PARA RESOLVER (Página ❼❶)

❶❾ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, ..., A^{128}.

---oo0oo---

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$

Es periódica de periodo k = 4.

$$A^{128} = A^{3\cdot 42+2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷⓿ Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

---oo0oo---

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

$$2A-I=2\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -8 & 4\\ 4 & -2 & 2\\ -8 & 8 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

$$A^4=(A^2)^2=(2A-I)^2=4A^2-2AI-2AI+I^2=4(2A-I)-4A+I^2=8A-4I-4A+I=4A-3I=$$

$$= 4\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷❶ Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

---oo0oo---

$A^2 = A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & b^2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-a=2 \Leftrightarrow a=2 \\ -2-b=-1 \Leftrightarrow b=-1 \\ 2a+ab=a \Leftrightarrow a(2+b)=a \Leftrightarrow 2+b=1 \Leftrightarrow b=-1 \\ b^2-a=b \Rightarrow (-1)^2-2=-1 \end{cases}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷❷ Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que probamos usando el método de inducción:

❶ Comprobamos que se cumple para n = 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❷ Supuesto que se cumple para n – 1, $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n-1}{7} & \frac{n-1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprobamos que se cumple

para n : $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n-1}{7} & \frac{n-1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

....

$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ que demostramos por inducción:

❶ Comprobamos que se cumple para n = 1 : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

❷ Suponemos que se cumple para n –1, $B^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$ y comprobamos que es válida para

n: $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

❷❸ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que A·B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumple $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ igualando matrices tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (en realidad son dos sistemas de dos incógnitas) que resolvemos:

$$\begin{cases} \begin{cases} a+2c=0 \xrightarrow{-2} -2a-4c=0 \\ 2a+c=3 \xrightarrow{\text{igual}} 2a+c=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -3c=3 \Leftrightarrow c=-1; a=-2c=-2(-1)=2 \\ \begin{cases} b+2d=3 \xrightarrow{\text{igual}} b+2d=3 \\ 2b+d=0 \xrightarrow{-2} -4b-2d=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -3b=3 \Leftrightarrow b=-1; d=-2b=-2(-1)=2 \end{cases}$$

luego la matriz buscada es $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷❹ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula. Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de I- A.

---oo0oo---

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de I- A, su producto ha de dar la matriz unidad I, comprobémoslo:
$(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I^2 - I \cdot A + A \cdot I - A^2 + A^2 - A^3 = I^2 = I$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷❺ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A + I)^2 = O$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

---oo0oo---

$$(A+I)^2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$(A + I)^2 = O$; $A^2 + A \cdot I + I \cdot A + I^2 = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = O$; $A^2 = -(2A + I) = -2A - I$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷❻

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1} :

$$A=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&-2/5&0\\-3/5&6/5&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica XA = B, siendo A la matriz anterior y B = (1 -2 3).

---oo0oo---

$$\text{a) } A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/5&-2/5&0\\-3/5&6/5&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$

$$\text{b) } XA = B;\ X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5&-2/5&0\\-3/5&6/5&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}&\frac{1}{5}&-2\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷❼ Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&4\end{pmatrix}=C;\ 2A+B=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}=D$$

---oo0oo---

$$\begin{cases}3A-2B=C\xrightarrow{\text{igual}}3A-2B=C\\2A+B=D\xrightarrow{2}4A+2B=2D\end{cases}\xrightarrow{\text{sumando}}7A=C+2D\Leftrightarrow A=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix};\quad B=D-2A=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷❽ Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&2\\2&1&k\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-2&1&3\\1&k&2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&6&4&k\\4&12&8&-4\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}-1&1&0&2\\1&3&1&0\\2&10&3&k\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

❁ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-2F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$ ya está escalonada y, como tiene 3 filas y columnas no nulas independientemente de k, el Ran(M) = 3 para cualquier valor de k.

❁ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{2F_3-F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{pmatrix}$ ya escalonada, si 2k + 1 = 0, si k = -1/2

✪ Si k = -1/2, hay dos filas no nulas y tres columnas no nulas, luego Ran(N) = 2.

✪ Si k $\neq$ -1/2, hay tres filas y columnas no nulas y Ran(N) = 3.

❁ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-4F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ k +2 = 0; k = -2

✪ Si k = - 2, queda una sola fila no nula, luego Ran(P) = 1

✪ Si k $\neq$ -2, hay dos filas no nulas, luego Ran (P) = 2.

❁ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3+2F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-3F_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ k – 2 = 0, k = 2.

✪ Si k = 2, quedan sólo dos filas no nulas y Ran(Q) = 2.
✪ Si k $\neq$ 2, hay tres filas no nulas y Ran(Q) = 3.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷❾ Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$ para que el rango de A sea 2, ha de ser k – 2 = 0, es decir k = 2.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸⓿ Halla X e Y sabiendo que $5X+3Y=\begin{pmatrix}2&0\\-4&15\end{pmatrix}=C$ y $3X+2Y=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&9\end{pmatrix}=D$

---oo0oo---

$$\begin{cases}5X+3Y=A\xrightarrow{-2}-10X-6Y=-2A\\3X+2Y=B\xrightarrow{3}9X+6Y=3B\end{cases}\xrightarrow{\text{sumando}}-X=3B-2A\Leftrightarrow X=2A-3B=2\begin{pmatrix}2&0\\-4&15\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\-2&9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\frac{1}{3}(A-5X)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2&0\\-4&15\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&-5\\2&0\end{pmatrix}, \text{ luego:}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}-1&-5\\2&0\end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸❶ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$, halla dos números reales *m* y *n* tales que A + *m*A + *n***I** = **0.**

---oo0oo---

A + mA + nI = O luego $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2+2m+n=0&1+m=0\\2+2m=0&3+3m+n=0\end{pmatrix}$

Si 1 + m = 0 ó 2 + 2m = 0, m = -1. Si m = -1 y 2 + 2m + n = 0 ó 3 + 3m + n = 0, n = 0.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸❷ Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$(A-kI)^2 = 0$; luego

$$\left(\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k^2-1&4k-4\\-2k+2&-2k-2&k^2-6k+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k^2-1=0\Leftrightarrow k=\pm1\\2k-2=0\Leftrightarrow k=1\\-2k+2=0\Leftrightarrow k=1\\4k-4=0\Leftrightarrow k=1\\k^2-6k+5=0\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\k=5\end{cases}\end{cases}$$

luego el valor de k que cumple todas las ecuaciones es k = 1.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸❸ Una compañía de muebles fabrica *butacas*, *mecedoras* y *sillas*, y cada una de ellas de tres modelos: **E** (económico), **M** (medio) y L (lujo). Cada mes produce **20** modelos **E**, **15 M** y **10 L** de *butacas*; **12 modelos E**, **8 M** y **5 L** de *mecedoras*, y **18** modelos **E**, **20 M** y **12 L** de *sillas*. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

---oo0oo---

$$\text{Cada mes fabrica}: \begin{array}{c} \\ \text{Butacas} \\ \text{Mecedoras} \\ \text{Sillas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\text{Producción anual} = 12 \text{ meses/ año} \cdot \text{producción mensual} = 12 \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \text{Butacas} \\ \text{Mecedoras} \\ \text{Sillas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$$

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

❸❹ En un edificio hay tres tipos de viviendas: **L3**, **L4** y **L5**. Las viviendas **L3** tienen **4** ventanas *pequeñas* y **3** *grandes*; las **L4** tienen **5** ventanas *pequeñas* y **4** *grandes*, y las **L5, 6** *pequeñas* y **5** *grandes*. Cada ventana *pequeña* tiene **2** cristales y **4** bisagras, y las *grandes*, **4** cristales y **6** bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el **número** y **tamaño** de **ventanas** de cada vivienda y otra que exprese el **número** de **cristales** y **bisagras** de cada **tipo** de **ventana**.

b) Calcula la matriz que expresa el número de **cristales** y de **bisagras** de cada tipo de vivienda.

---oo0oo---

a)

$$\text{Nº y tamaño de ventanas/vivienda} = M = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$ siendo P = ventanas pequeñas y G = ventanas grandes.

$$\text{Nº de cristales y bisagras/tipo de ventana} = N = \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$ siendo C = cristales y B = bisagras.

b) Para obtener los cristales y bisagras/ viviendo podemos hacer $M_{3x2} \cdot N_{2x2}$ con lo nos quedarían las filas de la primera (tipos de vivienda) y las columnas de la segunda (cristales y bisagras) o $N^t_{2x2} \cdot M^t_{2x3}$ quedándonos las filas de la primera (cristales y bisagras) y las columnas de la segunda (tipos de vivienda), optamos por la segunda forma que nos dará la matriz traspuesta de la primera:

$$N^t \cdot M^t = \begin{array}{c} \\ C \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L3 & L4 & L5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ C \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L3 & L4 & L5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 26 & 32 \\ 34 & 44 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❸❺ Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M1, M2, M3 y M4

	T	O
M_1	300	200
M_2	400	250
M_3	250	180
M_4	500	300

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2 % en el modelo M_1 , el 5 % en el M_2 , el 8 % en el M_3 y el 10 % en el M_4 . Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

---oo0oo---

Tanto por uno de bombillas buenas y defectuosas por modelo:

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Multiplicando las dos matrices obtenemos las bombillas transparentes y ópacas, buenas y defectuosas que se producen:

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

que, como el número de bombillas ha de ser entero, podemos aproximar a $\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❸❻ Escribe en forma matricial y resuelve, si es posible, utilizando la matriz inversa:

$$a)\begin{cases} x-2y &= 1 \\ x+y &= 7\end{cases} \quad b)\begin{cases} x+z &= 510 \\ y &= -234 \\ y+z &= 254\end{cases}$$

---oo0oo---

a) M · X = B; $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, para resolverlo hemos de hallar la inversa de M :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{3F_1+2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/3]{F_1/3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

. Ahora podemos hallar la solución del sistema:

$$X = M^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

, luego x = 5, y = 2.

b) M · X = B; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix}$,para resolverlo hemos de hallar M^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-F_3} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ahora podemos resolver el sistema multiplicando las matrices:

$$X = M^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -234 \\ 488 \end{pmatrix}$$

luego la solución del sistema es :

x = 22, y = - 234 y z = 488.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸❼ Escribe en la forma habitual los sistemas:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

a) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ x+5y=0 \\ 7y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+5y-3z=1 \\ 2x+y+5z=-1 \end{cases}$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❸❽ Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) matriz X tal que X · A = (1 0 -1).

b) Una matriz Y tal que $Y \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

En los dos apartados necesitamos hallar A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3+6F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2F_1+F_2 \\ F_2 \\ 2F_3+5F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1-F_3 \\ F_2-5F_3 \\ F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1/2 \\ F_2/(-2) \\ -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) X · A = (1 0 -1); X = (1 0 – 1) · A^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Y · A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❸❾ Calcula los valores de x para que la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación A^2 - 6A + 9I = 0.

---oo0oo---

$$A^2 - 6A + 9I = O$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6x+9 & 0 \\ 0 & x^2-6x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego ha de ser $x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹⓿ Resuelve la ecuación matricial 2A + AX + B = 0 siendo $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$

---oo0oo---

2A + AX + B = 0; AX = - 2A – B; X = A^{-1}·(-2A – B), necesitamos pues hallar la inversa de A.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2+F_1]{F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$, ahora podemos hallar X:

$$X = A^{-1}\cdot(-2A-B)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\left(-2\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&-5\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹❶ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$, halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad A^2 - xA - yI = 0.

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&9\\-6&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x&3x\\-2x&x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y&0\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2x-y&9-3x\\-6+2x&-5-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

igualando matrices: $\begin{cases}9-3x=0\Leftrightarrow x=9/3=3\\-6+2x=0\Leftrightarrow x=6/2=3\\-2-2x-y=0\Leftrightarrow -2-6-y=0\Leftrightarrow y=-8\\-5-x-y=0\Leftrightarrow -5-3-y=0\Leftrightarrow y=-8\end{cases}$ luego x = 3 e y = -8.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹❷ Dada $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}$

a) Calcula A + A^2

b) Resuelve el sistema $A^5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\5\\1\end{pmatrix}$

---oo0oo---

a) A + A^2 =

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\2/10&1&0\\2/10&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\3/10&2&0\\3/10&0&2\end{pmatrix}$$

b) Para resolver el sistema necesitamos calcular previamente A^5:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego:}$$

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y ahora necesitamos hallar la inversa de A^5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{2F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{2F_3 - F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2/2} \\ \xrightarrow{F_3/2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

luego $\left(A^5\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y ahora podemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(A^5\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹❸ Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}. D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que A · B + C = 3D, plantea un sistema de ecuaciones para determinar x, y, z.

b) Encuentra, si es posible, una solución.

---oo0oo---

a) $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = 3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3+F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{sistema}} \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y=-6 \\ 2y=4 \end{cases}$$

que es compatible e indeterminado. Resolvemos – 3y = - 6; y = 2, 2y = 4; y = 2, x + y + z = 1; x = 1 – y – z = 1 – 2 – z = - 1 – z. Si hacemos z = λ, la infinitas soluciones son de la forma:

(x = - 1 - λ, y = 2, z = λ) y para λ = 0, una solución es (x = - 1, y = 2, z = 0).

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹❹ Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, A · X = X · A, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula $A^2 + 2\cdot A^{-1} \cdot X$.

---oo0oo---

Sea X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,como A · X = X · A, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$es decir:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{igualando}} \begin{cases} a+c=a \Rightarrow c=0 \\ c=c=0 \\ d=c+d=d \\ b+d=a+b \Rightarrow d=a \end{cases}$$

la matriz X es de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \forall a,b \in R.$$

Ahora hallamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2\cdot A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & 2b-2a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❹❺ Sean A y B las matrices dadas por:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir a, b, c para que se verifique A · B = B · A.

---oo0oo---

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{cases} A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B{\cdot}A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \text{igualando:}$$

$$\begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \Leftrightarrow 2c = 2b \Leftrightarrow c = b \\ 5b+2c = 2a+5c \Leftrightarrow 2c = 2a \Leftrightarrow a = c \\ 2a+5c = 7c \Leftrightarrow 7c = 7c \Leftrightarrow c = c \\ 2b+5c = 7c \Leftrightarrow 7c = 7c \Leftrightarrow c = c \end{cases} \text{luego } a = b = c$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❹❻ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = \mathbf{0}$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.

---oo0oo---

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I_3 .$$

$A^3 + I = - I + I = O$

$A^{10} = A^{3\cdot3+1} = (A^3)^3 \cdot A = (- I)^3 \cdot A = - I \cdot A = - A.$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❹❼ Una matriz cuadrada se llama ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta. Calcula x e y para que A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Para que sea ortogonal $A^{-1} = A^t$, es decir $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t$, pero $A \cdot A^{-1} = I$, luego $A \cdot A^t = I$, sustituimos e igualamos:

$$A \cdot A^t = I;\ \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3y/5 - 3x/5 & 0 \\ 3y/5 - 3x/5 & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Igualando: } \begin{cases} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \\ \frac{3y - 3x}{5} = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \frac{3y - 3x}{5} = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \frac{9}{25} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vemos que efectivamente } x = y.$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❹❽ Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \text{ necesitamos halla las inversas}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 3F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_2 + F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/(-2)]{F_1/4}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} \text{ ahora ya puede hallarse X:}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

CUESTIONES TEÓRICAS (Página ❼❸)

❹❾ ¿Por qué no es cierta, en general, esta igualdad?: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

---oo0oo---

Si multiplicamos (A + B) · (A – B) = A·A – A· B + B· A – B · B = A^2 – A· B + B· A – B^2, pero como el producto de matrices no es conmutativo, en general, A·B ≠ B·A y, por tanto – A· B + B· A no es nulo.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❺⓿ Sea A una matriz de dimensión 2 x 3:

a) ¿Existe una matriz B tal que A B sea una matriz de una sola fila?
b) ¿Y para B · A?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

a) Como A es de 2 x 3, B tendrá que ser de 3x1, y el producto A·B será de 2xn, luego no puede tener una sola fila tendrá siempre dos filas, las columnas sí pueden ser n = 1, 2, 3, etc.

Si, por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{2x1}$

b) Para que B·A sea posible B tiene que ser de dimensión nx2, luego sí puede ser n = 1, por ejemplo, si B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{1x3}$.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❺❶ Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto A · B? Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

---oo0oo---

Una matriz es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ si $i \neq j$, pero al multiplicar dos matrices simétricas, como se multiplican filas de la **primera** por columnas de la **segunda**, la simetría puede perderse. Por ejemplo:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ las dos primeras son simétricas y su producto no.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❺❷ Sean A = $(a_{ij})_{m,n}$, B = $(b_{ij})_{n,p}$, C = $(c_{ij})_{q,r}$. ¿ Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar estas operaciones?

a) A·C·B

b) A·(B+C)

---oo0oo---

a) $A_{mxn} \cdot C_{qxr} \cdot B_{nxp}$, n = q = r, ya que en un producto de matrices las columnas del primer factor ha de coincidir con las filas del segundo factor.

b) $A_{mxn} \cdot (B_{nxp} + C_{qxr})$, por un lado, para que dos matrices se puedan sumar, han de tener la misma dimensión, luego n = q y p = r, por otro lado para que se puedan multiplicar la columnas de la primera (n) ha de ser igual a las filas de la segunda (la suma) que también ha de ser n.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❺❸ Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

---oo0oo---

a) Al quitar una columna, el rango bajará a dos, que son las columnas que quedan linealmente independientes.

b) No, puede ser rango 2 o rango 1, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3,pero si suprimimos la fila 1 y la columna 3, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ no tiene rango 2 sino uno, pues sólo hay una línea linealmente independiente.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❺❹ ¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4? Razona la respuesta.

---oo0oo---

Dependerá de dos cosas: del rango de la matriz inicial y de la relación de la fila que se añada con las que ya hay (si son o no combinación lineal).

Luego vamos a hallar primero cuál es el rango de la matriz inicial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-2F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-3F_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como sólo hay dos filas linealmente independientes el rango es 2, al añadir una fila puede ocurrir:

❍ Si la fila que se añade no es combinación lineal de las dos que quedan el rango será tres.

❍ Si la fila que se añade es combinación lineal de alguna o algunas de las existentes, el rango seguirá siendo dos.

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

PARA PROFUNDIZAR (Página ❼❸)

❺❺ ¿Qué condición debe cumplir una matriz A de dimensión 3 x 3 para que se verifique que $A + A^t = 2A$?

---oo0oo---

$A + A^t = 2A$, luego $A^t = 2A - A = A$, es decir ha de ser simétrica $a_{ij} = a_{ji}$ si $i \neq j$.

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

❺❻ **a)** Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que AB + BA = **0**, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq \mathbf{0}$ tal que AB + BA = **0**.

---oo0oo---

a) Como A es regular (tiene inversa = A^{-1}) podemos multiplicar los dos miembros de la igualdad por A^{-1} por la izquierda, quedando $A^{-1}(AB + BA) = A^{-1}\cdot A\cdot B + A^{-1}\cdot B\cdot A = A^{-1}\cdot O$, es decir:

$$B + A^{-1}\cdot B\cdot A = O \text{ (ya que } A^{-1}\cdot A = I \text{ e } I\cdot B = B \text{ y además } A^{-1}\cdot O = O)$$

Si ahora multiplicamos los dos miembros de la igualdad resultante por A^{-1} por la derecha tendremos:

$B\cdot A^{-1} + A^{-1}\cdot B\cdot A\cdot A^{-1} = O\cdot A^{-1}$, o sea $B\cdot A^{-1} + A^{-1}\cdot B = O$ que es lo que queríamos demostrar.

b) B tendrá que ser cuadrada y de orden 2 (para que sean posibles los productos AB y BA), de la forma $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si hacemos la operación e igualamos:

A·B + B·A =

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2c & -3b-2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a+4b & -2a+3b \\ -3c+4d & -2c+3d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6a-2c+4b & -2d-2a \\ 4a+4d & 6d+4b-2c \end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4d=0 \Leftrightarrow a=-d \\ -2d-2a=0 \Leftrightarrow a=-d \\ -6a-2c+4b=0 \\ 6d+4b-2c=0 \end{cases}$$ como a = -d, las dos últimas son la misma igualdad –6a - 2c + 4b = 0, luego c = 2b – 3a, si fijamos b, tendremos al final que B = $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b-3a & -a \end{pmatrix}$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❺❼ Demuestra que si una matriz verifica A^2 = O (**O** es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.

---oo0oo---

Supongamos que A sí tiene inversa, entonces $A^2 \cdot (A^{-1})^2 = (A \cdot A^{-1})^2 = I^2 = I$ tendría que ser igual a la matriz nula O, lo que no puede ser verdad, luego deducimos que A no puede tener inversa.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❺❽ Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad A · B = A · C no puede deducirse, en general, que B = C.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que A · B = A · C, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de A · B = A · C se pueda deducir que B = C?

---oo0oo---

a)

Si B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Que exista A^{-1}, que A sea regular y no singular.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❺❾ Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

◈ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego los valores a discutir son: a + 2 = 0; a = -2 y si a – 1 = 0, a = 1.

▣ Si a = 1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hay dos filas linealmente independientes, Ran (M) = 2.

▣ SI a = -2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hay dos filas linealmente independientes, Ran (M) = 2.

▣ Si $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, hay tres filas no nulas y Ran(M) = 3.

◈ $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego:

▣ Si a = 0 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay dos columnas no nulas y Ran(A) = 2.

▣ Si $a \neq 0$ $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay tres columnas y tres filas no nulas y Ran(A) = 3.

❉❉❉⌘⌘◎⌘⌘❉❉❉

❻⓿ Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea *antisimétrica*.

---oo0oo---

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = -A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \Leftrightarrow a = 0 \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \Leftrightarrow d = 0 \end{cases}$ luego :

$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

❉❉❉⌘⌘◎⌘⌘❉❉❉