PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Los seis consejeros (A, B, C, D, E, F) de una empresa deben elegir un presidente entre ellos mismos. Cada uno opina sobre los demás y sobre sí mismo, si es idóneo (1), no es idóneo (-1) o se abstiene (0). Estos son los resultados:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

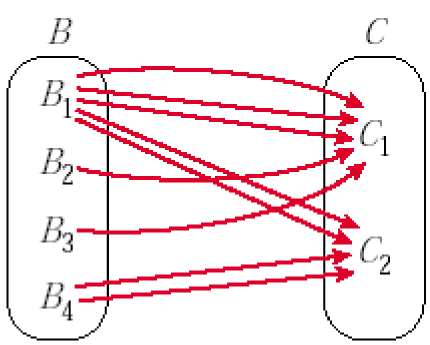
Ayudándote de la tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.

- Se han votado a si mismos el A (ha rechazado a todos los demás) y el C.
- Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.
- Al B sólo le gusta el candidato C, igual que al D.
- A F le dan igual todos menos el A y el E a los que rechaza.
- Al E nadie le toma en serio, ni tan siquiera él.
- El que más votos ha recibido es el C que además del suyo ha obtenido otros 3 y sería el presidente de la mayoría.

Problema 2

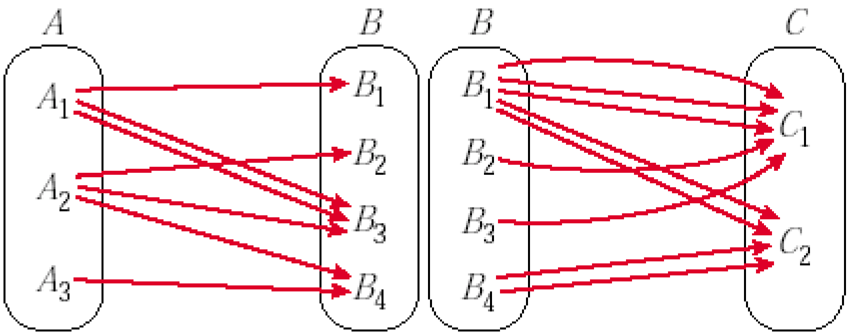
En un país $\mathcal{A}$ hay tres aeropuertos internacionales, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, mientras en el país $\mathcal{B}$ hay cuatro $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_4$.

Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país $\mathcal{B}$ hasta el país $\mathcal{C}$. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

Una persona quiere salir el lunes de *A*, pasar la noche en *B* y llegar el martes a *C*.



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1. Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

De A_2 a C_1 hay 1x1 = 1 a través de B_2 y 1 x 1 = 1 a través de B_3, total 2 caminos.
De A_3 a C_2 hay 1 x 2 = 2 caminos pasando por B_4.
De A_3 a C_1 no hay comunicación, ya que de B_4 no se puede ir a C_1.

	C_1	C_2
A_1	5	2
A_2	2	2
A_3	0	2

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página 53)

❶ Escribe las matrices traspuestas de :

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\\7&6\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}3&2&7\\1&5&6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&5&7\\4&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2&4\\5&1\\7&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&2&4&1\\6&1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{pmatrix}1&0&6\\3&2&1\\5&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}7&4&1\\2&1&0\\0&1&7\\6&3&2\end{pmatrix}\Rightarrow D^t=\begin{pmatrix}7&2&0&6\\4&1&1&3\\1&0&7&2\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&7&4\\7&-1&0\\4&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow E^t=\begin{pmatrix}1&7&4\\7&-1&0\\4&0&3\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}5&4&6&1\end{pmatrix}\Rightarrow F^t=\begin{pmatrix}5\\4\\6\\1\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

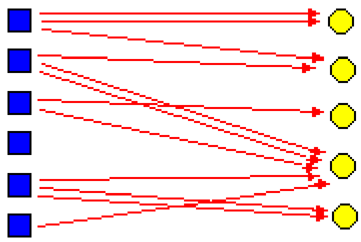
❷ Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

---oo0oo---

Debe de ser una matriz cuadrada y que tenga los elementos simétricos respecto de la diagonal principal iguales, por ejemplo $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = X^t$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❸ Escribe una matriz que describa el diagrama :



---oo0oo---

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❺❹)

❶ Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} y D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula E = 2A - 3B + C - 2D.

---oo0oo---

$$E = 2A - 3B + C - 2D = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página 57)

❷ Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Para que dos matrices M_{mxn} y N_{pxq} se puedan multiplicar ha de ser n = p. Para saber los posibles productos las organizamos en tabla, con sus dimensiones:

	A_{2x3}	B_{4x2}	C_{3x4}	D_{3x3}
A_{2x3}	No	No	$A_{2x3} \cdot C_{3x4}$	$A_{2x3} \cdot D_{3x3}$
B_{4x2}	$B_{4x2} \cdot A_{2x3}$	No	No	No
C_{3x4}	No	$C_{3x4} \cdot B_{4x2}$	No	No
D_{3x3}	No	No	$D_{3x3} \cdot C_{3x4}$	$D_{3x3} \cdot C_{3x4}$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 4 & 5\\ 24 & -4 & -1 & -10\end{pmatrix}$$

$$A\cdot D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 18 & -4\\ 0 & 30 & 5\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14 & 21\\ -3 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -5 & 26 & 13\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 28\\ 39 & 3\\ -9 & -4\end{pmatrix}$$

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -1 & 2 & 5\\ 26 & 5 & 2 & 0\\ 28 & 38 & -1 & 10\end{pmatrix}$$

$$D\cdot D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -4\\ 4 & 31 & 4\\ -4 & 4 & 17\end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸ Intentea conseguir una matriz I_3 de dimensión 3x3 que, multiplicada por cualquier otra matriz A_{3x3} , la deje igual. Es decir : $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$.

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

---oo0oo---

Es la matriz unidad de orden 3: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❺❻)

❶ Comprueba las propiedades 2,3 y 4 anteriores referentes al producto de números por matrices, tomando a = 3, b= 6:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Propiedad 2 $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

$$(3 + 6) \cdot A = 3 \cdot A + 6 \cdot A = 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -35 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -27 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -35 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedad 3 $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

$$a \cdot (A + B) = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot A + a \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

Propiedad 4 $1 \cdot A = A$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❺❼)

❷ Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\0&5\\1&6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&5&6&7\\3&0&9&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4&1&6&0\\0&-1&5&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\3\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

A · (B + C) =

$$\begin{pmatrix}1&4\\0&5\\1&6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&5&6&7\\3&0&9&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1&6&0\\0&-1&5&5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&4\\0&5\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&6&12&7\\3&-1&14&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&2&68&19\\15&-5&70&15\\21&0&96&25\end{pmatrix}$$

A·B+ A·C =

$$\begin{pmatrix}1&4\\0&5\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&5&6&7\\3&0&9&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\0&5\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1&6&0\\0&-1&5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&5&42&-1\\15&0&45&-10\\17&5&60&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-3&26&20\\0&-5&25&25\\4&-5&36&30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&2&68&19\\15&-5&70&15\\21&0&96&25\end{pmatrix}$$

$$(B+C)\cdot D=\left[\begin{pmatrix}-1&5&6&7\\3&0&9&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1&6&0\\0&-1&5&5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&12&7\\3&-1&14&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\-60\end{pmatrix}$$

$$B\cdot D+C\cdot D=\begin{pmatrix}-1&5&6&7\\3&0&9&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1&6&0\\0&-1&5&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\-60\end{pmatrix}$$

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❺❾)

❶ Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$a)\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad b)\ \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad c)\ \begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2]{F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-3F_1]{F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2]{F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2]{F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ Como en la parte izquierda la segunda fila es nula, no tiene inversa. La segunda fila de la matriz original es la primera multiplicada por (-2).

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❷ Calcular la inversa de cada una de las siguientes matrices :

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-4F_1} \\ \xrightarrow{F_3-7F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{3F_1+2F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-2F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Como la tercera fila de la parte izquierda es nula, no tiene inversa.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-2F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F_1+F_3} \\ \xrightarrow{F_2-2F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-2F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+2F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{2F_1+F_3} \\ \xrightarrow{5F_2-F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \\ \xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{10}F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❻❶)

❸ Calcula x, y, z, t para que se cumpla :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Multiplicamos e igualamos las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = 2 \\ 2x - z = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \\ 2y - t = 1 \Leftrightarrow 2y - 2 = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❹ Para las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba:

a) A · (B + C) = (A · B) + (A · C)
b) (A + B) · C = (A · C) + (B · C)
c) A · (B · C) = (A · B) · C

---oo0oo---

a) $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B) + (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$

b) $(A + B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

$(A \cdot C) + (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 107 & 1 \end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❺ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Encuentra X que cumpla 3 · X - 2· A = 5 · B.

---oo0oo---

X es una matriz de 2x2 de la forma X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que ha de cumplir:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a-6 & 3b \\ 3c-10 & 3d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a-6=0 \Leftrightarrow a=2 \\ 3b=30 \Leftrightarrow b=10 \\ 3c-10=5 \Leftrightarrow c=5 \\ 3d+2=-15 \Leftrightarrow d=\dfrac{-17}{3} \end{cases}$$

luego la matriz es X = $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & \dfrac{-17}{3} \end{pmatrix}$.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❻ Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2x2 que cumplan :

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = C \text{ y } A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D$$

---oo0oo---

Resolvemos el sistema matricial:

$$\begin{cases} 2A+B=C \\ A-B=D \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 3A = C + D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A - B = D \Rightarrow B = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❼ Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen :

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Resolvemos el sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix} \longrightarrow 2X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix} \xrightarrow{x(-3)} -3X+3Y=\begin{pmatrix}3&0\\-9&-18\end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -X=\begin{pmatrix}4&5\\-5&-16\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-4&-5\\5&16\end{pmatrix}$$

ahora hallamos Y:

$$X-Y=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix} \Rightarrow Y=X-\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-5\\5&16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&10\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❽Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla :

$$X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot X$$

---oo0oo---

Sea X = $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=a+c \Rightarrow c=0 \\ a+b=b+d \Rightarrow a=d \\ c=c \\ c+d=d \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

la matriz ha de ser de la forma X = $\begin{pmatrix}k&m\\0&k\end{pmatrix}$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❾ Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}-4&7\\3&0\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$$

a) (A · B + (A · C) .
b) (A - B) · C.
c) A · B · C.

---oo0oo---

a) $(A\cdot B)+(A\cdot C)=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&7\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\9&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&3\\9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10\\18&6\end{pmatrix}$.

b) (A – B) · C = $\left[\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&7\\3&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-5\\-3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-15\\6&9\end{pmatrix}$.

c) A · B · C = $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&7\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\9&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&12\\9&-9\end{pmatrix}$.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

⓾ Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que (A - I)^2 = **0**

---oo0oo---

$$(A-I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❶❶ Halla la inversa de las matrices :

$$a)\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[7F_2-2F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{\frac{1}{7}F_1}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

b)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_2+8F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -15 & -6 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2]{\frac{1}{3}F_1}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página ❻❹)

❶ Calcula el rango de las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

❍ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_1}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \\ F_3-2F_2}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, hay tres filas y tres columnas no nulas luego Ran(A) = 3.

❍ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-F_1}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \\ F_3+F_2}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hay 2 filas no nulas y tres columnas no nulas, luego Ran(B) = 2.

❍ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_1}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \\ F_3-5F_2}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hay 2 filas no nulas y cuatro columnas no nulas, luego Ran(C) = 2.

❍ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \\ F_3+F_1 \\ F_4}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-2F_3 \\ F_3 \\ F_4-8F_3}]{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -33 & -15 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \\ F_3 \\ F_4-3F_2}]{F_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, escalonada y 3 filas no nulas y 5 columnas no nulas, luego Ran(D) =3.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

EJERCICIOS PROPUESTOS (Página 65)

❶ Expresa en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$a)\begin{cases} x+z & =10 \\ 2x+3y & =17 \\ 3x+4y+z & =32 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x-y & =7 \\ x-2y & =11 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x-2y-3z-2t & =-19 \\ y+3z+t & =12 \\ 2y+3z+t & =16 \\ 3x-2y+t & =5 \end{cases}$$

---oo0oo---

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷ Comprueba que las inversas de las matrices asociadas a los sistemas del ejercicio anterior son las que damos a continuación :

$$a)\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad c)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resuelve con ellas, matricialmente, los sistemas del ejercicio anterior.

---oo0oo---

$X = A^{-1}\cdot C$

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

❊❊❊⌘⌘◎⌘⌘❊❊❊

PARA PRACTICAR (Página ❼⓿)

Operaciones con matrices

❶ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ calcula:

a) -2A + 3B **b)** 1/2 A · B **c)** B ·(-A) **d)** A · A - B · B

---oo0oo---

a) –2A + 3B = $-2\cdot\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 4\\ -6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 0\\ -6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & 4\\ -12 & 4\end{pmatrix}.$

b) $\frac{1}{2}A\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{17}{2} & -2\\ -\frac{11}{2} & 1\end{pmatrix}.$

c) $B\cdot(-A)=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -6\\ 8 & -6\end{pmatrix}.$

d) A·A – B·B = $\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43 & -16\\ 24 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & -16\\ 22 & -9\end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❷ Efectúa el producto $\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❸ **a)** ¿Son iguales las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA, A + B, A^t - B.

---oo0oo---

a) No, pues son de diferente dimensión: A es de 2x1 y B de 1x2.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$, B·A = $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\end{pmatrix}$, A + B no puede hacerse por que no tienen la misma dimensión, A^t – B = (2 3) – (2 3) = (0 0)

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❹ Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$ **b)** $(3A)^t = 3\,A^t$

---oo0oo---

a) $(A + B)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego $(A + B)^t = A^t + B^t$.

b) $(3A)^t = \left(3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$3\,A^t = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, luego $(3A)^t = 3\cdot A^t$.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❺ Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

$3AA^t - 2I = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❻ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

---oo0oo---

$(A \cdot B)^t = \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, luego está comprobado.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❼ Calcula, en cada caso, la matriz B:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\ 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $B = \frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

Matriz inversa

❽ Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❾ ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

---oo0oo---

Ella misma ya que I · I = I

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❿ Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

---oo0oo---

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/2]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \text{luego}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/4]{-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right) \text{luego } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

❈ ❈ ❈ ⌘⌘◎⌘⌘ ❈ ❈ ❈

❶❶ Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1} , comprueba que:

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

---oo0oo---

a) $(A + B)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{2F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_1]{F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/4]{-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \neq (A+B)^{-1}.$$

b)

$$(A{\cdot}B)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_2-F_1]{F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2]{F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2/(-8)]{F_1/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/8 & -3/8 \end{array}\right) \Rightarrow (A{\cdot}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}{\cdot}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = (A{\cdot}B)^{-1}$$

❈ ❈ ❈ ⌘⌘◎⌘⌘ ❈ ❈ ❈

❶❷ Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2/2}\\\xrightarrow{F_3/3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&0&1/3\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_1}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

Rango de una matriz

❶❸ Di cuáles el rango de las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-2&1&3&3\\0&0&3&2\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

Como A está ya escalonada, Ran(A) = 3, ya que las filas y columnas no nulas son 3.

$$\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-2&1&3&3\\0&0&3&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2+F_1}\\\xrightarrow{F_3}\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&0&3&2\\0&0&3&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3-F_2}\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&0&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ escalonada, como el número menor de las filas y columnas no nulas es 2, Ran(B) = 2. Se cumple que $F_1 = F_3 – F_2$, luego quedan dos filas linealmente independientes.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❶❹ Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&-1\\6&3&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-2F_1}\\\xrightarrow{F_3-F_1}\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&7\\0&-2&5&27\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3+2F_2}\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&7\\0&0&11&41\end{pmatrix}$$ escalonada, como el número menor de las filas y columnas no nulas es 3, Ran(A) = 3, sólo tres de las cuatro columnas son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&-1\\6&3&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-2F_1}\\\xrightarrow{F_3-3F_1}\end{array}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&0&-7\\0&0&-7\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3-F_2}\end{array}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&0&-7\\0&0&0\end{pmatrix}$$ escalonada, como el número menor de las filas y columnas no nulas es 2, Ran(B) = 2, sólo dos de las tres columnas son linealmente independientes ($C_1 = 2C_2$).

$$\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-F_1}\\\xrightarrow{F_3-F_1}\\\xrightarrow{F_4-3F_1}\end{array}\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\0&8&4&4\\0&4&2&2\\0&16&8&8\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{2F_3-F_2}\\\xrightarrow{F_4-2F_2}\end{array}\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\0&8&4&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ escalonada, como el número menor de las filas y columnas no nulas es 2, Ran(C) = 2, sólo dos de las cuatro columnas son linealmente independientes ($C_3 = C_4$ y $F_2 = 2F_3 – F_1$).

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2-F_1}\\\xrightarrow{F_3-F_1}\\\xrightarrow{F_4-F_1}\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$ escalonada, como el número menor de las filas y columnas no nulas es 4, Ran(D) = 4, cuatro columnas son linealmente.

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

Ecuaciones con matrices

❶❺ Halla las matrices X e Y que verifican el sistema :

$$2X+Y=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}=C$$

$$X-Y=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=D$$

---oo0oo---

$$\begin{cases}2X+Y=C\\X-Y=D\end{cases}\xrightarrow{\text{sumamos}}3X=C+D\Leftrightarrow X=\frac{1}{3}(C+D)=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\1&0\end{pmatrix}$$ y ahora

despejamos Y = X – D = $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&2\\0&0\end{pmatrix}$

❋❋❋⌘⌘◎⌘⌘❋❋❋

❶❻ Calcula X tal que X - B^2 = A · B, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

---oo0oo---

$$X=A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\4&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❶❼ Determina los valores de m para los cuales $X=\begin{pmatrix}m&0\\0&2\end{pmatrix}$ verifique X^2 - 5/2 X + I= **0**

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix}m&0\\0&2\end{pmatrix}^2-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}m&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}m^2&0\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{5m}{2}&0\\0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m^2-\frac{5m}{2}+1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2m^2-5m+2=0\Rightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}=\begin{cases}2\\1/2\end{cases}$$ hay dos valores posibles m = 2 ó m = ½.

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈

❶❽ Resuelve: $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

---oo0oo---

Multiplicamos las matrices:

$$\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\3y-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3+2x\\3x+2y=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-3\\3x-y=-2\end{cases}\xrightarrow{\text{sumamos}}4x=-5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

$$y=-3+\frac{5}{4}=-\frac{7}{4}$$

❈❈❈⌘⌘◎⌘⌘❈❈❈