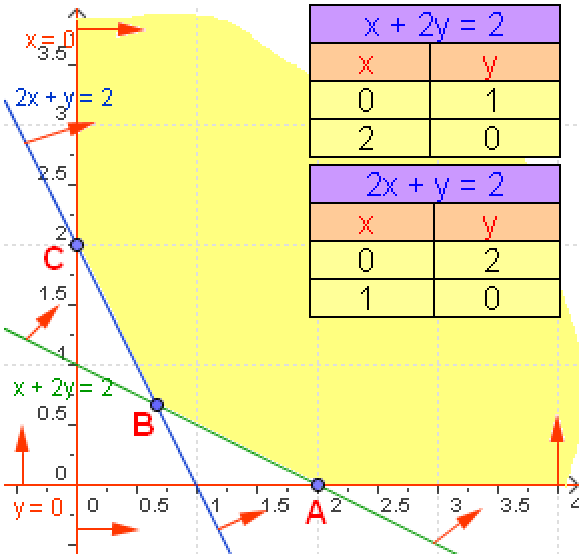
⊙ Función objetivo: El Coste = C(x, y) = 0,4x + 0,6y, que ha de minimizarse sujeto a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.

El semiplano válido está en y por encima de las rectas x + 2y = 2 y 2x + y = 2, ya que el punto (0,0) ( que está por debajo no cumple las restricciones asociadas.

La región factible es no acotada o abierta superiormente, como la función objetivo tiene pendiente negativa, no tiene máximo y el mínimo buscado estará en alguno de los tres vértices (o los lados que los unen), hallamos los vértices:




$$A\begin{cases} y=0 \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2{,}0)$$

$$B\begin{cases} x+2y=2 \xrightarrow{-2E_1} -2x-4y=-4 \\ 2x+y=2 \xrightarrow{E_2} \quad 2x+y=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -3y=-2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3} \Rightarrow x=2-2y=\frac{2}{3} \Rightarrow B\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$C\begin{cases} x=0 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(0{,}2)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en los tres vértices y tomamos el mínimo:

C(x, y) = 0,4x + 0,6y

$C_A$(2, 0) = 0,4·2 + 0,6·0 = 0,8 €.
$C_B$(2/3, 2/3) = 0,4·2/3 + 0,6·2/3 = 2/3 = 0,666 €.

$C_C(0, 2) = 0{,}4\cdot 0 + 0{,}6\cdot 2 = 1{,}2$ €.

Luego hay que mezclar 2/3 de kg de pienso $P_1$ y 2/3 de kg de pienso $P_2$ lo que nos costará 2/3 de euro.

❈❈❈❁❁❍❁❁❈❈❈

*②① Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 150€ por electricista y 120€ por mecánico.*
*¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?*

❈❈❈❁❁❍❁❁❈❈❈

**Planteamiento**

| Trabajadores | Cantidad | Beneficios |
|---|---|---|
| Electricistas | x | 150x |
| Mecánicos | y | 120y |
| Total | | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

- ✧ El número de electricistas (x) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número de mecánicos (y) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número de mecánicos (y) ha de ser mayor o igual que el de electricistas (x).
- ✧ El número de mecánicos no debe superar al doble de electricistas.
- ✧ El número de mecánicos no debe superar a 20.
- ✧ El número de electricistas no debe superar a 30.

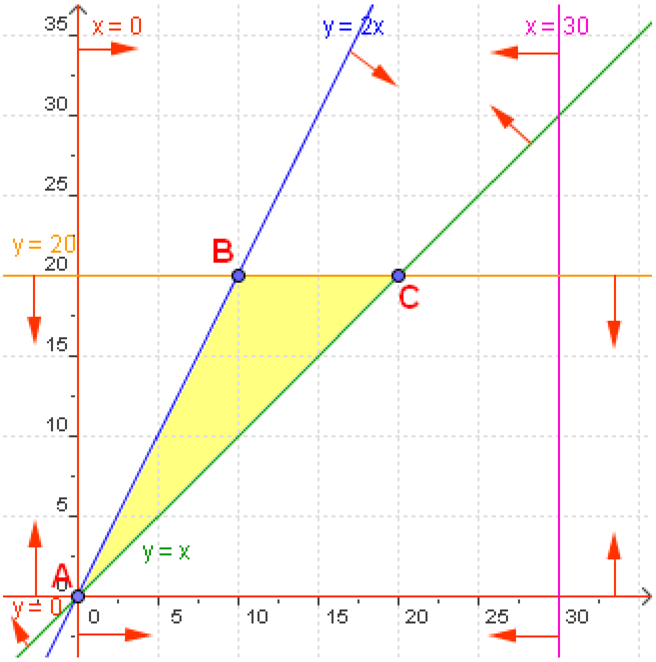
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \leq 20; x \leq 30 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 150x + 120y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




Como es una región acotada, el óptimo se hallará en uno de los vértices o uno de los lados, hallamos los vértices:

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} y = 20 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow B(10,20)$$

$$C\begin{cases} y = 20 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow C(20,20)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada vértice de la región factible y tomamos el máximo:

$B(x, y) = 150x + 120y$

$B_A(0, 0) = 150\cdot 0 + 120\cdot 0 = 0$ €.
$B_B(10, 20) = 150\cdot 10 + 120\cdot 20 = 3\,900$ €.
$B_C(20, 20) = 150\cdot 20 + 120\cdot 20 = 5\,400$ €.

Hemos de contratar 20 trabajadores de cada tipo para que el beneficio sea máximo.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

*②② Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima. La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8€. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10€.*
*En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.*

**a)** *¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.*

**b)** *¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?*

***********

**a)**

**Planteamiento**

| Tartas | Cantidad | Huevos | Azúcar | INGRESOS |
|---|---|---|---|---|
| Imperial | x | 8x | 0,5x | 8x |
| Lima | y | 8y | y | 10y |
| Total | | ≤ 120 | ≤ 10 | I(x, y) |

⊙ Restricciones:

- ✧ El número de tartas Imperial (x) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número de tartas Lima (y) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- ✧ El número de huevos (8x + 8y) han de ser como máximo 120.
- ✧ El peso de azúcar (0,5x + y) han de ser como máximo 10 kg.

Es decir:

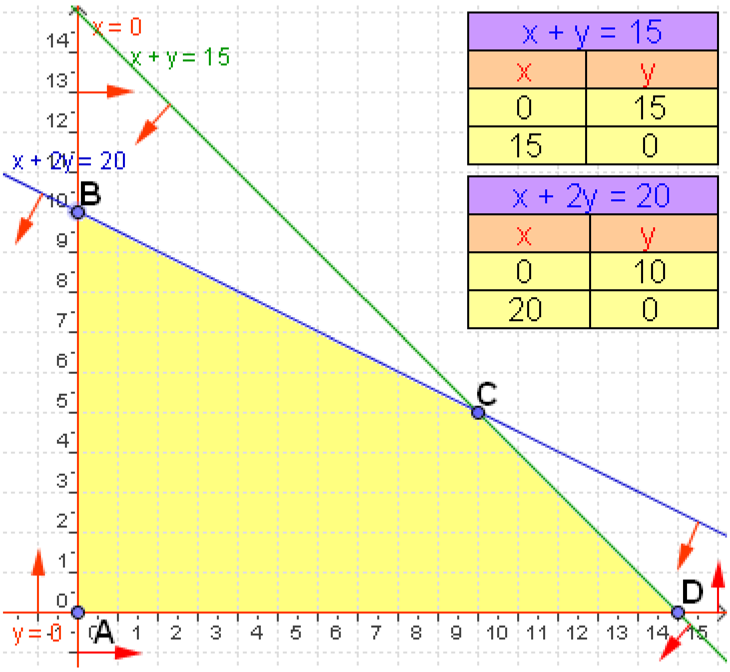
$$\begin{cases} x \geq 0, \text{entero} \\ y \geq 0, \text{entero} \\ 8x + 8y \leq 120 \Leftrightarrow x + y \leq 15 \\ 0{,}5x + y \leq 10 \Leftrightarrow x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: Los Ingresos = I(x, y) = 8x + 10y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.

El conjunto de soluciones está dentro de la región factible, que es un cuadrilátero.




| x + y = 15 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 15 |
| 15 | 0 |

| x + 2y = 20 | |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 10 |
| 20 | 0 |

**b)** Para hallar el máximo ingreso por el método analítico, tenemos que conocer las coordenadas de los cuatro vértices y hallar el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para saber el valor máximo y dónde se alcanza:

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow y = 10 \Rightarrow B(0,10)$$

$$C\begin{cases} x + y = 15 \xrightarrow{-E_1} -x - y = -15 \\ x + 2y = 20 \xrightarrow{E_2} x + 2y = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} y = 5 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow C(10,5)$$

$$D\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow x = 15 \Rightarrow D(15,0)$$

I(x, y) = 8x + 10y

$I_A(0, 0) = 8·0 + 10·0 = 0$ €.
$I_B(0, 10) = 8·0 + 10·10 = 100$ €.
$I_C(10, 5) = 8·10 + 10·5 = 130$ €.
$I_D(15, 0) = 8·15 + 10·0 = 120$ €.

Han de confeccionarse 10 tartas Imperiales y 5 tartas Lima para que el beneficio sea el máximo (sujeto a las restricciones dadas).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

*②③ Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25€. La de tipo B se vende a 30€ y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**Planteamiento**

| Joyas | Cantidad | Oro(g) | Plata(g) | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| A | x | x | 1,5x | 25x |
| B | y | 1,5y | y | 30y |
| Total | | $\leq 750$ | $\leq 750$ | B(x, y) |

⊙ Restricciones:

- El número de joyas tipo A (x) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- El número de joyas tipo B (y) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
- El peso de oro (x + 1,5y) no puede superar los 750 g.
- El peso de oro (1,5x + y) no puede superar los 750 g.

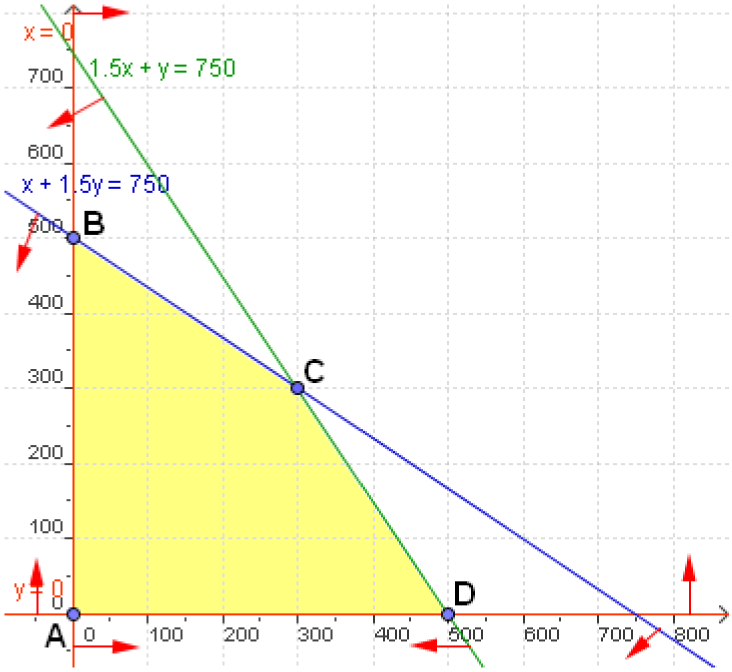
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0, \text{entero} \\ y \geq 0, \text{ entero} \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: Los Beneficios = B(x, y) = 25x + 30y, que ha de maximizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




Vértices:

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} x = 0 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{750}{1{,}5} = 500 \Rightarrow B(0,500)$$

$$C\begin{cases} x + 1{,}5y = 750 \\ 1{,}5x + y = 750 \end{cases} \Rightarrow C(300,300)$$

$$D\begin{cases} y = 0 \\ 1{,}5x + y = 750 \end{cases} \Rightarrow D(500,0)$$

Hallamos los valores de la función objetivo en los cuatro vértices:

B(x, y) = 25x + 30y

$B_A(0, 0) = 25·0 + 30·0 = 0$ €.
$B_B(0, 300) = 25·0 + 30·500 = 15\,000$ €.

$B_C(300, 300) = 25\cdot300 + 30\cdot300 = 16\,500$ €.
$B_D(500, 0) = 25\cdot500 + 30\cdot0 = 12\,500$ €.

El beneficio máximo se alcanza para 300 joyas de tipo A y 300 de tipo B.

**24** *Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes:*
*- El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A.*
*- El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y de B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B.*
*El primer proveedor vende cada lote a 10€ y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.*
*¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?*

**Planteamiento**

| Proveedores | Lotes | A | B | Coste |
|---|---|---|---|---|
| Primero | x | x | 4x | 10x |
| Segundo | y | 4y | y | 20y |
| Total | | ≥ 10 | ≥ 10 | C(x, y) |

- Restricciones:
  - El número de lotes del primer proveedor (x) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
  - El número de lotes del segundo proveedor (y) ha de ser mayor o igual a 0 y entero.
  - El número de unidades de A ha de ser como mínimo 10.
  - El número de unidades de B ha de ser como mínimo 10.

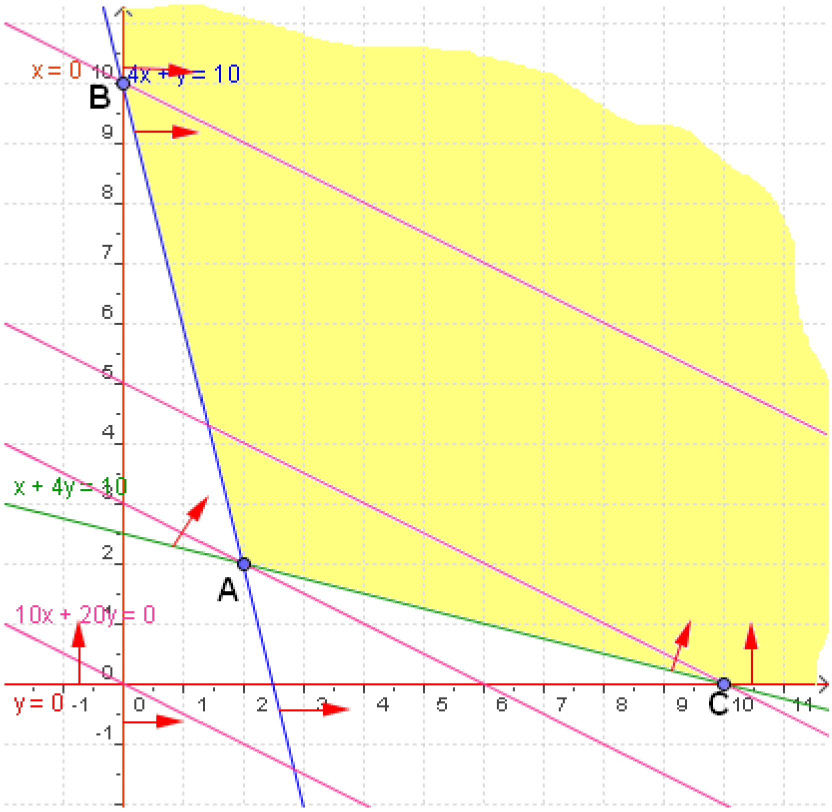
Es decir:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \end{cases}$$

- Función objetivo: El Coste = C(x, y) = 10x + 20y, que ha de minimizarse sujeta a las restricciones anteriores.

**Resolución**

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero, la región factible a partir de las restricciones.




Es una región factible no acotada.

Si trazamos las rectas de nivel paralelas a 10x + 20y = 0, que pasan por la región factible y sus vértices vemos que el mínimo es la que pasa por el vértice A, cuyas coordenadas hallamos:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 & -4E_1 \rightarrow -16x - 4y = -40 \\ x + 4y = 10 & E_2 \qquad \rightarrow x + 4y = 10 \end{cases}$$

sumando:

-15x = -30, x = 2, y = 10 – 4x = 10 – 4·2 = 10 – 8 = 2, luego A(2, 2).

Tenemos que fabricar dos lotes del primer proveedor y otros dos del segundo, para que el coste sea mínimo.