## PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

### Determinantes de orden 2

⊙ *Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:*

**a)** $\begin{cases} 2x+3y=29 \\ 3x-y=5 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{E_1} \\ \xrightarrow{3E_2} \end{matrix} \begin{cases} 2x+3y=29 \\ 9x-3y=15 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 11x=44 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=3x-5=7$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-9=-11\neq 0$$

**b)** $\begin{cases} 5x-3y=8 \\ -10x+6y=-16 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{2E_1} \\ \xrightarrow{E_2} \end{matrix} \begin{cases} 10x-6y=16 \\ -10x+6y=-16 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 0=0, \text{S.C.I.}, x=\lambda, y=\dfrac{5\lambda-8}{3}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 30-30=0$$

**c)** $\begin{cases} 4x+y=17 \\ 5x+2y=19 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{-2E_1} \\ \xrightarrow{E_2} \end{matrix} \begin{cases} -8x-2y=-34 \\ 5x+2y=19 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -3x=-15 \Leftrightarrow x=5;\ y=17-4x=-3.$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 20-5=15\neq 0$$

**d)** $\begin{cases} 9x-6y=7 \\ -6x+4y=11 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{2E_1} \\ \xrightarrow{3E_2} \end{matrix} \begin{cases} 18x-12y=14 \\ -18x+12y=33 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 0=47 \Rightarrow \text{S.I.}$

$$\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 36-36=0$$

**e)** $\begin{cases} 18x+24y=6 \\ 15x+20y=5 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{-5E_1} \\ \xrightarrow{6E_2} \end{matrix} \begin{cases} -90x-120y=-30 \\ 90x+120y=30 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 0=0, \text{S.C.I. Si } y=\lambda, x=\dfrac{1-4\lambda}{3}$

$$\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 360-360=0$$

**f)** $\begin{cases} 3x+11y=128 \\ 8x-7y=46 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{7E_1} \\ \xrightarrow{11E_2} \end{matrix} \begin{cases} 21x+77y=896 \\ 88x-77y=506 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 109x=1402 \Leftrightarrow x=\dfrac{1402}{109}, y=\dfrac{886}{11}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -21-88=-109\neq 0$$

### Resolución de sistemas 2 x 2 mediante determinantes

⊙ *Resuelve, aplicando* $x=\dfrac{|A_x|}{|A|}$ *e* $y=\dfrac{|A_y|}{|A|}$, *los siguientes sistemas de ecuaciones:*

**a)** $\begin{cases} 3x-5y=73 \\ 4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{146+10}{6+20}=\dfrac{156}{26}=6 \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{6-292}{6+20}=\dfrac{-286}{26}=-11 \end{cases}$.

**b)** $\begin{cases} 5x+4y=33 \\ 7x-11y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix}}=\dfrac{-363-52}{-55-28}=\dfrac{-415}{-83}=\dfrac{415}{83} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix}}=\dfrac{65-231}{-55-28}=\dfrac{-166}{-83}=\dfrac{166}{83} \end{cases}$.

**c)** $\begin{cases} 6x+2y=8 \\ -5x+9y=-60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}}=\dfrac{72+120}{54+10}=\dfrac{192}{64}=3 \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}}=\dfrac{-360+40}{54+10}=\dfrac{-320}{64}=-5 \end{cases}$.

**d)** $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 6x-2y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-2-28}{-4-6}=\dfrac{-30}{-10}=3 \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 28 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{56-6}{-4-6}=\dfrac{50}{-10}=-5 \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 77 )

① Calcula el valor de estos determinantes :

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 4 = 17$. **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} = 33 - 33 = 0$.

**c)** $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$. **d)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Calcula :

$$a) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} b) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} c) \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} d) \begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$. **b)** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a^2b^3 - a^3b^2 = a^2b^2(b-a)$.

**c)** $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$. **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix} = abc - abc = 0$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página ❼❽ )

① Calcula los siguientes determinantes :

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} b) \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5{\cdot}3{\cdot}8 + 6{\cdot}0{\cdot}4 + 1{\cdot}6{\cdot}9 - 4{\cdot}3{\cdot}9 - 5{\cdot}6{\cdot}6 - 0{\cdot}1{\cdot}8 = 120 + 54 - 108 - 180 = -144$.

**b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9{\cdot}1{\cdot}1 + 2{\cdot}(-1){\cdot}3 + 0{\cdot}0{\cdot}0 - 0{\cdot}1{\cdot}3 - 0{\cdot}2{\cdot}9 - 0{\cdot}(-1){\cdot}1 = 9 - 6 = 3$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Halla el valor de estos determinantes :

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} b) \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0{\cdot}2{\cdot}1 + 1{\cdot}0{\cdot}(-1) + 4{\cdot}1{\cdot}3 - 3{\cdot}2{\cdot}(-1) - 0{\cdot}0{\cdot}1 - 1{\cdot}1{\cdot}4 = 12 + 6 - 4 = 14.$

**b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10{\cdot}10{\cdot}10 + 0{\cdot}0{\cdot}59 + 47{\cdot}91{\cdot}0 - 0{\cdot}10{\cdot}59 - 0{\cdot}91{\cdot}10 - 0{\cdot}47{\cdot}10 = 1000$

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 80 )

**3** Justifica sin desarrollar, estas igualdades :

$$a)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad b)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0 \quad d)\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**a)** Una de las filas es nula, luego el determinante es nulo (propiedad 2).

**b)** $F_3 = -2F_1$, dos filas proporcionales, determinante nulo ( P6).

**c)** $F_3 = 10F_2 + F_1$, dos filas proporcionales, luego determinante nulo (P6).

**d)** $F_1 = 10F_2 + F_3$, dos filas proporcionales, luego determinante nulo (P6).

**4** Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula sin desarrollar :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

**a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}1 = 3.$

**b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}F_1} \\ \xrightarrow{5F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \frac{1}{5}{\cdot}5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}1 = 1.$

**c)**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 2{\cdot}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1$$

= 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 83 )

① Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz :

$$M=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 2 & 7\\ 5 & -1 & 2 & 6\\ 4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-7-10=-17 \quad \begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0.$

Menores de orden 3:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ 6 & 2 & 7\\ -1 & 2 & 6\end{vmatrix}=3{\cdot}2{\cdot}6+6{\cdot}2{\cdot}5+7{\cdot}(-1){\cdot}(-1)-(-1){\cdot}2{\cdot}5-2{\cdot}3{\cdot}7-6{\cdot}6{\cdot}(-1)=107.\\ \begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=-1{\cdot}1{\cdot}4+1{\cdot}3{\cdot}6+2{\cdot}5{\cdot}0-1{\cdot}6{\cdot}0-1{\cdot}2{\cdot}4-3{\cdot}5{\cdot}(-1)=21.\end{cases}$$

② Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos $a_{12}$ , $a_{33}$ y $a_{43}$ .

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{vmatrix},\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\alpha_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{vmatrix}=-(2{\cdot}2{\cdot}7+1{\cdot}5{\cdot}5+3{\cdot}3{\cdot}4-4{\cdot}2{\cdot}5-2{\cdot}3{\cdot}5-7{\cdot}1{\cdot}3)=2.$$

$$\alpha_{33}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 7\end{vmatrix},\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\alpha_{33}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 7\end{vmatrix}=(0{\cdot}(-1){\cdot}7+2{\cdot}6{\cdot}6+2{\cdot}5{\cdot}4-4{\cdot}(-1){\cdot}6-2{\cdot}2{\cdot}7-6{\cdot}5{\cdot}0)=108$$

$$\alpha_{43}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix},\ A_{43}=(-1)^{4+3}\cdot\alpha_{43}=-\begin{vmatrix}0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-(0{\cdot}(-1){\cdot}3+2{\cdot}1{\cdot}6+2{\cdot}5{\cdot}1-1{\cdot}(-1){\cdot}6-2{\cdot}2{\cdot}3-1{\cdot}5{\cdot}0)=-16$$

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 84 )

① Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas y comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

❍ **Mediante la regla de Sarrus:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot4 + 7\cdot6\cdot9 + 8\cdot(-5)\cdot(-1) - (-1)\cdot2\cdot9 - 3\cdot6\cdot8 - 7\cdot4(-5) = 24 + 378 + 40 + 18 - 144 + 140 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 1ª fila:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3(8-48) - 7(-20-54) - (-40-18) = -120 + 518 + 58 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 2ª fila:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5(28+8) + 2(12+9) - 6(24-63) = 180 + 42 + 234 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 3ª fila:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9(42+2) - 8(18-5) + 4(6+35) = 396 - 104 + 164 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 1ª columna:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3(8-48) + 5(28+8) + 9(42+2) = -120 + 180 + 396 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 2ª columna:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7(-20-54) + 2(12+9) - 8(18-5) = 518 + 42 - 104 = 456$$

❍ **Desarrollo por la 3ª columna:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1(-40-18) - 6(24-63) + 4(6+35) = 58 + 234 + 164 = 456$$

② Calcula los siguientes determinantes :

$$\text{a)}\begin{vmatrix}7&0&-3&4\\4&0&4&7\\3&7&6&9\\1&0&1&9\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}7&-3&4\\4&4&7\\1&1&9\end{vmatrix}=-7(7\cdot4\cdot9+4\cdot1\cdot4+7\cdot(-3)\cdot1-1\cdot4\cdot4-1\cdot7\cdot7-9\cdot(-3)\cdot4)=-2030.$$

Desarrollando por la 2ª columna.

$$\text{b)}\begin{vmatrix}3&1&-1&3\\1&4&-1&4\\0&3&2&5\\2&0&0&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&-1&3\\4&-1&4\\3&2&5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&4&-1\\0&3&2\end{vmatrix}=-2\big(1\cdot(-1)\cdot5+3\cdot2\cdot4+3\cdot4\cdot(-1)-3\cdot3\cdot(-1)-2\cdot4\cdot1-5\cdot4\cdot(-1)\big)+$$

$2(3\cdot4\cdot2+ 3\cdot1\cdot(-1)+0\cdot1\cdot(-1)-0\cdot4\cdot(-1)-1\cdot1\cdot2-3\cdot3\cdot(-1))= -2\cdot28+2\cdot28 = 0$. $C_4 = C_1+ C_2 + C_3$.

Desarrollando por la última fila.

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 85 )

① Calcula el rango de las siguientes matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\3&-1&0&1&1&2\\4&1&3&1&0&6\\7&0&3&2&1&8\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&2&1&5&3\\2&3&2&6&5\\6&5&3&12&8\\12&10&6&23&16\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\5&1&-3&-7\\7&2&-3&-8\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

**a)** $F_3 = F_1 + F_2$ y $F_4 = F_2 + F_3$ y $\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=-1-6=-7\neq0$ luego Ran(A) = 2.

**b)** El menor $\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=12-4=8\neq0$, luego hay dos filas linealmente independientes. Si añadimos la 3ª $\begin{vmatrix}4&2&1\\2&3&2\\6&5&3\end{vmatrix}=0$, ya que $F_3 = F_1 + F_2$, $\begin{vmatrix}4&2&5\\2&3&6\\6&5&12\end{vmatrix}=144+50+72-90-120-48=8\neq0$, luego las tres primeras filas son linealmente independientes.

Ahora comprobamos si la 4ª fila es linealmente independiente con las demás:

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_4 = F_1 + F_2 + F_3$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 12 \\ 12 & 10 & 16 & 23 \end{vmatrix} = 0$, ya que $F_4 = F_1 + F_2 + F_3$ luego Ran(B) = 3.

**c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$, luego hay 4 filas linealmente independientes y Ran(C) = 4.

**d)** $F_3 = F_1 + F_2$, luego podemos prescindir de ella. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ luego Ran(D) = 3.

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 85 )

**①** Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles :

$$a)\begin{cases} 3x-2y & = 5 \\ x+3y & = -2 \\ 2x-y & = 3 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 4x+5y & = 7 \\ 2x-y & = 0 \\ 7x+11y & = 4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y+2z & = 7 \\ 3x-y+4t & = 1 \\ x-3y-4z+4t & = 6 \end{cases}$$

**a)** $M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & | & 5 \\ 1 & 3 & | & -2 \\ 2 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$

M es de 3x2 y $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, luego Ran(M) = 2.

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27-5+8-30-6+6 = 0$ luego Ran(M*) = 2.

Como Ran(M*) = Ran(M) = nº de incógnitas = 2, el sistema es compatible y determinado.

**b)** $M^* = \begin{pmatrix} 4 & 5 & | & 7 \\ 2 & -1 & | & 0 \\ 7 & 11 & | & 4 \end{pmatrix}$

M es de 3x2 y $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-10 = -14 \neq 0$, luego Ran(M) = 2.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -16+154+49-40=+147 \neq 0$$ luego Ran(M*) = 3.

Como Ran(M*) = 3 ≠ Ran(M) = 2 el sistema es *incompatible*.

**c)**

$$\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 3x-y+4t=1 \\ x-3y-4z+4t=6 \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & | & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-3 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4-18+2+12=0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4+4+12-12=0$, luego Ran (M) = 2, ahora vemos el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -6-63+1+7+3-18=-76 \neq 0$$ luego Ran (M*) = 3.

Como Ran(M) = 2 y Ran(M*) = 3, el sistema es incompatible.

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

② Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$a)\begin{cases} x+3y-z & =1 \\ 2x+z & =2 \\ 2y-z & =0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+3y-z & =1 \\ 2x+z & =2 \\ 2y-z & =5 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y+2z & =7 \\ 3x-y+4t & =1 \\ x-3y-4z+4t & =-13 \end{cases}$$

✲✲✲❁❁✪❁❁✲✲✲

**a)** $$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-2+6=0 \Rightarrow \text{Ran}(M)=2$, en la matriz ampliada $C_4 = C_1$, luego Ran (M*) = 2, y como el nº de incógnitas =2, el sistema es *compatible* e *indeterminado*.

**b)** $$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=5 \end{cases} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-2+6=0$ luego Ran(M) = 2. Estudiamos ahora el rango de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4-4-30=-30 \neq 0$, luego Ran(M*) = 3.

Como Ran(M) = 2 y Ran(M*) = 3, el sistema es incompatible.

**c)** $\left\{\begin{array}{r} x+y+2z=7 \\ 3x-y+4t=1 \\ x-3y-4z+4t=-13 \end{array}\right. \Rightarrow M^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-3=-4\neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=4-18+2+12=0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-4+4+12-12=0$, luego hay dos filas linealmente independientes y Ran (M) = 2. Veamos ahora el rango de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix}=13-63+1+7+3+39=0 \Rightarrow \text{Ran}(M^*)=2$, como los rangos son iguales el sistema es compatible y como el nº de incógnitas es 4, es indeterminado ( biparamétrico).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 86 )

① Resuelve mediante la regla de Cramer :

$$a)\left\{\begin{array}{ll} x-3y+5z & =-24 \\ 2x-y+4z & =-8 \\ x+y & =9 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{ll} x+y-z & =2 \\ x-y+z & =8 \\ 2x+3y & =10 \end{array}\right.$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)**

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-1}=7,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-1}=2, z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{5}{-1}=-5$$

**b)**

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-30}{-6}=5,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-6}=0, z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-18}{-6}=3$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Resuelve aplicando la regla de Cramer :

$$a)\begin{cases} 2x-5y+3z & =4 \\ x-2y+z & =3 \\ 5x+y+7z & =11 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x-4y-z & =4 \\ y+z & =6 \\ 2x+5y+7z & =-1 \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)**

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{65}{13}=5, y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{0}{13}=0, z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{-26}{13}=-2$$

**b)** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ luego Ran(M) = 2 pero $\begin{vmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}\neq 0$ luego Ran(M*) = 3 y el sistema es incompatible.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página ❽❼ )

③ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$a)\begin{cases} x-y+3z & =1 \\ 3x-y+2z & =3 \\ -2y+7z & =0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x-y+3z & =1 \\ 3x-y+2z & =3 \\ -2y+7z & =10 \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

**a)** M* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 \\ 3 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -2 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}$ |M| = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}=-7-18+4+21=0$. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1+3=2\neq 0$, Ran(M) = 2 .

Como también $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$ pues $C_1$ = $C_3$, Ran(M*) = 2, el sistema es *compatible* e *indeterminado*, para resolverlo tomamos las ecuaciones que hacen que el rango sea 2, es decir la dos primeras ecuaciones pero tomando z como parámetro pasándola al otro miembro:

$$\begin{cases} x-y=1-3z \\ 3x-y=3-2z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{\begin{vmatrix} 1-3z & -1 \\ 3-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-1+3z+3-2z}{2}=\frac{z+2}{2}=\frac{\lambda+2}{2}$$ haciendo z = $\lambda$

$$\left\{ y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ 3 & 3-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3-2z-3+9z}{2} = \frac{7z}{2} = \frac{7\lambda}{2} \right.$$ luego la solución es:

$$\left( x = \frac{\lambda+2}{2}, y = \frac{7\lambda}{2}, z = \lambda \right)$$

**b)** $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 \\ 3 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -2 & 7 & | & 10 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes M es la misma luego Ran(M) = 2, pero

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -10-6+6+30 = 10 \neq 0$ luego Ran(M*) = 3 que es distinto de Ran(M) = 2 lo que hace el sistema sea *incompatible*.

④ Resuelve estos sistemas :

$$a)\left\{\begin{array}{rl} x+y & =3 \\ y+z & =5 \\ x+z & =4 \\ 5x-y+z & =6 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rl} 3x+4y & =4 \\ 2x+6y & =23 \\ -2x+3y & =1 \end{array}\right.$$

**a)** $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 5 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$

Como las dimensiones de M son 4x3, el rango máximo de M puede ser 3, lo comprobamos:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$ , luego Ran(M) = 3.

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4-5F_1} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \\ \xrightarrow{F_4+6F_2} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \\ \xrightarrow{2F_4-7F_3} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

luego Ran(M*) = 3. Como Ran(M*) = Ran(M) = nº incógnitas = 3, el sistema es compatible y determinado, para resolverlo tomamos las tres ecuaciones que sabemos que son linealmente independientes, las tres primeras:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ x+z=4 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3&1&0\\5&1&1\\4&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}}=\frac{2}{2}=1,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&0\\0&5&1\\1&4&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}}=\frac{4}{2}=2,\ z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&5\\1&0&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}}=\frac{6}{2}=3$$

La solución es ( x = 1, y = 2, z = 3).

**b)** $M^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 4 \\ 2 & 6 & | & 23 \\ -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

M es de 3x2, luego el rango máximo es 2, lo comprobamos $\begin{vmatrix}3&4\\2&6\end{vmatrix}=18-8=10\neq 0$, Ran(M) = 2. Ahora probamos si el rango de M* puede ser tres:

$\begin{vmatrix}3&4&4\\2&6&23\\-2&3&1\end{vmatrix}=18+24-184+48-8-207=-309\neq 0$, luego Ran(M*) = 3 y el sistema es *incompatible*.

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 88 )

**1** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$a)\begin{cases} 3x-5y+z &=0 \\ x-2y+z &=0 \\ x+y &=0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+11y-4z &=0 \\ -2x+4y+z &=0 \\ x+y-2z &=0 \\ 2x-16y+5z &=0 \end{cases}$$

**a)** $\begin{vmatrix}3&-5&1\\1&-2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1-5+2-3=-5\neq$ 0, luego Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 y la única solución que tiene el sistema es la trivial x = 0, y = 0, z = 0.

**b)** M = $\begin{pmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&11&-4\\-2&4&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-8+8+11+16-1-44=-18\neq 0$ ,Ran(M) = Ran(M*) = n = 3 luego la solución es la trivial x = 0, y = 0, z = 0.

② Resuelve estos sistemas :

**a)** $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+3z=0 \\ x-5y-9z=0 \end{cases} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix}=-9+5-3+1+15-9=0$ el rango es menor de 3, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2$ luego Ran(M) = Ran(M*) = 2 < n = 3 y el sistema es *compatible* e *indeterminado,* para resolverlo tomamos las ecuaciones que sabemos que son linealmente independientes, las dos primeras y pasamos z al segundo miembro que tomamos como parámetro:

$$\begin{cases} x-y=z \\ x+y=-3z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-3z}{2}=-z,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3z-z}{2}=-2z$$

Si hacemos z = λ, la solución es ( x = - λ, y = -2λ, z = λ).

**b)** $\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-2t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1-15+5-3=-14\neq 0$ luego Ran(M) = Ran(M*) = 3 < n = 4, luego el sistema es *compatible* e *indeterminado*, tomamos t como parámetro pasándolo al segundo miembro y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y=2t \\ x-y+z=t \end{cases} \Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-7t}{-14}=\frac{1}{2}t,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{7t}{-14}=-\frac{1}{2}t$$

$z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{0}{-14}=0$, si hacemos t = λ, la solución es (x = λ/2, y = -λ/2, z = 0, t = λ).

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página 90 )

① Discute y resuelve:

**a)** $\begin{cases} x+y+az=0 \\ ax-y=-1 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=k \\ kx-y=13 \\ 5x+3y=16 \end{cases}$

**a)** $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 0 \\ a & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$ hallamos $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6+4a^2+a-6a = 4a^2-5a-6$

luego el rango de M depende de a.

Resolvemos $4a^2 - 5a - 6 = 0$, $a = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \dfrac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \dfrac{5 \pm 11}{8} = \begin{cases} \dfrac{16}{8} = 2 \\ -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

## Discusión

▣ Si a = 2 $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$

◊ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$ y $|M| = 0$ Ran(M) = 2.

◊ Comprobamos el determinante que queda con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1+4 = 3 \neq 0$ luego Ran(M*) = 3

Como los rangos son distintos el sistema el *incompatible*.

▣ Si a = -3/4 $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/4 & | & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$

◊ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = -1+\dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{4} \neq 0$ y $|M| = 0$ Ran(M) = 2.

◊ Comprobamos el determinante que queda con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\dfrac{3}{4} & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1+4 = 3 \neq 0$ luego Ran(M*) = 3

Como los rangos son distintos el sistema el *incompatible*.

▣ Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$ Ran(M) = Ran(M*) = nº de incógnitas = 3, el sistema es compatible y determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-4a+6}{(a-2)(4a+3)},\ y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{a-6}{(a-2)(4a+3)}$$

$$z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{3}{(a-2)(4a+3)}$$

**b)** $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & k \\ k & -1 & | & 13 \\ 5 & 3 & | & 16 \end{pmatrix}$ hallamos el determinante de M*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -16 + 3k^2 + 65 + 5k - 16k - 39 = 3k^2 - 11k + 10.$$

Resolvemos la ecuación :

$3k^2 - 11k + 10 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-120}}{6} = \dfrac{11 \pm 1}{6} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{5}{3} \end{cases}$

▣ Si k = 2, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & | & 13 \\ 5 & 3 & | & 16 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-3 \neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = nº de incógnitas = 2, luego el sistema es *compatible* y *determinado*. Para resolverlo nos sobra una ecuación (la tercera pues sabemos que las dos primeras son linealmente independientes):

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{cases} \quad x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-3} = 5,\ y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-3} = -3$$

▣ Si k = 5/3, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 5/3 \\ 5/3 & -1 & | & 13 \\ 5 & 3 & | & 16 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{8}{3} \neq 0$ Ran(M) = Ran(M*) = nº de incógnitas = 2, luego el sistema es *compatible* y *determinado*. Para resolverlo nos sobra una ecuación (la tercera pues sabemos que las dos primeras son linealmente independientes):

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y = 13 \end{cases} \quad x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-44/3}{-8/3} = \frac{11}{2}, \; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 5/3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{92/9}{-8/3} = -\frac{23}{6}$$

▣ Si k ≠ 2 y k ≠ 5/3 Ran(M*) = 3 > Ran(M) = 2 y el sistema es *incompatible*.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

② Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

$$M^* = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & | & 0 \\ a-1 & a+1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos $|M| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 - a + 1 = a^2 - a = a(a-1)$.

Si igualamos a cero y resolvemos la ecuación a(a -1) = 0, a = 0, a = 1.

▣ Si a = 0 $M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$ Ran(M) = Ran(M*) = 1 ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0, pues las dos filas son iguales 0 nº de incógnitas n = 2, luego el sistema es *compatible* e *indeterminado*. Si utilizamos una de las dos ecuaciones que quedan – x + y = 0, y = x, y llamando x = λ, y = λ.

▣ Si a = 1 $M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$ Ran(M) = Ran(M*) = 1 ya que sólo hay una columna no nula, como hay dos incógnitas el sistema es compatible y determinado: $\begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ si hacemos x = λ, tenemos la solución ( x = λ, y = 0).

▣ Si a ≠ 0 y a ≠ 1, Ran(M) = Ran(M*) = 2 = nº de incógnita y la única solución que tiene el sistema es la trivial x = 0, y = 0.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

EJERCICIOS PROPUESTOS ( Página ❾❶ )

① Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 5 + 6 - 15 + 3 = -1 \neq 0 \text{ luego admite inversa}$$

Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0 \text{ luego admite inversa.}$$

Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} |-2| & -|1| \\ -|-1| & |2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

❉ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

❉ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

❉❉❉❉❉✪❉❉❉❉❉

2 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

❉ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 8 = -1 \neq 0 \text{ luego admite inversa.}$$

❉ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} |7| & -|2| \\ -|4| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

❉ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

❉ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

❉ Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 1 - 20 = 3 \neq 0 \text{ luego admite inversa}$$

❁ Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

❁ Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

❁ Inversa

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 4 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -7 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

### PARA PRACTICAR

**1** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$ , justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:

**a)** $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & b \\ -d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ya que el segundo es nulo por tener dos columnas iguales.

**b)** $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 3{\cdot}2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6{\cdot}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6{\cdot}7 = 42$ Si multiplicamos $C_1$ por 3 y $C_2$ por 2.

**c)** $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -7$ ya que si permutamos alguna línea del determinante, el determinante cambia de signo.

**d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -2c & -2d \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2{\cdot}7 = -14$ ya que el primer determinante es nulo al ser $F_1 = F_2$ y que para multiplicar un determinante por un número se multiplica una de sus líneas ( la $F_2$ en este caso).

② Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes?

**a)** $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ n & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3n & 3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ n & q \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} n & q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{3)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ n & q \end{vmatrix} = -5$

1) Suma de determinantes.
2) Producto de un número por una matriz.
3) El segundo determinante es nulo ya que $F_1 = F_2$.

**b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{2)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

1) El determinante de una matriz coincide con el su traspuesta.
2) Al permutar alguna línea el determinante cambia de signo.

**c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \overset{1)}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \overset{2)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) = -15$

1) Producto de un número por un determinante.
2) Al permutar dos columnas, el determinante cambia de signo.

**d)** $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \overset{1)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2(-5) = 10$

1) Producto de un número por una matriz.
2) Al trasponer una matriz, sus determinante no varía.
3) Al permutar dos filas, el determinante cambia de signo.

③ Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

④ Resuelve estas ecuaciones:

**a)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

**a)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1+2x+x^2-1+2x-x^2 = 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} = 3$

**b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2(x-2) - x(1-2x) = x(x^2-2x-1+2x) = x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

5 Calcula el valor de los determinantes:

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -7+6-7+8=0$ ( $C_3 = C_2 - 7C_1$).

**b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 15-36+20-30-9+40=0$ ($F_3 = F_1 + F_2$).

**c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -49+24=-25.$

**d)** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8+18=10.$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

6 ¿Qué valor de a anula estos determinantes?

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a+5+4-5+3-4a=-7a+7=0 \Leftrightarrow a=1$

**b)**

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1)+(a-1)(a+6)-6(a-1)=3a-3+a^2+6a-a-6-6a+6=a^2+2a-3=0$$

$$a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

**c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2+4-4-12=4a^2-12=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}$

**d)**

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1)+a+a-2-2-a^2(a+1)=4a+4+2a-4-a^3-a^2=a(-a^2-a+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a^2-a+6=0 \end{cases}$$

$$-a^2-a+6=0 \Leftrightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\frac{1\pm 5}{-2}=\begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑦ Calcula el valor de los siguientes determinante

**a)**

$$\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\2&3&2&-2\\2&4&2&1\\3&1&5&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-2F_1}\\\xrightarrow{F_3-2F_1}\\\xrightarrow{F_3-3F_1}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&3&4&-6\\0&4&4&-5\\0&1&8&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&-6\\4&4&-5\\1&8&-9\end{vmatrix}=-108-192-20+24+120+144=-32$$

**b)**

$$\begin{vmatrix}1&-1&2&0\\2&1&3&1\\3&1&4&3\\2&1&7&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\2&1&7\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&3\\2&1&7\end{vmatrix}=18-3\cdot 12=18-36=-18.$$

**c)**

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&1\\1&2&4&5\\3&4&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-2F_1}\\\xrightarrow{F_3-F_1}\\\xrightarrow{F_3-3F_1}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-4&-7\\0&0&1&1\\0&-2&-8&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-4&-7\\0&1&1\\-2&-8&-10\end{vmatrix}=30+8-14-24=0$$

**d)**

$$\begin{vmatrix}-1&3&2&-1\\2&-2&1&3\\0&-5&10&4\\7&-8&9&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2+2F_1}\\\xrightarrow{F_3}\\\xrightarrow{F_3+7F_1}\end{matrix}\begin{vmatrix}-1&3&2&-1\\0&4&5&1\\0&-5&10&4\\0&13&23&-9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&5&1\\-5&10&4\\13&23&-9\end{vmatrix}=-(-360-115+260-130-368-225)=938$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

⑧ Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:

**a)** $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix}4&3\\1&1\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0\text{, luego admite inversa.}$$

Matriz de los adjuntos

$$A^{Adj}=\begin{pmatrix}|1|&-|1|\\-|3|&|4|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&4\end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(A^{Adj}\right)^t=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$$

Inversa

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{Adj}\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$$

**b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10 \neq 0, \text{ luego admite inversa.}$$

Matriz de los adjuntos

$$B^{Adj} = \begin{pmatrix} |4| & -|3| \\ -|-2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(B^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$B^{-1} = \frac{\left(B^{Adj}\right)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \neq 0 \text{ luego admite inversa}$$

Matriz de los adjuntos

$$C^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(C^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$C^{-1} = \frac{\left(C^{Adj}\right)^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Primero hallamos el determinante de la matriz para saber si es regular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 2 = -10 \neq 0 \text{ luego admite inversa}$$

Matriz de los adjuntos

$$D^{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de los adjuntos

$$\left(D^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa

$$D^{-1} = \frac{\left(D^{Adj}\right)^t}{|D|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{10} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

***********

**9** Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Sea X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} \begin{cases} a+2c=0 \xrightarrow{-2E_1} \\ 2a+c=3 \xrightarrow{E_2} \end{cases} \begin{cases} -2a-4c=0 \\ 2a+c=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3c=3 \Leftrightarrow c=-1; a=2 \\ \begin{cases} b+2d=3 \xrightarrow{E_1} \\ 2b+d=0 \xrightarrow{-2E_2} \end{cases} \begin{cases} b+2d=3 \\ -4b-2d=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3b=3 \Leftrightarrow b=-1; d=2 \end{cases}$ luego la matriz buscada es : X = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**b)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sea X = $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ya que el resultado es de 1 x2 y el factor conocido es de 2x2.

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & 5a+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a-b=1 \xrightarrow{4E_1} \\ 5a+4b=2 \xrightarrow{E_2} \end{cases} \begin{cases} -4a-4b=4 \\ 5a+4b=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}}$

a = 6; y b = -1- a = - 1 – 6 = -7, luego X = ( 6  - 7).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻