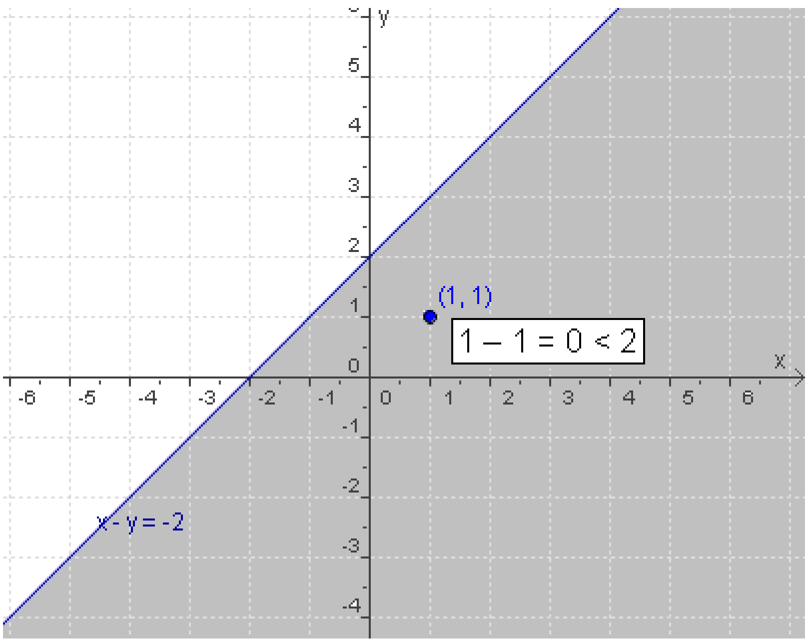
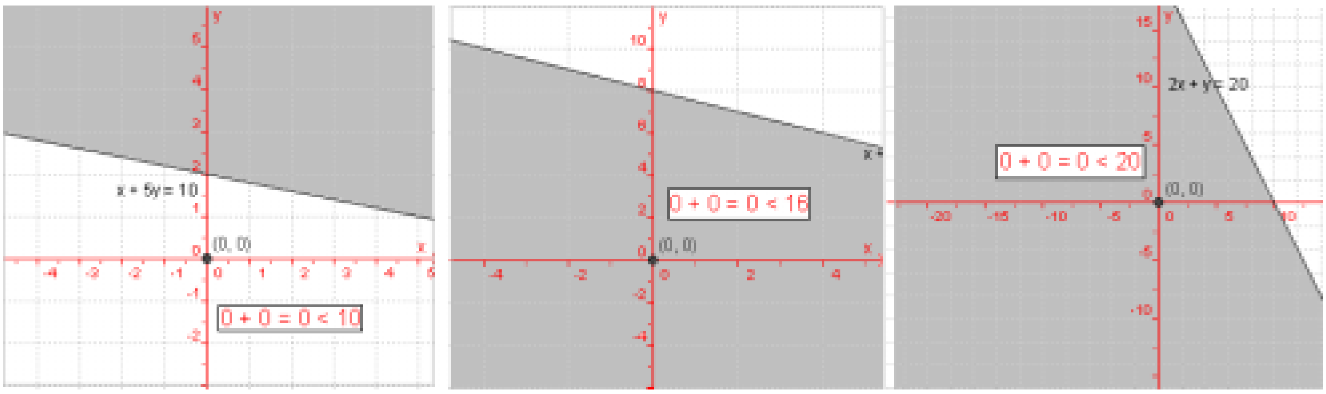
PARA EMPEZAR REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Para representar $y - x \leq 2$, representa la recta $y - x = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.



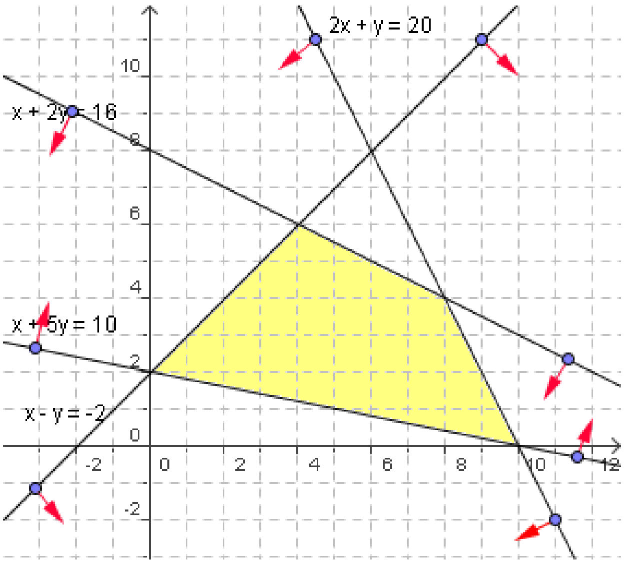
Análogamente, representa:
$x + 5y \geq 10$; $x + 2y \leq 16$; $2x + y \leq 20$.



Problema 2

Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:
$y - x \leq 2$; $x + 5y \geq 10$; $x + 2y \leq 16$; $2x + y \leq 20$

Para hallar los semiplanos validos usamos el origen de coordenadas (0,0)



0 – 0 < 2   0+ 0 < 16

0 + 0 < 10   0 + 0 < 20

Problema 3

Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. Dispone de 500 € y en u furgoneta caben 700 kg. En el mercado hay naranjas de tipo A a 0,5 € y de tipo B a 0,8 €. Él las podrá vender a 0,58 € las de tipo A y a 0,9 € las de tipo B, y se cuestiona cuántos kilogramos de cada tipo debería comprar para conseguir que los beneficios sean lo más altos posible.

a) *Si se gasta todo el dinero en naranjas de tipo B, ¿cuántos kilos le caben aún en su furgoneta?*

b) *Si llena la furgoneta con naranjas de tipo A, ¿cuánto dinero le sobra? ¿Cuál será el beneficio?*

c) *¿Cuál será el beneficio si compra 400 kg de naranjas de tipo A y 300 kg de tipo B?*

a) 500 : 0,8 = 625 kg de naranjas de tipo *B* puede comprar. 700 – 625 = 75 kg le caben aún en su furgoneta.

b) 700 · 0,5 = 350 € se gasta. 500 – 350 = 150 € le sobran. Beneficio = 700 · (0,58 – 0,5) = 56 €

c) 400 · (0,58 – 0,5) + 300(0,9 – 0,8) = 62 € de beneficio.

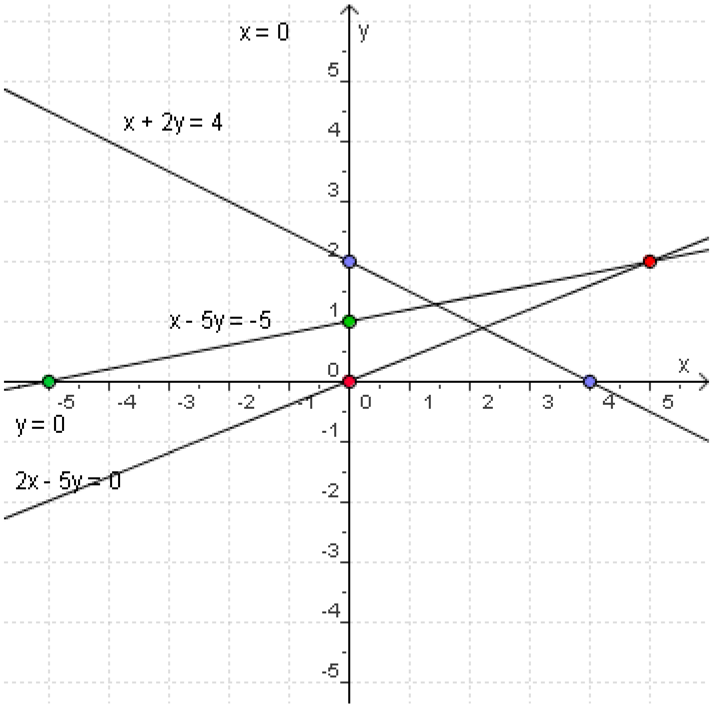
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Minimiza la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

❑ Representamos las rectas asociadas a las restricciones:

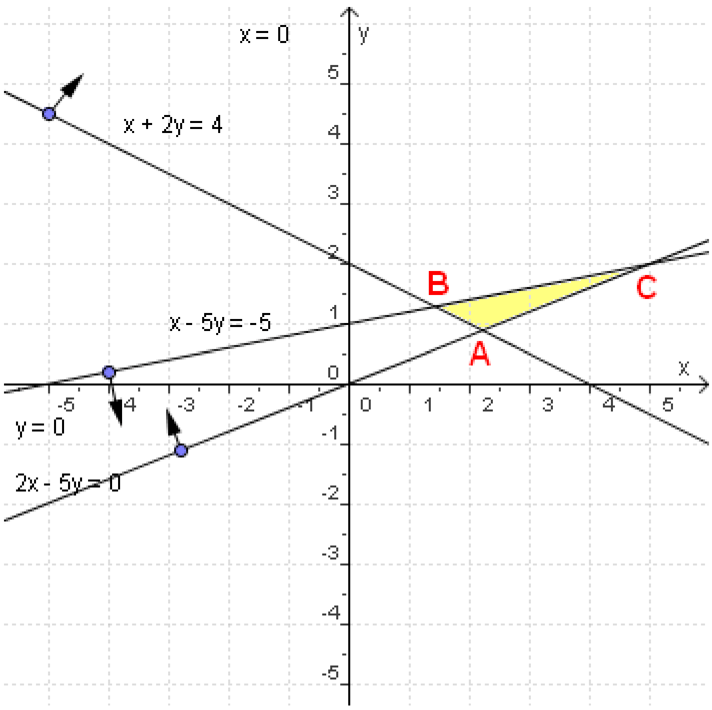


$x + 2y = 4$	
x	y
0	2
4	0

$2x - 5y = 0$	
x	y
0	0
5	2

$-x + 5y = 5$	
x	y
0	1
-5	0

❑ Hallamos la región factible, estableciendo los semiplanos válido de cada restricción, tomando para la comprobación el (1, 0):



Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, estamos en el primer cuadrante.

Como $2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 2 > 0$, el semiplano válido está en por encima de $2x - 5y = 0$, además de los puntos de la recta (también dice =).

Como $1 + 4 \cdot 0 = 1 < 4$, el semiplano válido es el por encima de $x + 2y = 4$, además de los puntos de la recta.

Como $-1 + 5 \cdot 0 = -1 < 5$, el semiplano válido está por debajo de $-x + 5y = 5$, además de los puntos de la recta.

La región factible es el triángulo ABC. Como es acotada el máximo, de existir estará en uno de los vértices. Hallamos las coordenadas de los tres vértices resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas que, al cortarse, lo forman:

$$\begin{cases} A\begin{cases} x+2y=4 \xrightarrow{-2F_1} -2x-4y=-8 \\ 2x-5y=0 \xrightarrow{F_2} 2x-5y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -9y=-8 \Leftrightarrow y=\dfrac{8}{9}; x=4-2y=\dfrac{20}{9} \Rightarrow A\left(\dfrac{20}{9},\dfrac{8}{9}\right) \\ B\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+5y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 7y=9 \Leftrightarrow y=\dfrac{9}{7}; x=4-2y=\dfrac{10}{7} \Rightarrow B\left(\dfrac{10}{7},\dfrac{9}{7}\right) \\ C\begin{cases} -x+5y=5 \\ 2x-5y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} x=5; y=\dfrac{5+x}{5}=2 \Rightarrow C(2,5) \end{cases}$$

❑ Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada vértice:

$$f_A\left(\frac{20}{9},\frac{8}{9}\right)=2\cdot\frac{20}{9}+8\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{9}+\frac{64}{9}=\frac{104}{9}$$

$$f_B\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)=2\cdot\frac{10}{7}+8\cdot\frac{9}{7}=\frac{20}{7}+\frac{72}{7}=\frac{92}{7}$$

$$f_c(2,5)=2\cdot2+5\cdot5=4+25=29$$

y tomamos el valor menor que es 104/9, luego el mínimo se alcanza en el punto A: $x=\dfrac{20}{9}, y=\dfrac{8}{9}$.

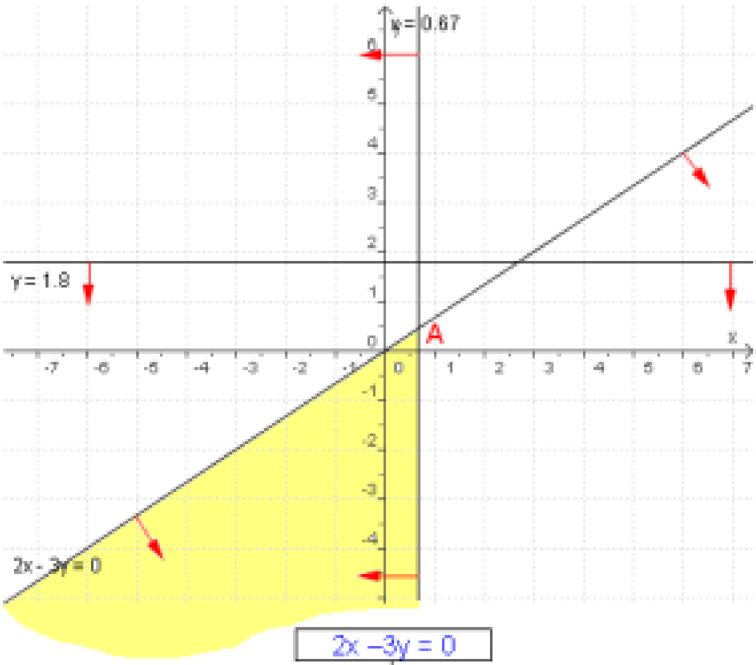
✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

2 Maximiza y minimiza la función p = x + 2y – 3 con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x-3y\ge 0 \\ 5y\le 9 \\ 3x\le 2 \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Hallamos la región factible:

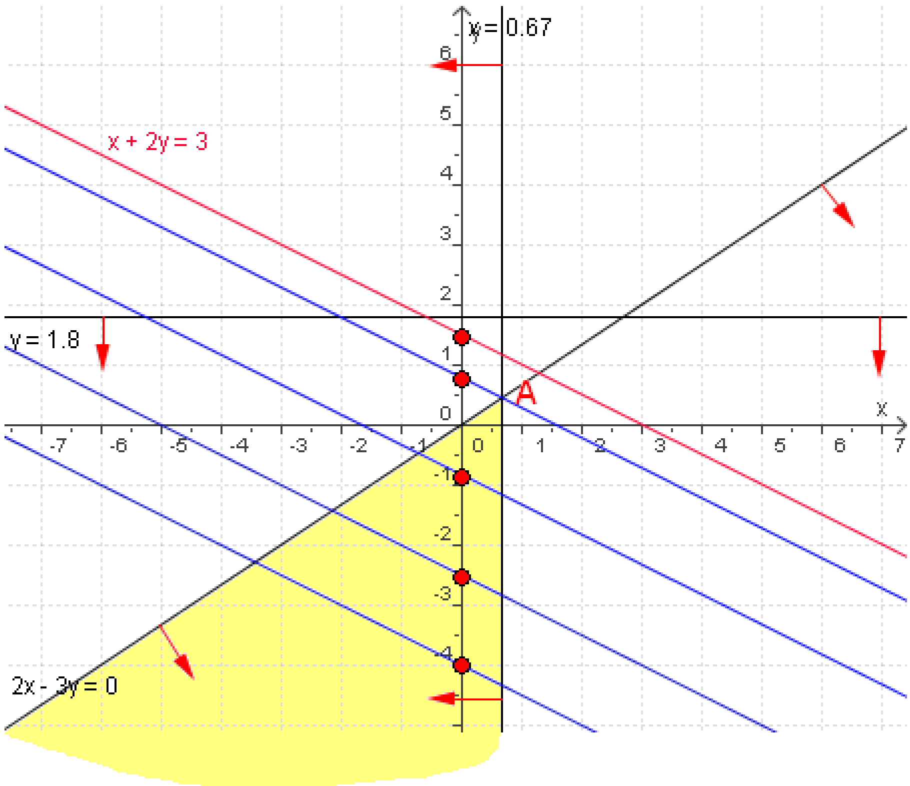


2x – 3y = 0	
x	y
0	0
3	2

Vemos que la restricción 5y ≤ 9 es redundante y la podemos quitar y que la región factible es abierta inferiormente con un vértice superior en A, que es el punto de corte de:

$$\begin{cases} 3x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3} \\ 2x-3y=0 \Rightarrow y=\dfrac{2x}{3}=\dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9}\right)$$

Si dibujamos la recta correspondiente a la función objetivo x + 2y – 3 = 0 y trazamos paralelas a ella que recorran la función objetivo hacia abajo, observamos que su ordenada va disminuyendo, luego **no tiene mínimo,** y el máximo se alcanza en el vértice A:



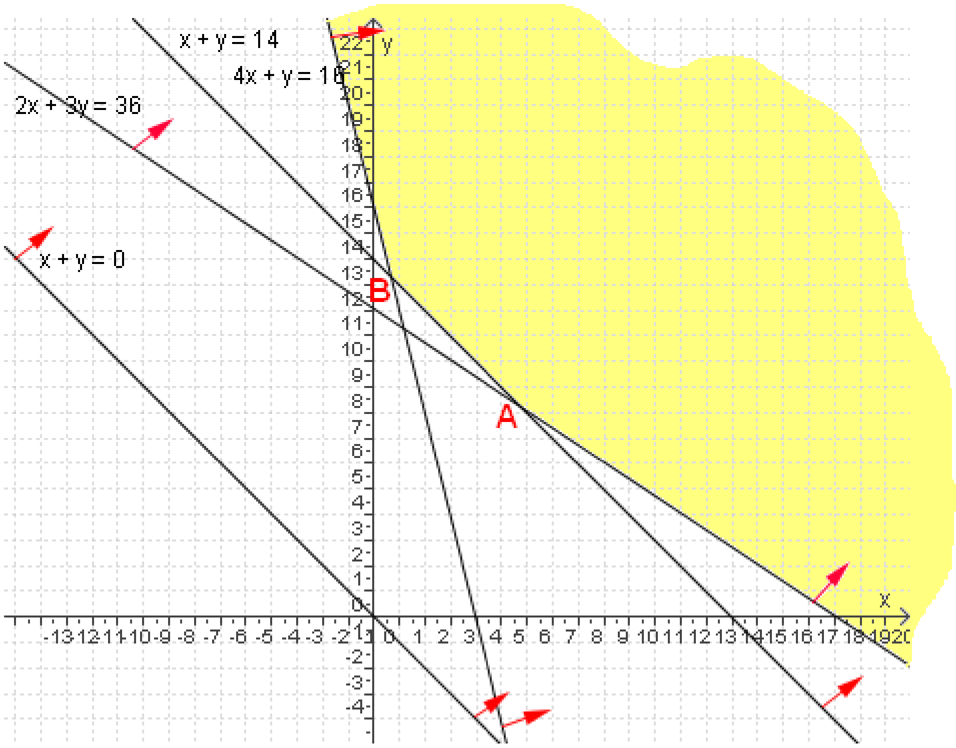
Máximo en $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$ y es $p\left(\frac{2}{3},\frac{4}{9}\right)=\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4}{9}-3=-\frac{13}{9}$.

3 Maximiza la función z = 3x + 4y sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y\geq 36 \\ 2x+2y\geq 28 \Leftrightarrow x+y\geq 14 \\ 8x+2y\geq 32 \Leftrightarrow 4x+y\geq 16 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$$

Representamos las rectas asociadas y hallamos la región factible, teniendo en cuenta que esta :

- En y por encima de 2x + 3y = 36 ya que 2·0 + 3·0 = 0 < 36.
- En y por encima de x + y = 14 ya que 0 + 0 = 0 < 14.
- En y por encima de 4x + y = 16 ya que 4·0 + 0 = 0 < 16.
- En y por encima de x + y = 0 ya que 1 + 1 = 2 > 0.



2x +3y = 36	
x	y
0	12
18	0

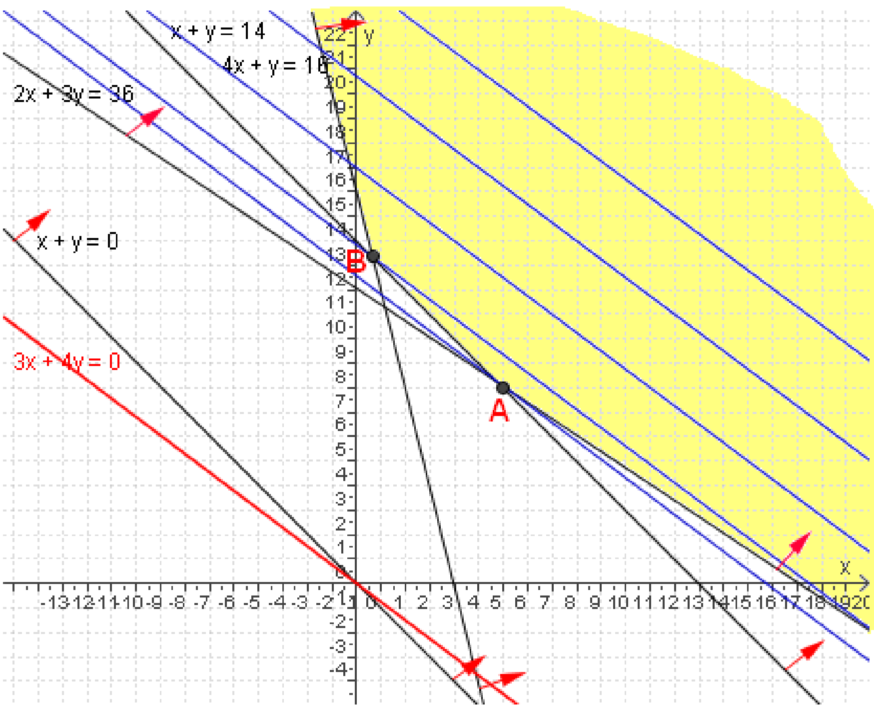
x + y = 14	
x	y
0	14
14	0

4x + y = 16	
x	y
0	16
4	0

x + y = 0	
x	y
0	0
4	-4

La restricción $x + y \geq 0$ no influye y se puede despreciar.

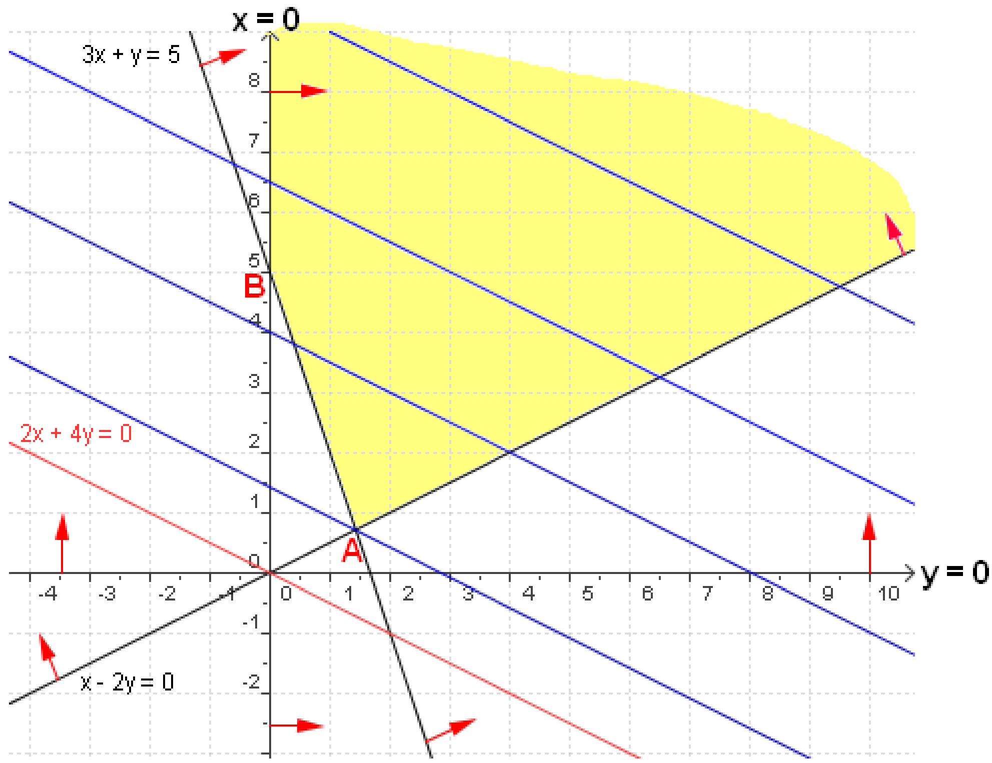
De nuevo la región factible es abierta (superiormente), dibujamos la función objetivo (z) y paralelas a ella recorriendo la región factible y observamos que no hay máximo pues siempre se puede conseguir un valor de z más grande que uno dado:



4 En la región determinada por $3x + y \geq 5$, $x - 2y \leq 0$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, *halla el punto en que la función f(x, y) = 2x + 4y alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?*

Representamos las rectas asociadas y hallamos la región factible, teniendo en cuenta que esta :

- En y por encima de 3x + y = 5 ya que 3·0 + 0 = 0 < 5.
- En y por encima de x - 2y = ya que 1 –2·1 = -1 < 0.
- En y a la derecha de x = 0 ya que x ≥ 0.
- En y por encima de y = 0 ya que y ≥ 0 .



3x + y = 5	
x	y
0	5
1	2

x - 2y = 0	
x	y
0	0
4	2

La región factible está abierta superiormente y al trazar paralelas (en azul) a la función objetivo z (en rojo) se observa que no tiene máximo pues z va creciendo indefinidamente al recorrer la región factible hacia arriba.

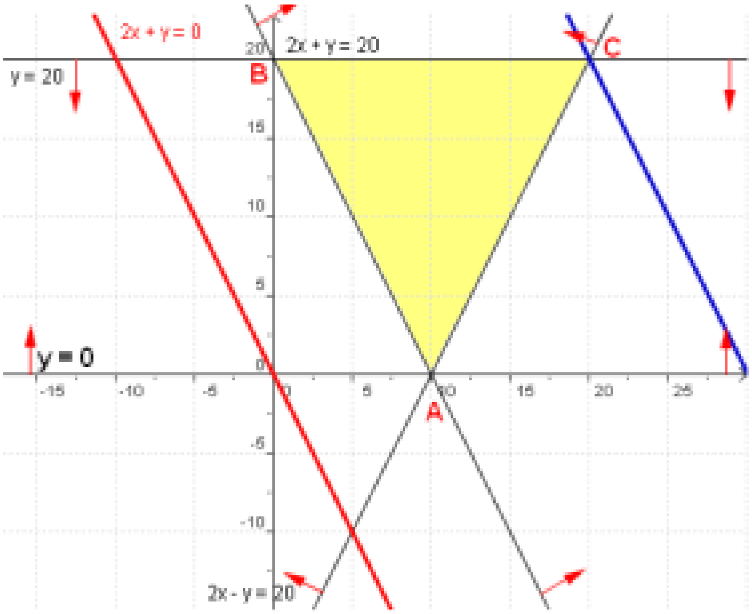
El mínimo esta en A:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \xrightarrow{E_1} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \xrightarrow{2E_2} 6x + 2y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 7x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}; y = 5 - 3x = \frac{5}{7} \Rightarrow A\left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

5 Calcula los puntos del recinto $\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$ **que hacen mínima o máxima la función z = 2x + y. ¿Cuántas soluciones hay?**

Representamos la región factible que está:

- ✧ En y por encima de 2x + y = 20 ya que el (0,0) , que está por debajo, no cumple la restricción, 2·0 + 0 = 0 < 20.
- ✧ En y a la izquierda de 2x - y = 20 ya que el (0,0) , que está a la izquierda, cumple la restricción, 2·0 – 0 = 0 < 20.
- ✧ En y por encima de y =0.
- ✧ En y por debajo de y = 20.



2x + y = 20	
x	y
0	20
10	0

2x - y = 20	
x	y
0	-20
10	0

La región factible es, pues, el triángulo ABC.
Hallamos los tres vértice resolviendo el sistema con las ecuaciones de las rectas que se cortan según esos puntos:

$$A \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow A(10,0)$$

$$B \begin{cases} y = 20 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow B(0,20)$$

$$C \begin{cases} y = 20 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow C(20,20)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los tres vértices:

$Z_A(10, 0) = 2·10 + 0 = 20$
$Z_B(0, 20) = 2·0 + 20 = 20$
$Z_C(20, 20) = 2·20 + 20 = 60$

El mínimo se alcanza en los vértices A y B y por tanto también en los infinitos puntos del segmento $\overline{AB}$, hay infinitos mínimos (los puntos de $\overline{AB}$) como puede apreciarse en el dibujo ya que la recta 2x + y = 20 y la función objetivo z = 2x + y son paralelas (tienen los coeficientes de las incógnitas iguales).

El máximo se alcanza en el punto C(20, 20) y vale z = 60, que también puede verse en el dibujo que es la paralela a z en la región factible más alta.

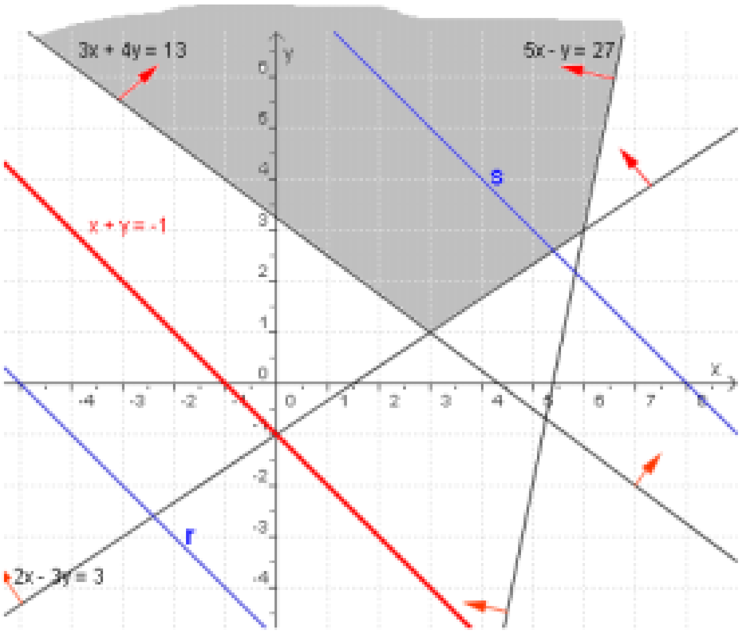
6 ¿Es posible maximizar y minimizar la función z = x + y + 1 sujeta a estas restricciones?

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ 5x - y - 27 \leq 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible que está:

- ✧ En y por encima de 3x + 4y = 13 ya que el (0,0) , que está por debajo, no cumple la restricción, 3·0 + 4·0 = 0 < 13.
- ✧ En y a la izquierda de 5x - y = 27 ya que el (0,0) , que está a la izquierda, cumple la restricción, 5·0 – 0 = 0 < 27.
- ✧ En y por encima de 2x - 3y = 3 ya que el (0,0) , que está por encima, cumple la restricción, 2·0 - 3·0 = 0 < 3.

La región factible es abierta y la función objetivo z = x + y +1 no tiene máximo ni mínimo pues siempre hay rectas paralelas a ella que, pasando por la región factible, dan valores más o menos altos que cualquiera (rectas s y r de color azul).



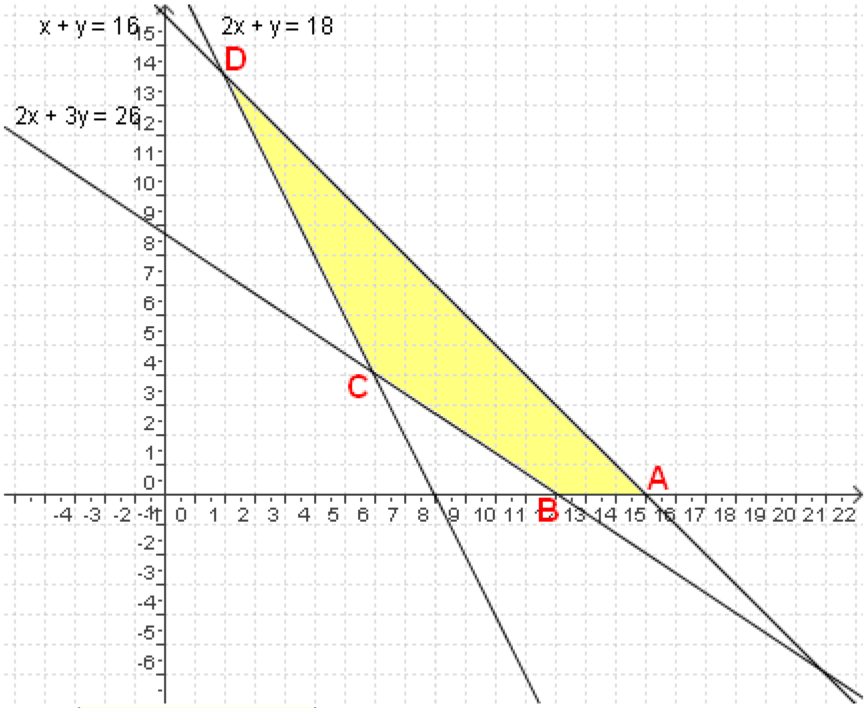
3x + 4y = 13	
x	y
0	13/4
13/3	0

5x - y = 27	
x	y
0	-27
27/5	0

2x - 3y = 3	
x	y
0	-1
3/2	0

7 Las rectas 2x + y = 18, 2x + 3y = 26 y x + y = 16 se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función z = 5x + 3y cuando x e y varían en S.

Representamos las tres rectas, el triángulo T y la región factible S:



2x + y = 18	
x	y
0	18
9	0

2x + 3y = 26	
x	y
0	26/3
13	0

x + y = 16	
x	y
0	16
16	0

Para hallar los óptimos necesitamos las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrilátero:

$$A\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 16 \Rightarrow A(16,0)$$

$$B\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 26 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{26}{3} \Rightarrow B\left(\frac{26}{3},0\right)$$

$$C\begin{cases} 2x + y = 18 \xrightarrow{-E_1} -2x - y = -18 \\ 2x + 3y = 26 \xrightarrow{E_2} \quad 2x + 3y = 26 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 2y = 8 \Leftrightarrow y = 4; x = \frac{18 - y}{2} = 7 \Rightarrow C(7,4)$$

$$D\begin{cases} 2x + y = 18 \xrightarrow{E_1} \quad 2x + y = 18 \\ x + y = 16 \xrightarrow{-E_2} -x - y = -16 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} x = 2; y = 16 - x = 14 \Rightarrow D(2,14)$$

Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cuatro vértices:

$z_A(16, 0) = 5\cdot16 + 3\cdot0 = 80.$
$Z_B(26/3, 0) = 5\cdot(26/3) + 3\cdot0 = 130/3.$
$Z_C(7, 4) = 5\cdot7 + 3\cdot4 = 47.$
$z_A(2, 14) = 5\cdot2 + 3\cdot14 = 52.$

El máximo se alcanza en A(16, 0) y es z = 80.

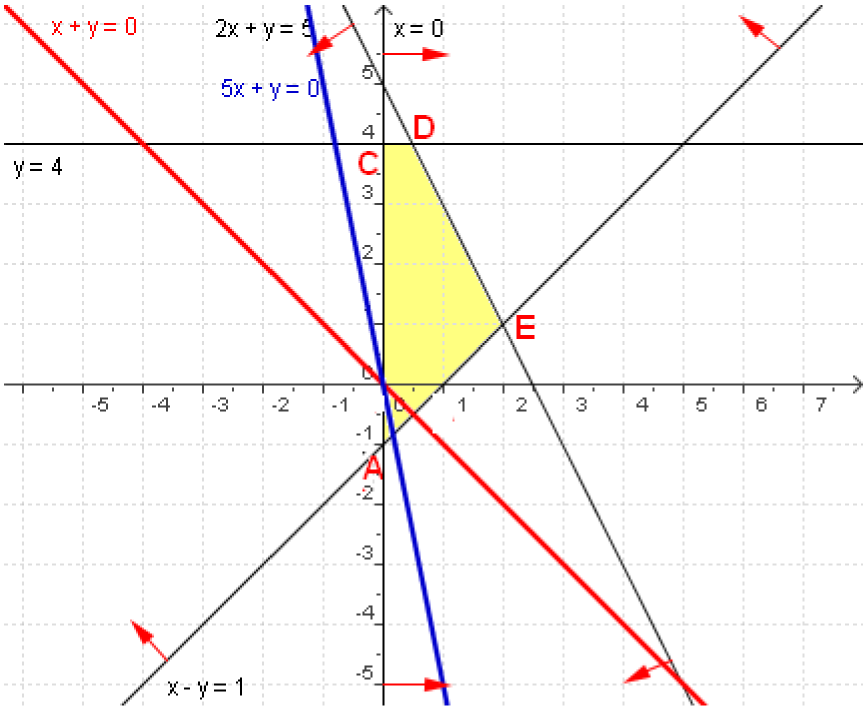
8 Dibuja el recinto que cumple estas restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo F(x, y) = x + y se hace máxima y mínima, respectivamente.

b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función G(x, y) = 5x + y.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Representamos la región factible:



-x + y = - 1	
x	y
0	-1
1	0

2x + y = 5	
x	y
0	5
5/2	0

La recta y = 4 es horizontal y la x = 0 vertical (el eje OY).

Para saber los semiplanos válidos tomamos el (0, 0) que está a la izquierda de 2x+y = 5 y cumple que 2·0 + 0 = 0 < 5, por encima de x – y = 1 y cumple que 0 – 0 = 0 > -1.

Como es una región acotada los óptimos estarán en los vértices (o en algún lado):

$$A\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(0,-1)$$

$$C\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(0,4)$$

$$D\begin{cases} y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5-y}{2} = \frac{5-4}{2} = 2 \Rightarrow D(1/2,4)$$

$$E\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2; y = 1 \Rightarrow E(2,1)$$

Ahora podemos resolver los dos apartados:

a) La función a optimizar es F(x, y) = x + y (en rojo en el dibujo).

$F_A(0, -1) = 0 – 1 = - 1.$
$F_C(0, 4) = 0 + 4 = 4.$
$F_D(1/2, 4) = 1/2 + 4 = 4,5.$
$F_E(2,1) = 2 + 1 = 3.$
El máximo es el punto C(0, 4) y el mínimo el punto A(0, -1).

b) La función a optimizar es G(x, y) = 5x + y (en azul en el dibujo).

$G_A(0, -1) = 5·0 – 1= - 1.$
$G_C(0, 4) = 5·0 + 4 = 4.$
$G_D(1/2, 4) = 5·(1/2) + 4 = 13/2 = 6,5.$
$G_E(2, 1) = 5·2 + 1 = 11.$

Ahora el máximo es el punto E(2, 1) y el mínimo el punto A(0, -1).

****

9 Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente:
a) *El punto del triángulo donde la función f(x, y) = -4x + y + 9 alcanza el máximo.*
b) *El punto del triángulo donde la función f(x, y) = 4x + y + 12 alcanza el máximo.*

****

Como el triángulo forma una región factible cerrada, los óptimos se alcanzarán en alguno de los vértices(o los lados). Hallamos los valores de las funciones en los vértices:

a) f(x, y) = -4x + y + 9
f(0, 0) = -4·0 + 0 + 9 = 9.
f(2, 8) = -4·2 + 8 + 9 = 9.
f(10, 3) = -4·10 + 3 + 9 = -28.

El máximo se alcanza en do vértices consecutivos y, por tanto, en los infinitos puntos intermedios del lado que une esos dos vértices.

b) f(x, y) = 4x + y + 12
f(0, 0) = 4·0 + 0 + 12 = 12.
f(2, 8) = 4·2 + 8 + 12 = 28.
f(10, 3) = 4·10 + 3 + 12 = 55.

El máximo se alcanza para el vértice (10, 3) y es 55.

****

PARA RESOLVER

10 Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que le caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo.
¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

Planteamiento

El planteamiento de los problemas de programación lineal se hace más sencillo y sistemático, en muchas ocasiones, si organizamos los datos e incógnitas en una tabla, a partir de la que escribiremos las restricciones y la función objetivo:

Tipo de impresos	Cantidad	Beneficio
A	x	0,05x
B	y	0,07y
	≤ 150	B(x, y)

⊙ Restricciones:

- Los impresos de tipo A repartidos han de ser cero o un número entero positivo.
- Los impresos de tipo B repartidos han de ser cero o un número entero positivo.
- Los de tipo A repartidos han de ser como **máximo** 120 (no le caben más en la bolsa).
- Los de tipo B repartidos han de ser como **máximo** 100 (no le caben más en la bolsa).
- La suma de los repartido ha ser como máximo 150.

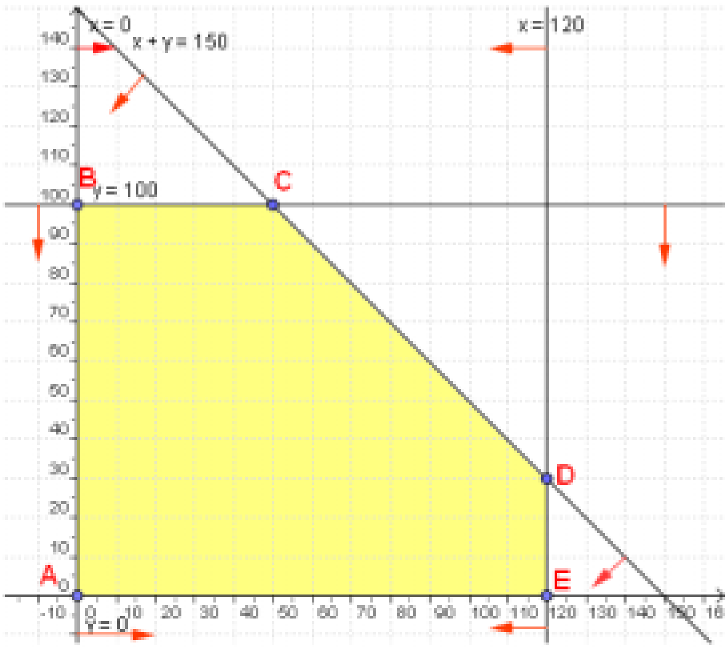
Transformadas en símbolos quedan:

$$\text{Restricciones}\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$$

⊙ Función objetivo: El beneficio = B(x, y) = 0,05x + 0,07y, que ha de hacerse máximo.

Resolución

Una vez planteado el problema procedemos a resolverlo hallando, primero la región factible a partir de las cinco restricciones:



Hemos tenido en cuenta, además de las evidentes, que el punto (0, 0) cumple el semiplano por debajo de x + y = 150, para formar el pentágono del dibujo, en el cual estará la solución buscada.
Como es una región factible acotada, el máximo estará en uno de los vértices (o uno de los lados que unen vértices consecutivos), luego necesitamos saber las coordenadas de los cinco vértices como punto de corte de las rectas que los forman, es decir, como solución del sistema formado por las ecuaciones de las rectas que se cortan en cada punto:

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$B\begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \Rightarrow B(0,100)$$

$$C\begin{cases} y = 100 \\ x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow x = 150 - y = 50 \Rightarrow C(50,100)$$

$$D\begin{cases} x = 120 \\ x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow y = 150 - x = 30 \Rightarrow D(120,30)$$

$$E\begin{cases} x = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(120,0)$$

Ahora hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los cinco vértices y la solución buscada será el máximo:

$B_A(0, 0) = 0,05 \cdot 0 + 0,07 \cdot 0 = 0$ €.
$B_B(0, 100) = 0,05 \cdot 0 + 0,07 \cdot 100 = 7$ €.
$B_C(50, 100) = 0,05 \cdot 50 + 0,07 \cdot 100 = 9,5$ €.
$B_D(120, 30) = 0,05 \cdot 120 + 0,07 \cdot 30 = 8,1$ €.
$B_E(120, 0) = 0,05 \cdot 12 + 0,07 \cdot 0 = 6$ €.

Luego el beneficio máximo lo obtiene si reparte 50 impresos de tipo A y 100 impresos de tipo B, que se corresponde con el vértice C(50, 100), siendo este beneficio 9,5 €.