①① Estudia el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Como hay varios elementos no nulos el rango es ≥ 1.

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ el rango es ≥ 2.

- Aunque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$ el rango es 3, ya que no puede ser mayor que tres al no tener nada mas que 3 filas.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Como hay varios elementos no nulos el rango es ≥ 1.

- Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ el rango es ≥ 2.

- Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$, y $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ el rango es 2, ya que los dos determinantes posibles de orden dos son nulos.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①① Resuelve aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$ Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, luego es C. Determinado

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1;\ y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{1} = -5;\ z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución (x = -1, y = -5, z = 7).

b) $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \\ -x-y+z=-3 \end{cases}$ Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, luego es C. Determinado.

$$x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{11}{-11}=-1;\ y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-22}{-11}=2;\ z=\frac{|M_z|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & -1 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{22}{-11}=-2$$

Solución (x = -1, y = 2, z = -2).

c) $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases}$ Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, luego es C. Determinado.

$$x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3};\ y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3};\ z=\frac{|M_z|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}$$

Solución : (x = -1/3, y = 2/3, z = -1/3).

d) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$ Ran(M) = Ran(M*) = 3 < n = , luego es C. Indeterminado.

Usamos t = λ como parámetro pasándolo al segundo miembro y queda:

$$\begin{cases} x+y-z=1-\lambda \\ x-y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ 2+\lambda & -1 & 0\\ \lambda & 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-3-\lambda}{-2}=\frac{3+\lambda}{2};\ y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & 2+\lambda & 0\\ 0 & \lambda & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1+\lambda}{-2};\ z=\frac{|M_z|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & -1 & 2+\lambda\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-2\lambda}{-2}=\lambda$$

Solución : ($x=\frac{3+\lambda}{2}, y=-\frac{1+\lambda}{2}, z=\lambda, t=\lambda$)

①② Estudia la compatibilidad de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases}$ $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 6 \\ 4 & 1 & | & -1 \\ 5 & 2 & | & -5 \end{pmatrix}$

❁ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ Ran(M) = 2.

❁ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ Ran(M*) = 2.

Como Ran(M) = Ran(M*) = n = 2, el sistema es *compatible* y *determinado*.

b) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -1 & -3 & | & -3 \\ 1 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$

❁ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ Ran(M) = 2.

❁ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ Ran(M*) = 3

Si Ran(M) = 2 < Ran(M*) = 3, el sistema es *incompatible*.

❊❊❊❁❁✪❁❁❊❊❊

①③ Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1 \neq 0 \text{, luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 6 = 2 \neq 0 \text{, luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$B^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(B^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$B^{-1} = \frac{\left(B^{Adj}\right)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

14 Prueba, sin desarrollar, que estos determinantes son cero:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$ pues $C_3 = -5C_1$, hay dos columnas proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2+F_3} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ya que $F_1 = 5F_3$.

15 Prueba, sin desarrollarlos, que el determinante a) es múltiplo de 3 y que el b) es múltiplo de 5:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 7 & 1 \\ 15 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \dot{3}$.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2+F_3} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \dot{5}$.

16 ¿Para qué valores de a se anula este determinante?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3+F_1} \\ \xrightarrow{F_4+F_1} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(8(a+1)-30+6) = 0 \Rightarrow a = 2$$

17 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ como es de 3x3 hallamos si el determinante depende de a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 \text{ Si } a - 2 = 0,\ a = 2.$$

- Si a = 2 como |A| = 0 y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, Ran (A) = 2.
- Si a $\neq$ 2 como |A| $\neq$ 0, Ran(A) = 3.

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ como es de 3x3 hallamos si el determinante depende de a:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} = \begin{cases} -8 \\ 1 \end{cases}$$

- Si a = 1, |B| = 0 y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, Ran(B) = 2.
- Si a = -8, |B| = 0 y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, Ran(B) = 2.
- Si a $\neq$ 1 $\wedge$ a $\neq$ - 8, |B| $\neq$ 0, Ran(B) = 3.

18 Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 24 - 2 - 3 - 4 - 12 = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15 \neq 0$$

luego Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3, sistema compatible e indeterminado.

Como el determinante de orden 2 que hace el rango 2 esta formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas, pasamos z = λ como parámetro y tomamos las dos primeras ecuaciones para resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ 12x-3y=2\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-5\lambda}{-15}=\frac{\lambda}{3}; y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 12 & 2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-10\lambda}{-15}=\frac{2\lambda}{3}$$

La solución es : $\left(x=\frac{\lambda}{3}, y=\frac{2\lambda}{3}, z=\lambda\right)$

b) $\begin{cases} 9x+3y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-36+6+24+16-9-36=-35\neq 0$ luego Ran(M) = Ran(M*) = 3 = n y el sistema sólo tiene la solución trivial, (x = 0, y = 0, z = 0).

****

19 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \\ 3x+2y+t=0 \end{cases}$ $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$ como $F_3 = F_1 + F_2$ podemos suprimir la tercera fila. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 4, sistema compatible e indeterminado, tenemos que dejar dos ecuaciones (las dos primeras) y dos incógnitas, tomamos como parámetros z = λ y t = μ:

$$\begin{cases} x+y=\mu-\lambda \\ 2x+y=\lambda-2\mu \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} \mu-\lambda & 1 \\ \lambda-2\mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3\mu-2\lambda}{-1}=-3\mu+2\lambda, y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu-\lambda \\ 2 & \lambda-2\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-4\mu+3\lambda}{-1}=4\mu-3\lambda$$

La solución es : (x = -3μ + 2λ, y = 4μ - 3λ, z = λ, t = μ).

b) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ x+t=0 \\ y+z+t=0 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \\ \xrightarrow{F_4-F_3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$ luego Ran(M) = Ran(M*) = n = 4, luego el sistema sólo tiene la solución trivial (x = 0, y = 0, z = 0, t = 0).

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

20 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=1 \\ ax+y=3 \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 5 \\ 1 & 2 & | & 1 \\ a & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12+5+3a-10a-2-9 = -7a+6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7}.$$

Si a = 6/7, como |M*| = 0 y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, Ran(M) = Ran(M*) = n = 2, sistema compatible y determinado.

Si a $\neq$ 6/7, Ran(M) = 2 < Ran(M*) = 3, sistema incompatible.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

21 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M \cdot X = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego $M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot A$, $X = M^{-1} \cdot A$. Tenemos que hallar la inversa de M:

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+2 = 1 \neq 0$$, luego admite inversa.

Matriz de los adjuntos

$$M^{Adj} = \begin{pmatrix} |-1| & -|2| \\ -|-1| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$(M^{Adj})^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$M^{-1} = \frac{(M^{Adj})^t}{M} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = M^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{cases} x+3y-z=-1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $M\cdot X = A$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

luego $M^{-1}\cdot MX = M^{-1}\cdot A$, $X = M^{-1}\cdot A$, luego necesitamos hallar la inversa de M:

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-1-6-2+1-9 = -20 \neq 0 \text{, luego admite inversa}$$

- Matriz de los adjuntos

$$M^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(M^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

- Inversa

$$M^{-1} = \frac{\left(M^{Adj}\right)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}}{-20} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = M^{-1}\cdot A = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

②② Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Estudiamos los rangos de M y M*:

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, Ran(M) = 2.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_3 = F_1 + F_2$, Ran(M*) = 2.

Si Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3, el sistema es compatible e indeterminado (uniparamétrico). Lo resolvemos usando las dos primeras ecuaciones y tomando z = λ y pasándolo al segundo miembro, tenemos:

$$\begin{cases} x - y = 2 + 2\lambda \\ 2x + y = 1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 2+2\lambda & -1 \\ 1-3\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-\lambda}{3}; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+2\lambda \\ 2 & 1-3\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-7\lambda}{3}$$

$$\left(x = \frac{3-\lambda}{3}, y = \frac{-3-7\lambda}{3}, z = \lambda \right)$$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Estudiamos los rangos de M y M*:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$ Ran(M) = 3.

Como $|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{2F_3+F_1} \\ \xrightarrow{F_4} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, Ran(M*) = 3.

Si Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, el sistema es compatible y determinado, lo resolvemos usando la regla de Cramer, utilizando las tres primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{15}{5}=3;\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-10}{5}=-2$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{5}{5}=1,$$ Solución (x = 3, y = -2, z = 1).

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

②③ Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & m \\ 1 & -1 & m & | & 2 \end{pmatrix}$ obtenemos los valores para la discusión a partir de $|M|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}=m^2-1+1-1+m-m=m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm 1$

✪ Si m = 1, $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$ Ran(M) = 2 ($F_1 = F_2$) y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, pero Ran(M*) = 3 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0$, luego el sistema es *incompatible*.

✪ Si m = -1, $M^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$ Ran(M) = 2 ($C_2 = C_3$) y $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, pero Ran(M*) = 3 ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-8\neq 0$, luego el sistema es *incompatible*.

✪ Si m ≠ 1 y m ≠ -1, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, luego el sistema es *compatible* y *determinado.*

b) $\begin{cases} x+y+z=m-1 \\ 2x+y+mz=m \\ x+my+z=1 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & m-1 \\ 2 & 1 & m & | & m \\ 1 & m & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos los valores para la discusión a partir de

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=1+2m+m-1-2-m^2=-m^2+3m-2=0 \Rightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

❂ Si m = 1, $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$ Ran(M) = 2 ($F_1 = F_3$) y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, pero Ran(M*) = 3 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, luego el sistema es *incompatible*.

❂ Si m = 2, $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ Ran(M) = 2 ($C_1 = C_3$) y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, y Ran(M*) = 2 ya que $C_1 = C_3 = C_4$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, luego el sistema es *compatible* e *indeterminado* (Ran(M) = Ran(M*)= 2 < n = 3 .

❂ Si m ≠ 1 y m ≠ 2, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, luego el sistema es *compatible* y *determinado.*

c) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & m & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4m+9+4-6m-3-8=-2m+2=0 \Rightarrow m=1$$

❂ Si **m = 1** $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$, Ran(M) = 2 ($F_3 = F_1 + F_2$) y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, pero Ran(M*) = 3 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$. El sistema es *incompatible*.

❂ Si **m ≠ 1**, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 y el sistema es *compatible* y *determinado*.

d) $\begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ m & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1+m^2-3m-1-m = m^2-4m+3=0 \Rightarrow m = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

❂ Si m = 1, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$, como $F_1 = F_3$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3 y el sistema es *compatible* e *indeterminado* (uniparamétrico).

❂ Si m = 3, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 3 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$ las filas 1 y 2 tienen los mismos coeficientes pero distintos términos independientes, el sistema es *incompatible*.

❂ Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, sistema *compatible* y *determinado*.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

24 Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a

En los sistemas homogéneos Ran(M) = Ran(M*) ya que los términos independientes son nulos.

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 3x-4y-az=0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{vmatrix} = -4a-4+9-6-24-a = -5a-25 = 0 \Rightarrow a = -5$$

❂ Si a = -5, como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3 y el sistema es compatible e indeterminado.

❂ Si $a \neq -5$, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 y la solución es la trivial (x = y = z = 0).

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2z=0 \\ 2x-y+az=0 \end{cases} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix}=-a+4+2-a^2=-a^2-a+6=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\frac{1\pm 5}{-2}=\begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

✪ Si a = -3, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=3\neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3 y el sistema es compatible e indeterminado.

✪ Si a = 2, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3 y el sistema es compatible e indeterminado.

✪ Si a $\neq$ 2 y a $\neq$ -3, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 y la solución es la trivial (x = y = z = 0).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉕ a) Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

a) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=11\neq 0$ el rango es 2.

$A^t\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=10+2+2-1-5-8=0$ y $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ el rango es 2.

b) $\begin{cases} 5x+2y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ como Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3, el sistema es compatible e indeterminado, nos sobra una ecuación (la tercera ya que las dos primeras hacen el rango 2) y una incógnita debe pasar al otro miembro como parámetro, z = λ:

$\begin{cases} 5x+2y=-\lambda \\ 2x+y=-\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-\lambda+2\lambda}{1} = \lambda; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -\lambda \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-5\lambda+2\lambda}{1} = 3\lambda$, la solución (x = λ, y = 3λ, z = λ)

c) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$ como Ran(M) = Ran(M*) = n = 2, la solución es la trivial (x = 0, y = 0).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

26 Dadas A = $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla A^{-1} y B^{-1}.

b) Halla la matriz inversa de A·B.

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{, luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Inversa

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\2&6&5\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1/2\\1&3&5/2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&-2&1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix}0&2&0\\1&-2&1\\2&0&1\end{vmatrix}=4-2=2\neq 0\text{, luego admite inversa}$$

- Matriz de los adjuntos

$$B^{Adj}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&0\\-2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&-2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&4\\-2&0&4\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(B^{Adj}\right)^t=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&0&0\\4&4&-2\end{pmatrix}$$

- Inversa

$$B^{-1}=\frac{\left(B^{Adj}\right)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&0&0\\4&4&-2\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1/2&0&0\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-2&0\\0&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&0\\1&-2&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8&2\\-2&6&-2\\2&-4&2\end{pmatrix}$ y ahora la inversa:

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix}3&-8&2\\-2&6&-2\\2&-4&2\end{vmatrix}=36+16+32-24-24-32=4\neq 0\text{, luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$(A\cdot B)^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A\cdot B^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$(A\cdot B)^{-1} = \frac{\left(A\cdot B^{Adj}\right)^t}{|A\cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) $B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = (A\cdot B)^{-1}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

27 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $B - I = A^t A^{-1}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hallamos A^{-1}:

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 1 = 4 \neq 0 \text{ luego admite inversa}$$

Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora :

$$A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $B = A^t \cdot A^{-1} + I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/4 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

28 Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso a = 4:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases} \Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = -a^2 + a^2 + a(a-1) = a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \end{cases}$$

Si a = 0, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ |M| = 0 y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ luego Ran(M) = 2 y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$, Ran(M*) = 2 < n = 3, el sistema es *compatible* e *indeterminado.*

Lo resolvemos tomando las dos primeras ecuaciones $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (x = 1, y = 1, z = λ).

Si a = 1 $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$ Ran(M) = 2 ya que |M| = 0 y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y Ran(M*) = 3

ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 3 + 2 = 1 \neq 0$ luego el sistema es *incompatible*.

Si a ≠ 0 y a ≠ 1, Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, el sistema es *compatible* y *determinado*.

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{-2a^3 + a^3 + (2a+1)a(a-1)}{a(a-1)} = \frac{a(a^2-a-1)}{a(a-1)} = \frac{a^2-a-1}{a-1}$$

$$y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a-1}$$

$$z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{a}{a(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

Si a = 4, estamos en el tercer caso (es distinto de 0 y de 1) luego las soluciones son:

$$x = \frac{4^2-4-1}{4-1} = \frac{11}{3}; y = -\frac{1}{4-1} = -\frac{1}{3}; z = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

29

a) Halla los valores de x para que los que A tiene inversa,

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para x = 2.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Para que una matriz cuadrada tenga inversa su determinante no ha de ser nulo:

$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 3x - 3x = x$, luego la matriz A es inversible o regular si $x \neq 0$.

b) Para x = 2, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+6-6 = 2 \neq 0$ luego existe A^{-1}. La calculamos:

Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica AB + CX = D.

AB + CX = D, CX = D – AB, $C^{-1}\cdot CX = C^{-1}(D - AB)$, $X = C^{-1}(D - AB)$, luego necesitamos la inversa de C:

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \text{, luego admite inversa.}$$

- Matriz de los adjuntos

$$C^{Adj} = \begin{pmatrix} |4| & -|3| \\ -|2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(C^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa

$$C^{-1} = \frac{\left(C^{Adj}\right)^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ya podemos calcular la matriz X:

$$X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③① Halla X tal que 3AX = B, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Si 3AX = B; $AX = \frac{1}{3}B \Leftrightarrow A^{-1}AX = \frac{1}{3}A^{-1}B \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}B$ luego necesitamos la inversa de A:

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$, luego admite inversa

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar X:

$$X = \frac{1}{3}A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③② Resuelve la ecuación A X B = C siendo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ luego necesitamos las inversas de A y B:

- Primero hallamos el determinante de la matriz A para saber si es regular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0 \text{, luego admite inversa.}$$

- Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} |3| & -|4| \\ -|2| & |3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Primero hallamos el determinante de la matriz B para saber si es regular:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \text{, luego admite inversa.}$$

- Matriz de los adjuntos

$$B^{Adj} = \begin{pmatrix} |2| & -|1| \\ -|3| & |2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(B^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Inversa

$$B^{-1} = \frac{\left(B^{Adj}\right)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar X:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33 Dada A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que AXA = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B$.

AXA = B $\Leftrightarrow A^{-1}\cdot X\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$, necesitamos la inversa de A, que la hemos hallado en el ejercicio anterior pero allí la llamábamos B, luego:

$$X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

34 Determina si las siguientes ecuaciones tiene solución y hállala si es posible:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tenemos la ecuación AX = B; $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, $X = A^{-1}\cdot B$, en donde necesitamos hallar A^{-1}:

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 2 - 9 = 0$, luego no admite inversa, es singular y la ecuación no tiene solución.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ tenemos la ecuación AX = B; $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, $X = A^{-1}\cdot B$, en donde necesitamos hallar A^{-1}:

- Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0$$, luego admite inversa

- Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-6&2&4\\-3&-3&2\end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-6&2&4\\-3&-3&2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-6&2&4\\-3&-3&2\end{pmatrix}$$

Luego:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-6&2&4\\-3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&2\\3&0&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3/4&5/4\\1&1/2&1/2\\-1&1/4&3/4\end{pmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③⑤ Resuelve la ecuación: $\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Si hacemos $A=\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$, tenemos la ecuación matricial AX + B = C; AX = B- C, $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(B-C)$, es decir $X=A^{-1}\cdot(B-C)$, necesitamos A^{-1}:

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{vmatrix}=2+5+5+4=16\neq 0\text{, luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&5\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&5\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&5\\1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&5\\1&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\5&7&-2\\-5&9&2\end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t=\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}}{16}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar X:

$X = A^{-1}\cdot(B-C) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ luego x = 1, y = -1, z = 1.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

36 Resuelve la ecuación: $X\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Si hacemos $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ la ecuación matricial es XA – B = C; XA = C + B; $X\cdot A\cdot A^{-1}$ = (C+ B)· A^{-1}; X = (C+ B)· A^{-1}, necesitamos pues la inversa de A:

❁ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{vmatrix}=36+12+24-32-12-27=1\neq 0$$, luego existe la inversa

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4&6\\2&9\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&6\\4&9\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&4\\4&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\2&9\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\4&9\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\4&6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-3&-10\\-5&1&-2\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar X:

$$X = (C+B)\cdot A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

37 ¿Existe algún valor de a para el cual este sistema tenga infinitas soluciones?

$$\begin{cases} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6a-6+10+3a+15+8 = 9a+27 = 0 \Rightarrow a=-3$$

◈ Si a = - 3 $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ y, como $F_1 = F_2 + F_3$ en M pero no en M* el sistema es incompatible (Ran(M) = 2 < Ran(M*) = 3).

◈ Si a ≠ -3 Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 y el sistema es compatible y determinado.

Luego no existe ningún valor de a que haga que el sistema tenga infinitas soluciones.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

38 Prueba, sin desarrollar el determinante, que: $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que } F_3 = 2F_2.$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

39 Calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_2 = F_1 + F_3$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ya que al ser triangular superior, su valor es el producto de la diagonal principal = 1 ·1·1·1 = 1.

40 Obtén en función de a, b, c el valor de:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1-F_3} \\ \xrightarrow{F_2-F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & c \end{vmatrix} = abc$$

41 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2}$.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \\ \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \end{matrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \\ \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} - \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$.

42 Calcula los valores de a para los cuales el rango de A es menor que 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ ¿Puede ser ran (A) = 1 para algún valor de a?

◈ Para que Ran(A) < 3 |A| = 0, es decir $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ luego si a = 1 ó a = 3, Ran(A) < 3

Como $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -a \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ independientemente del valor de a, el Ran(A) será como mínimo 2 y no puede ser 1.

CUESTIONES TEÓRICAS

43 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?

❁❁✪❁❁

Al ser homogéneo Ran(M) = Ran(M*) = 3 = n, luego la única solución posible es la trivial (0,0,0).

❁❁✪❁❁

44 En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0.

a) ¿Puede ser compatible?
b) ¿Puede tener solución única?
c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

❁❁✪❁❁

a) Sí, puede ser compatible e indeterminado, si Ran(M) = Ran(M*) < n.

b) No, ya que los rangos son menores que el número de incógnitas, no puede ser determinado sino indeterminado.

c) Sí siempre que sea determinado, la regla de Cramer se puede aplicar a cualquier sistema compatible sea determinado o indeterminado.

❁❁✪❁❁

45 ¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?

❁❁✪❁❁

Una matriz cuadrada M tiene inversa si |M| ≠ 0.

❁❁✪❁❁

④⑥ Sean A y B inversas una de otra. Si |A| = 4, ¿cuánto vale IBI ?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Si A y B son inversas tiene que cumplirse A ·B = I, es decir |A·B| = |A|·|B| = |I| =1 ya quel determinante de un producto es el producto de los determinantes y el determinante de la matriz unidad es 1.

Si |A|·|B| = 1 $\Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑦ El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1.¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Como añadimos una columna de tres elementos, el Ran(M*) podrá ser 2, sólo puede haber una línea más que sea linealmente independiente.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⑧ ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ como el determinante es no nulo para cualquier valor de a, no existe ningún valor de a para el cual la matriz dada no tenga inversa.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

PARA PROFUNDIZAR

④⑨

a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

= -6 - 2a – 2 + 3a – 2 – 4 = a – 14 = 0 ; a = 14.

Si a = 14, como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y $|M^*| = 0$ Ran(M) = Ran(M*) = n = 3, el S.C.D.

Si a $\neq$ 14, Ran(M) = 3 < Ran(M*) = 4, sistema incompatible.

b) No puede ser compatible indeterminado, ver los dos casos del apartado anterior.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

50 Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado: $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4-F_1} \end{matrix}$$

$$(3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3+3x)(3-x)^3 .$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

51 Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros que contienen:

a) $\begin{cases} x - 3y + z = a \\ x - z = b \\ x + z = c \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -1 & | & b \\ 1 & 0 & 1 & | & c \end{pmatrix}$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6 \neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = 3 = n, sistema compatible y determinado para cualquier valor de a, b y c (si a a = b = c = 0, el sistema sería homogéneo y la solución la trivial).

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases} \Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a + 2 + 8 - 12 + 2 + 2a = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Si a = 0 $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \Rightarrow b = -4$

Luego pueden darse los casos :

$$\begin{cases} a = 0 \begin{cases} b = -4 \Rightarrow \text{Ran}(M) = \text{Ran}(M^*) = 2 < n = 3 \rightarrow \text{S.C.I.} \\ b \neq -4 \Rightarrow \text{Ran}(M) = 2 < \text{Ran}(M^*) = 3 \rightarrow \text{S.I.} \end{cases} \\ a \neq 0 \Rightarrow \text{Ran}(M) = \text{Ra}(M^*) = 3 = n \rightarrow \text{S.C.D.} \ (\forall b). \end{cases}$$