❶❹ Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x-y-z &= k \\ x-y+2z &= 1 \\ 2x+y+kz &= 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \\ 3x+ay+4z &= 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x-2y+z &= 1 \\ mx+y-z &= 1 \\ 3x+4y-2z &= -3 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 3x+2y+az &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$$

---ooOoo---

a) $\begin{cases} x-y-z &= k \\ x-y+2z &= 1 \\ 2x+y+kz &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & k \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & k \\ 0 & 0 & 3 & | & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & | & -k \end{pmatrix}$ Sistema compatible y determinado para todo valor de k.

b) $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \\ 3x+ay+4z &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & a & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-7F_2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2a-20 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2a-20=0 \Leftrightarrow a=10 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{2 Ecuaciones} \\ \text{3 incognitas} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{S.C.I} \\ a\neq 10 \Rightarrow \text{Solución trivial } (0,0,0) \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x-2y+z &= 1 \\ mx+y-z &= 1 \\ 3x+4y-2z &= -3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ m & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & -2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ m+1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 5 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$ Sistema compatible y determinado para cualquier valor de m ya que la tercera ecuación no depende de m.

d) $\begin{cases} 3x+2y+az &= 1 \\ 5x+3y+3z &= 2 \\ x+y-z &= 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & | & 1 \\ 5 & 3 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-3F_3 \\ F_2-5F_3 \\ F_3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a+3 & | & -2 \\ 0 & -2 & 8 & | & -3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2F_1-F_2 \\ F_2 \\ F_3}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a-2 & | & -1 \\ 0 & -2 & 8 & | & -3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a-2=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{2 Ecuaciones} \\ \text{3 incógnitas} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{S.C.I.} \\ a\neq 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{3 Ecuaciones} \\ \text{3 incógnitas} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{S.C.D.} \end{cases}$$

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❶❺ Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible :

$$a)\begin{cases} 2x-y &= 4 \\ -x+y/2 &= -2 \\ x+ky &= 2 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-2y+z &= 3 \\ 5x-5y+2z &= m \end{cases}$$

---ooOoo---

a)

$$\begin{cases} 2x-y & =4 \\ -x+y/2 & =-2 \\ x+ky & =2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & | & 4 \\ -2 & 1 & | & -4 \\ 1 & k & | & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{2F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2k+1 & | & 0 \end{array}\right) 2k+1=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{-1}{2} \text{S.C.I} \\ k \neq \frac{-1}{2} \text{S.C.D.} \end{cases}$$

❍ Si k = -1/2 el sistema consta de una sola ecuación y dos incógnitas, es compatible e indeterminado:

2x – y = 4; y = 2x – 4, si hacemos x = λ, la solución es (x = λ, y = 2λ- 4)

❍ Si k ≠ -1/2, hay dos ecuaciones y dos incógnitas, luego el sistema es compatible y determinado, que resolvemos:

$$\begin{cases} 2x-y=4 \xrightarrow{2)} x=\frac{4+y}{2}=2 \\ (2k+1)y=0 \xrightarrow{1)} y=0 \end{cases}$$ Solución (x = 2, y = 0)

b)
$$\begin{cases} 2x+y-z & =1 \\ x-2y+z & =3 \\ 5x-5y+2z & =m \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 5 & -5 & 2 & | & m \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-2F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-5F_2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & m-15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-2F_2} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-5F_2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & m-15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & m-10 \end{array}\right) \text{m – 10 = 0, m = 10}$$

❍ Si m = 10, hay dos ecuaciones con tres incógnitas, luego el sistema es compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$$\begin{cases} 5y-3z=-5 \xrightarrow{1)} y=\frac{-5+3z}{5} \\ x-2y+z=3 \xrightarrow{2)} x=3+2y-z=3+2\frac{-5+3z}{5}-z=\frac{5+z}{5} \end{cases}$$ si hacemos z = λ, la solución es: $\left(x=\frac{5+\lambda}{5}, y=\frac{-5+3z}{5}\right)$

❍ Si m ≠ 10, el sistema es incompatible ya la 3ª ecuación sería imposible.

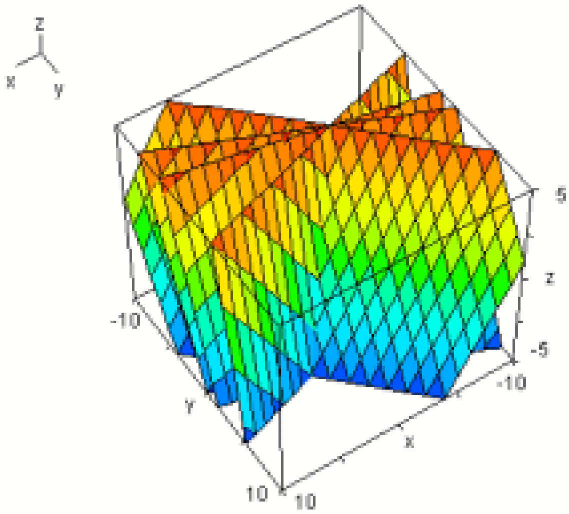
❸❸❸❀❀❖❀❀❸❸❸

❶❻ Resuelve por el método de Gauss es siguiente sistema e interprétalo geométricamente:

$$\begin{cases} x-3y-z & =-1 \\ x+5y+3z & =3 \\ x+y+z & =1 \\ 3x+7y+5z & =5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 1 & 5 & 3 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 7 & 5 & | & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4-3F_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 8 & 4 & | & 4 \\ 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 16 & 8 & | & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{2F_3-F_2} \\ \xrightarrow{F_4-2F_2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 8 & 4 & | & 4 \\ 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 16 & 8 & | & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{2F_3-F_2} \\ \xrightarrow{F_4-2F_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 8 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{s.c.i.}} \begin{cases} x-3y-z=-1 \xrightarrow{2)} x=-1+3y+z=y \\ 8y+4z=4 \xrightarrow{1)} z=\dfrac{4-8y}{4}=1-2y \end{cases}$$

Si hacemos y = λ, la solución es (x = λ, y = λ, z = 1 - 2λ).
Los cuatro planos se cortan según una recta:



❶❼ Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de *m* que lo hacen compatible :

$$a)\begin{cases} x+2y & =3 \\ 2x-y & =1 \\ 4x+3y & =m \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y-2z & =2 \\ 2x+y+3z & =1 \\ 3x+z & =3 \\ x+2y+5z & =m \end{cases}$$

---oo0oo---

a) $$\begin{cases} x+2y & =3 \\ 2x-y & =1 \\ 4x+3y & =m \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & -1 & | & 1 \\ 4 & 3 & | & m \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-4F_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & | & -5 \\ 0 & -5 & | & m-12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & | & m-7 \end{pmatrix}; m-7=0 \Rightarrow m=7$$

❍ Si m = 7, quedan dos ecuaciones con 2 incógnitas luego el sistema es compatible y determinado, lo resolvemos:

$$\begin{cases} x+2y=3 \xrightarrow{2)} x=3-2y=3-2=1 \\ -5y=-5 \xrightarrow{1)} y=1 \end{cases} \quad \text{Solución}(1,1)$$

❍ Si m ≠ 7, la tercera fila es imposible y el sistema sería incompatible.

b) $\left\{\begin{array}{ll} x-y-2z & =2 \\ 2x+y+3z & =1 \\ 3x+z & =3 \\ x+2y+5z & =m \end{array}\right. \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 2 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 5 & | & m \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-3F_1} \\ \xrightarrow{F_4-F_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 3 & 7 & | & -3 \\ 0 & 3 & 7 & | & -3 \\ 0 & 3 & 7 & | & m-2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \\ \xrightarrow{F_4-F_2} \end{array}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 3 & 7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & m+1 \end{pmatrix} m+1=0; m=-1$$

❍ Si m = -1, el sistema tendría dos ecuaciones (las dos ultimas serían nulas) y tres incógnitas y el sistema sería compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-2z=2 \xrightarrow{2)} x=2+y+2z=2+\dfrac{-3-7z}{3}+2z=\dfrac{3-z}{3} \\ 3y+7z=-3 \xrightarrow{1)} y=\dfrac{-3-7z}{3} \end{array}\right.$$

Si hacemos z = λ la solución del sistema es $\boxed{\left(x=\dfrac{3-\lambda}{3}, y=\dfrac{-3-7\lambda}{3}, z=\lambda\right)}$

❍ Si m $\neq$ -1, la cuarta fila seria imposible y el sistema incompatible.

❆❆❆❀❀❖❀❀❆❆❆

❶❽ Discute y resuelve en función del parámetro :

$$a) \left\{\begin{array}{ll} -x+my+z & =2 \\ 2x-y+2z & =0 \\ -x-3z & =-2 \end{array}\right. \qquad b) \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =0 \\ 3x+2y+az & =5 \\ 2x+y+z & =3 \end{array}\right.$$

---oo0oo---

a) $\left\{\begin{array}{ll} -x+my+z & =2 \\ 2x-y+2z & =0 \\ -x-3z & =-2 \end{array}\right. \mapsto \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ -1 & 0 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & | & -2 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ -1 & m & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & -1 & -4 & | & -4 \\ 0 & m & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & -1 & -4 & | & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$$

❍ Si m = 1 la tercera fila sería nula y quedan dos ecuaciones con tres incógnitas, luego el sistema sería compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{l} -x-3z=-2 \xrightarrow{2)} x=2-3z \\ -y-4z=-4 \xrightarrow{1)} y=4-4z \end{array}\right.$$

Si hacemos z = λ, la solución del sistema sería:

(x = 2 - 3λ, y = 4 - 4λ).

❍ Si m ≠ 1 tendríamos tres ecuaciones y tres incógnitas, el sistema sería compatible y determinado, lo resolvemos:

$$\begin{cases} -x-3z=-2 \xrightarrow{3)} x=2-3z=-1 \\ -y-4z=-4 \xrightarrow{2)} z=1 \\ (m-1)y=0 \xrightarrow{1)} y=0 \end{cases}$$

Solución (x = -1, y = 0, z = 1).

b) $\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 3x+2y+az & =5 \\ 2x+y+z & =3 \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & a & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-3F_1} \\ \xrightarrow{F_3-2F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & | & 5 \\ 0 & -1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$$

❍ Si a = 2, la segunda fila sería imposible (0 ≠ 2) y el sistema asociado incompatible.

❍ Si a ≠ 2, habría tres ecuaciones y tres incógnitas, luego el sistema sería compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \xrightarrow{3)} x=-y-z=-\dfrac{4-3a}{a-2}-\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{3a-6}{a-2}=\dfrac{3(a-2)}{a-2}=3 \\ (a-2)z=2 \xrightarrow{1)} z=\dfrac{2}{a-2} \\ -y-z=3 \xrightarrow{2)} y=-3-z=-3-\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{4-3a}{a-2} \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\left(x=3, y=\dfrac{4-3a}{a-2}, z=\dfrac{2}{a-2}\right)$

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❶❾ Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente :

$$a) \begin{cases} \alpha x-y & =1 \\ x-\alpha y & =2\alpha-1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x-y & =1 \\ 2x+3y-5z & =-16 \\ x+\alpha y-z & =0 \end{cases}$$

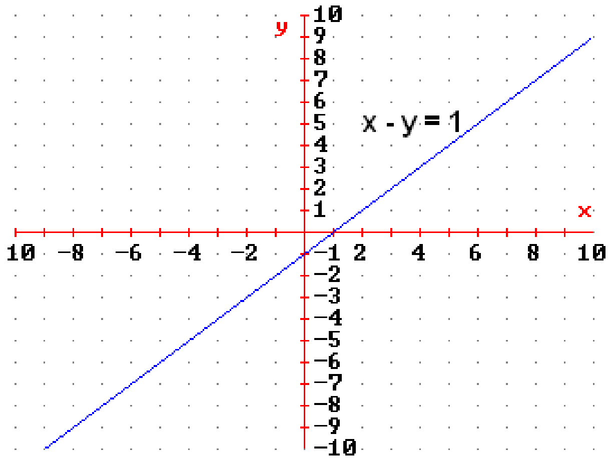
---ooOoo---

a) $\begin{cases} \alpha x-y & =1 \\ x-\alpha y & =2\alpha-1 \end{cases} \to \begin{pmatrix} \alpha & -1 & | & 1 \\ 1 & -\alpha & | & 2\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{\alpha F_2-F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & | & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & | & 2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$

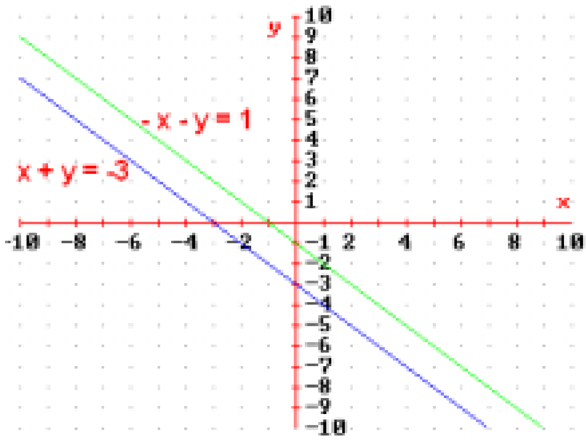
$1-\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{1}=\pm1$, habrá que discutir 3 casos:

❍ Si α = 1, la matriz del sistema queda $\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$,como queda una ecuación con dos incógnitas, luego el sistema sería compatible y determinado. Lo resolvemos:

x- y = 1; x = 1 + y, si hacemos y = λ, la solución es: (x = 1 + λ, y = λ).
Desde el punto de vista geométrico se trata de dos rectas coincidentes:



❍ Si α = - 1, la matriz del sistema queda $\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$ como la ecuación asociada a la 2ª fila sería imposible, el sistema es incompatible. Se trata de os rectas paralelas:



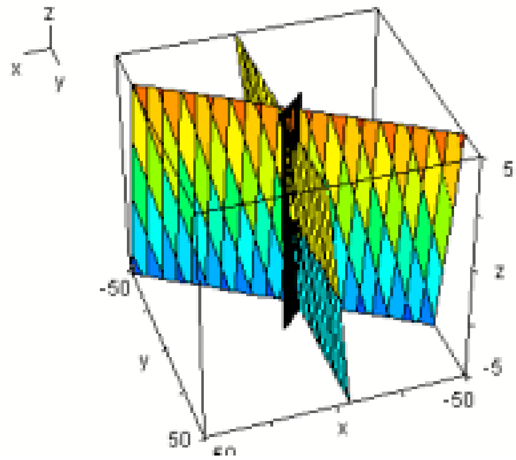
❍ Si α ≠ ± 1, el sistema es compatible y determinado. Las dos rectas son secantes pues se cortan en un punto común.

b)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 2 & 3 & -5 & | & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \\ \xrightarrow{F_3 - F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{5F_3 - F_2} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right) \to 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

❍ Si α = 0, la 3ª fila dría lugar a una ecuación imposible y el sistema sería incompatible. Los tres planos se cortan dos a dos según rectas pero no tienen puntos comunes los tres:



❍ Si $\alpha \neq 0$, el sistema sería compatible y determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❷⓿ Se considera el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 1 \\ x + ay + 3z & = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z & = 3 \end{cases}$$

a) Encuentra un valor del parámetro a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para a = 0

---oo0oo---

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z & = 1 \\ x + ay + 3z & = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z & = 3 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3 - F_2} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ para que el sistema sea incompatible a – 2 = 0, es decir a = 2 con lo que la ecuación asociada a la 2ª fila sería imposible (0 no puede ser igual a 1).

b) Como sólo quedan dos ecuaciones y tres incógnitas, el sistema sería compatible pero indeterminado para $a \neq 2$.

c) Si a = 0, el sistema queda: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \xrightarrow{2)} x=1-2y-3z=2-3z \\ -2y=1 \xrightarrow{1)} y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ si z = λ, la solución es $\boxed{\left(x=2-3\lambda, y=-\dfrac{1}{2}, z=\lambda\right)}$

❆❆❆❀❀❖❀❀❆❆❆

❷❶ Considera el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 2x-2y-z &= 4 \\ x+2y-2z &= -1 \\ x-z &= 1 \end{cases}$$

a) ¿ existe una solución en la que y sea igual a 0?

b) Resuelve el sistema.

c) Interprétalo geométricamente.

---oo0oo---

a) $\begin{cases} 2x-2y-z &= 4 \\ x+2y-2z &= -1 \\ x-z &= 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & | & 4 \\ 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & | & 4 \\ 3 & 0 & -3 & | & 3 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-3F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array}$

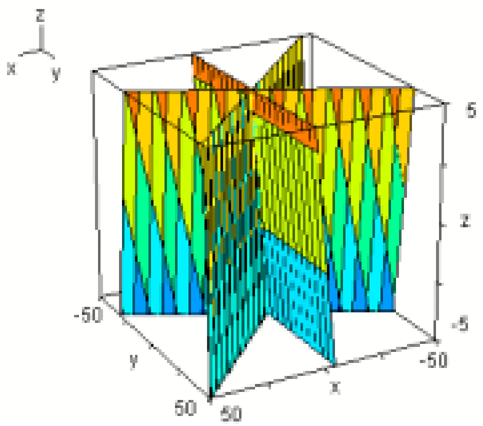
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$ como quedan dos ecuaciones y tres incógnitas el sistema es compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$\begin{cases} 2x-2y-z=4 \xrightarrow{2)} y=\dfrac{-4+2x-z}{2}=\dfrac{-2+z}{2} \\ x-z=1 \xrightarrow{1)} x=1+z \end{cases}$ si hacemos z = λ, la solución es:

$\boxed{\left(x=1+\lambda, y=\dfrac{-2+\lambda}{2}, z=\lambda\right)}$ para que y =0 $\Rightarrow 0=\dfrac{-2+\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda=2$, con lo cual la solución sería (x = 3, y = 0, z = 2).

b) Lo hemos resuelto en el apartado anterior.

c) Tres planos que se cortan según una recta:



❆❆❆❀❀❖❀❀❆❆❆

❷❷ En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 €, y un tercer día, te piden 26 € por una horchata y cuatro batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

---oo0oo---

Para plantear estos ejercicios es conveniente, disponer la información y las incógnitas en una tabla que nos ayude, comenzando por asignar un símbolo a las incógnitas:

		Cantidades			Costes		
Productos	**Precios**	**1er día**	**2º día**	**3er día**	**1er día**	**2º día**	**3er día**
Copas	x	1	4	0	x	4x	0
Horchatas	y	2	4	1	2y	4y	y
Batidos	z	4	0	4	4z	0	4z
				Total (€)	**34**	**44**	**26**

Ya es sencillo plantear el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe cumplirse:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+4z=34 \\ 4x+4y=44 \\ y+4z=26 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 34 \\ 4 & 4 & 0 & | & 44 \\ 0 & 1 & 4 & | & 26 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-4F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 34 \\ 0 & -4 & -16 & | & -92 \\ 0 & 1 & 4 & | & 26 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+4F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 34 \\ 0 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 4 & | & 26 \end{pmatrix}$$ la 2ª fila da lugar a una ecuación imposible (0 no puede ser igual a 12)

luego el sistema no tiene solución (es incompatible), algún día han variado los precios y la cuenta es incorrecta.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❷❸ Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1050 € y el segundo de 950 €.

---oo0oo---

Hay resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (A, B y C):

$$\left\{\begin{array}{l} \text{La suma de cantidades invertidas} = 20000 \\ \text{Los intereses percibidos por el } 1^{\circ} = 1050 \\ \text{Los intereses percibidos por el } 2^{\circ} = 950 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} A+B+C=20000 \\ 0{,}04A+0{,}05B+0{,}06C=1050 \\ 0{,}05A+0{,}06B+0{,}04C=950 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A+B+C=20000 \\ 4A+5B+6C=105000 \\ 5A+6B+4C=95000 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20000 \\ 4 & 5 & 6 & | & 105000 \\ 5 & 6 & 4 & | & 95000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-4F_1} \\ \xrightarrow{F_3-5F_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20000 \\ 0 & 1 & 2 & | & 25000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20000 \\ 0 & 1 & 2 & | & 25000 \\ 0 & 0 & -3 & | & -30000 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{s.c.d.}} \begin{cases} A+B+C=20000 \xrightarrow{3)} A=20000-B-C=5000 \\ B+2C=25000 \xrightarrow{2)} B=25000-2C=5000 \\ -3C=-30000 \xrightarrow{1)} C=10000 \end{cases}$$

Las cantidades invertidas son: (A = 5 000 €, B = 5 000 €, C = 10 000 €)

COMPROBACIÓN

❁ La suma de los invertido son A + B + C = 5 000 €+ 5 000 €+ 10 000 € = 20 000 €.
❁ Intereses del primero = 0,04 · 5 000 € + 0,05 · 5 000 € + 0,06 · 10 000 € = 200 € + 250 € + 600 € = 1 050 €.
❁ Intereses percibidos por el segundo = 0,05 · 5 000 € + 0,06 · 5 000 € + 0,04 · 10 000 € = 250 € + 300 € + 400 € = 950 €.

❅❅❅❀❀❖❀❀❅❅❅

❷❹ Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.

---oo0oo---

Tipo	Cantidades	Ingresos (€)
Originales	x	12x
Copias al 30%	y	8,4y
Copias al 40 %	z	7,2z
Total	600	6384

Tenemos dos ecuaciones, la tercera es la relación entre las cantidades de los distintos tipos de videos:

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 12x+8{,}4y+7{,}2z=6384 \\ y+z=\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \\ 120x+84y+72z=63840 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 600 \\ 120 & 84 & 72 & | & 63840 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-120F_1} \\ \xrightarrow{F_3+F_1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 600 \\ 0 & -36 & -48 & | & -8160 \\ 0 & 3 & 3 & | & 600 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+12F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 600 \\ 0 & 0 & -12 & | & -960 \\ 0 & 3 & 3 & | & 600 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} x+y+z=600 \xrightarrow{3)} \\ -12z=-960 \xrightarrow{1)} \\ 3y+3z=600 \xrightarrow{2)} \end{cases}$$

$x=600-y-z=600-120-80=400$

$z=\dfrac{-960}{-12}=80$

$y=\dfrac{600-3z}{3}=\dfrac{600-240}{3}=120$

luego las copias vendidas al 30 % de descuento fueron y = 120.

Comprobación

❁ Ejemplares vendidos = x + y + z = 400 + 80 + 120 = 600 ejemplares.
❁ Copias defectuosas = y + z = 200 = la mitad de las originales = x/2 = 400/2.
❁ Ingresos = 12x + 0,4·12y + 0,3·12z = 12·400 + 8,4· 120 + 7,2 ·80 = 6384 €.

❂❂❂❁❁❖❁❁❂❂❂

❷❺ Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Sí el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

---oo0oo---

Tipo billete	Cantidad de billetes	Dinero (€)
De 10 €	x	10x
De 20 €	y	20y
De 50 €	z	50z
Total	**95**	**2 000**

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & -3 & -1 & -95 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+3F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & 0 & 11 & 220 \end{array}\right) \xrightarrow{S.C.D.} \begin{cases} x+y+z=95 \xrightarrow{3)} x=95-y-z=95-25-20=50 \\ y+4z=105 \xrightarrow{2)} y=105-4z=105-80=25 \\ 11z=220 \xrightarrow{1)} z=\dfrac{220}{11}=20 \end{cases}$$

Solución: (50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €).

Comprobación

❁ Total de billetes = De 10 € + de 20 € + de 50 € = x + y + z = 50 + 25 + 20 = 95 billetes
❁ Dinero = 10x + 20y + 50z = 10·50 + 20·25 + 50· 20 = 500 € + 500 € + 1 000 € = 2 000 €.
❁ Nº de billetes de 10 € = x = 50 billetes = doble (nº de billetes de 20 €) = 2 · 25.

❂❂❂❁❁❖❁❁❂❂❂

❷❻ Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

---oo0oo---

Cajas	Monedas	Pasa 1 B → A
A	x	x + 1
B	y	y - 1
C	z	z
Total	**36**	**36**

$$\begin{cases} \text{Monedas en total} = 36 \\ \text{El tipo A} = 2 + \text{tipo B} + \text{tipo C} \\ \text{Nº tipo A} = 2(\text{nº tipo B}), \text{después del traslado} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 0 & | & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{F_3 - F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & -2 & -2 & | & -34 \\ 0 & -3 & -1 & | & -39 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 - 2F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & 4 & 0 & | & 44 \\ 0 & -3 & -1 & | & -39 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.D.}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \xrightarrow{3)} x = 36 - y - z = 36 - 11 - 6 = 19 \\ 4y = 44 \xrightarrow{1)} y = \dfrac{44}{4} = 11 \\ -3y - z = -39 \xrightarrow{2)} z = 39 - 3y = 39 - 33 = 6 \end{cases}$$

Había 19 monedas en A, 11 en B y 6 en C.

Comprobación

❁ Dinero total = x + y + z = 19 € + 11€ + 6 € = 36 € (ya que cada moneda es de 1 €).
❁ N º monedas en A = 19 excede en 2 a la suma de B + C = 11 + 6 = 17.
❁ Si pasamos 1 moneda de B a A, B se queda con 10 y A con 20, que son el doble de las que hay en A.

❁❁❁❁❁❖❁❁❁❁❁

❷❼ Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600000 €. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?

---oo0oo---

Objetos	Precios	Beneficio esperado	Ganancias
A	x	0,2x	0,8x
B	y	0,5y	0,9y
C	z	0,25z	0,85z
Total	**2 MM**	**600 000**	**1 700 000**

$$\begin{cases} x+y+z=2000000 \\ 0{,}2x+0{,}5y+0{,}25z=600000 \\ 0{,}8x+0{,}9y+0{,}85z=1700000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2000000 \\ 20x+50y+25z=60000000 \\ 80x+90y+85z=170000000 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000000 \\ 20 & 50 & 25 & 60000000 \\ 80 & 90 & 85 & 170000000 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-20F_1} \\ \xrightarrow{F_3-80F_1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000000 \\ 0 & 30 & 5 & 20000000 \\ 0 & 10 & 5 & 10000000 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{3F_3-F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000000 \\ 0 & 30 & 5 & 20000000 \\ 0 & 0 & 10 & 10000000 \end{array}\right) \xrightarrow{S.C.D.} \begin{cases} x+y+z=2000000 \xrightarrow{3)} \\ 30y+5z=20000000 \xrightarrow{2)} \\ 10z=10000000 \xrightarrow{1)} \end{cases}$$

$$x = 2000000 - y - z = 2000000 - 500000 - 1000000 = 500000$$

$$y = \frac{20000000 - 5z}{30} = 500000$$

$$z = 1000000$$

Comprobación

❁ Precio de los tres objetos = x + y + z = 500 000 € + 500 000 € + 1 000 000 € = 2 000 000 €.
❁ Ganancias esperadas = 0,2x + 0,5y + 0,25z = 0,2 · 500 000 € + 0,5·500 000 € + 0,25· 1 000 000 € = 100 000 € + 250 000 € + 250 000 € = 600 000 €.
❁ Ganancias obtenidas = 0,8x + 0,9y + 0,85z = 0,8 · 500 000 € + 0,9·500 000 € + 0,85· 1 000 000 € = 100 000 € + 250 000 € + 250 000 € = 17600 000 €.

❁❁❁❁❁❖❁❁❁❁❁

❷❽ Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

---oo0oo---

Cursos	Empleados	Dinero
A	x	400x
B	y	160y
C	z	200z
Total	**100**	**27 200 €**

Las dos primeras ecuaciones están claras, las obtenemos directamente de la tabla, la que falta es:
Cantidad dedicada al curso A = 5 ·(cantidad dedicada al curso B), es decir
400x = 5 ·160y; 400x = 800y; x = 2y, x – 2y = 0. Luego el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 400x+160y+200z=27200 \\ x-2y=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 10 & 4 & 5 & 680 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-5F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & -1 & 0 & 180 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{2F_2-F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 100 \\ 9 & 0 & 0 & | & 360 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.D.}} \begin{cases} x+y+z=100 \xrightarrow{3)} z = 100 - x - y = 100 - 40 - 20 = 40 \\ 9x = 360 \xrightarrow{1)} x = \dfrac{360}{9} = 40 \\ x - 2y = 0 \xrightarrow{2)} y = \dfrac{x}{2} = \dfrac{40}{2} = 20 \end{cases}$$

Solución: (Curso A = x = 40 empleados, curso B = y = 20 empleados, curso C = z = 40)

Comprobación

❁ **Nº de empleados que participan en los tres cursos = x + y + z = 40 + 20 + 40 = 100.**
❁ **Euros destinados a formación = 400x+ 160y + 200z = 400 · 40 + 160 · 20 + 200 · 40 = 1 600 + 3 200 + 8 000 = 27 200 €.**
❁ **Empleados que participan en el curso A = x = 40 empleados = 2 (empleados que participan en el curso B) = 2y = 2 · 20 = 40 empleados.**

❁❁❁❁❁❖❁❁❁❁❁

❷❾ Antonio tiene un año más que Juan, y Luis, uno más que Ángel. Determina la edad de los cuatro sabiendo que la de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la de Antonio y que la de Ángel es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la de Juan.

---ooOoo---

Edad de Antonio = x.
Edad de Juan = uno menos que Antonio = x – 1.
Edad de Luis = y.
Edad de Ángel = uno menos que Luis = y –1.

Edad de Luis = (tercera parte + séptima parte) de la de Antonio.
Edad de Ángel = (cuarta parte + quinta parte) de Juan.
Pasamos estas dos últimas ecuaciones a variables:

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\right)x \\ y-1 = \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21y = 10x \\ 20y - 20 = 9x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 21y = 0 \\ 9x - 20y = -11 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 10 & -21 & | & 0 \\ 9 & -20 & | & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{10F_2 - 9F_1} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -21 & | & 0 \\ 0 & -11 & | & -110 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.D.}} \begin{cases} 10x - 21y = 0 \xrightarrow{2)} x = \dfrac{21y}{10} = \dfrac{21\cdot 10}{10} = 21 \\ -11y = -110 \xrightarrow{1)} y = \dfrac{-110}{-11} = 10 \end{cases}$$ luego las edades son:

Antonio = x = 21 años.
Juan = x – 1 = 20 años.
Luis = y = 10 años.
Ángel = y – 1 = 9 años.

Comprobación

Edad de Luis = 10 = (tercera parte + séptima parte) de Antonio = $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)21=\frac{10}{21}21=10$.

Edad de Ángel = 9 =(cuarta parte + quinta parte) de Juan = $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)20=\frac{9}{20}20=9$.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❸⓿ Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno poseyera en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenia cada jugador al comenzar?

---oo0oo---

Pierde	Inicial	1ª partida	2ª partida	3ª partida
Primero	x	x – y - z	2(x-y-z)	4(x-y-z)
Segundo	y	2y	2y – 2z – (x – y – z)=-x+3y-z	2(-x+3y-z)
Tercero	z	2z	4z	4z-2(x-y-z)-(-x+3y-z)
Total				**24**

Dela última columna tenemos las tres ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(-x+3y-z)=24 \\ -x-y+7z=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=6 \\ -x+3y-z=12 \\ -x-y+7z=24 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3+F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{S.C.D.}} \begin{cases} x-y-z=6 \xrightarrow{3)} x=6+y+z=6+21+12=39 \\ 2y-2z=18 \xrightarrow{2)} y=9+z=9+12=21 \\ 4z=48 \xrightarrow{1)} z=\frac{48}{4}=12 \end{cases}$$

El primero tenía inicialmente 39 €, el segundo 21 € y el tercero 12 €.

Comprobación

Pierde	Inicial (€)	1ª partida(€)	2ª partida(€)	3ª partida(€)
Primero	39	6	12	24
Segundo	21	42	12	24
Tercero	12	24	48	24
Total				**24**

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❸❶ Un joyero tiene tres clases de monedas: A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo B tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo C tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

---oo0oo---

Tipo monedas	Cantidad	Oro (g)	Plata (g)	Cobre (g)
A	x	2x	4x	14x
B	y	6y	4y	10y
C	z	8z	6z	6z
Total		**44**	**44**	**112**

De las tres últimas columnas obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2x+6y+8z=44 \xrightarrow{:2} \\ 4x+4y+6z=44 \xrightarrow{:2} \\ 14x+10y+6z=112 \xrightarrow{:2} \end{cases} \begin{cases} x+3y+4z=22 \\ 2x+2y+3z=22 \\ 7x+5y+3z=56 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 22 \\ 2 & 2 & 3 & | & 22 \\ 7 & 5 & 3 & | & 56 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-7F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 22 \\ 0 & -4 & -5 & | & -22 \\ 0 & -16 & -25 & | & -98 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-4F_2} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 22 \\ 0 & -4 & -5 & | & -22 \\ 0 & 0 & -5 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{S.C.D.} \begin{cases} x+3y+4z=22 \xrightarrow{3)} x=22-3y-4z=22-9-8=5 \\ -4y-5z=-22 \xrightarrow{2)} y=\dfrac{22-5z}{4}=\dfrac{22-10}{4}=3 \\ -5z=-10 \xrightarrow{1)} z=\dfrac{-10}{-5}=2 \end{cases}$$

Debe fundir 5 monedas de tipo A, 3 de tipo B y 2 de tipo C.

Comprobación

Tipo monedas	Cantidad	Oro (g)	Plata (g)	Cobre (g)
A	5	2·5 = 10	4·5 = 20	14·5 = 60
B	3	6·3 = 18	4·3 = 12	10·3 = 30
C	2	8·2 = 16	6·2 = 12	6·2 = 12
Total		**44**	**44**	**112**

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❸❷ Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?

---oo0oo---

La primera tienda solicita x electrodomésticos, la segunda y y la tercera z.

$$\begin{cases} \text{Total de electr.} = 42 \\ \text{primera} = \text{segunda} + \text{tercera} \\ \text{Segunda} = 1{,}2(\text{Primera}/2 + \text{tercera}/3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=42 \\ x=y+z \\ y=1{,}2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=42 \\ x-y-z=0 \\ 3x-5y+2z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 42 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 3 & -5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-3F_1} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 42 \\ 0 & -2 & -2 & | & -42 \\ 0 & -8 & -1 & | & -126 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-4F_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 42 \\ 0 & -2 & -2 & | & -42 \\ 0 & 0 & 7 & | & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow{S.C.D.} \begin{cases} x+y+z=42 \xrightarrow{3)} x=42-y-z=42-15-6=21 \\ y+z=21 \xrightarrow{2)} y=21-z=21-6=15 \\ 7z=42 \xrightarrow{1)} z=\dfrac{42}{7}=6 \end{cases}$$

La primera tienda solicita 21 electrodomésticos, la segunda 15 y la tercera 6.

Comprobación

Total = x + y + z = 21 + 15 + 6 = 42.

Solicita la 1ª = 21 = solicita la 2ª + solicita la 3ª = 15 + 6.

Segunda = 15 = $1{,}2\left(\frac{Primera}{2}+\frac{tercera}{3}\right)=1{,}2\left(\frac{21}{2}+\frac{6}{3}\right)=1{,}2\frac{75}{6}=15$

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❸❸ Se mezclan 60 l de vino blanco con 20 l de vino tinto y se obtiene un vino de 10 grados (10% de alcohol). Si, por el contrario, se mezclan 20 l de blanco con 60 l de tinto, se obtiene un vino de 11 grados. ¿Qué graduación tendrá una mezcla de 40 l de vino blanco y 40 l de vino tinto?

---oo0oo---

x = porcentaje de alcohol en el vino blanco.
y = porcentaje de alcohol en el vino tinto.

$$\begin{cases}\frac{60\cdot x}{100}+\frac{20\cdot y}{100}=(60+20)\frac{10}{100}\\ \frac{20\cdot x}{100}+\frac{60\cdot y}{100}=(20+60)\frac{11}{100}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}6x+0{,}2y=8\\0{,}2x+0{,}6y=8{,}8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=40\\x+3y=44\end{cases}\to\begin{pmatrix}3&1&|&40\\1&3&|&44\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_2-3F_2}\\\xrightarrow{F_2}\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-8&|&-92\\1&3&|&44\end{pmatrix}\xrightarrow{S.C.D.}\begin{cases}-8y=-92\xrightarrow{1)}y=\frac{-92}{-8}=11{,}5\\x+3y=44\xrightarrow{2)}x=44-3y=44-34{,}5=9{,}5\end{cases}$$

Si mezclamos 40 l de vino blanco de gradación x = 9,5 % con 40 l de vino tinto (gradación 11,5 %) se obtienen 80 l de mezcla de gradación:

40·0,095 + 40·0,115 = 8,4 %.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

CUESTIONES TEÓRICAS (página 46)

❸❹ ¿Se puede conseguir que un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones con 2 incógnitas sea incompatible añadiéndole otra ecuación?

---oo0oo---

Si, si la ecuación que añadimos es combinación lineal de la incógnitas pero no de los términos independientes, por ejemplo:

El sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_1+F_2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{S.C.D} \begin{cases} x+y=2 \xrightarrow{2)} x=2-y=2-3=-1 \\ 3y=9 \xrightarrow{1)} y=3 \end{cases}$$

tiene por solución (x = -1, y = 3) si añadimos una ecuación que sea $2F_1 + F_2 = 2(x+y)+(-x+2y) = x + 3y$ pero igualada a un número distinto de 2·2 + 7 = 11, por ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=7 \\ x+3y=9 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_1+F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{3F_2-2F_3} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

la última fila es una desigualdad ($0 \neq 3$) y eso hace el sistema incompatible.

❁❁❁✿✿❖✿✿❁❁❁

❸❺ Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.

---oo0oo---

No, si ya las dos ecuaciones que forman el sistema ya son incompatibles, el que añadamos otra ecuación no va a cambiar ese hecho, seguirá siendo incompatible.

❁❁❁✿✿❖✿✿❁❁❁

❸❻ Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} 3x-2y+z = 5 \\ 2x-3y+z = -4 \end{cases}$

Añade una ecuación para que el sistema sea:

a) Incompatible.

b) Compatible determinado.

---oo0oo---

a) Para que sea incompatible, la ecuación a añadir ha de tener las incógnitas como una combinación lineal de las dos que tenemos, pero no los términos independientes, es decir, la nueva ecuación será:

$\alpha(3x – 2y + z) + \beta(2x – 3y + z) = a$ y $a \neq 5\alpha - 4\beta$, por ejemplo, si $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, la nueva ecuación sería $5x – 5y + 2z = 3 \neq 1$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \\ 5x-5y+2z=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{3F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{3F_3-5F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -22 \\ 0 & -5 & 1 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

la última fila hace el sistema incompatible.

b) La ecuación no ha de ser proporcional ni combinación lineal de las dadas, ni de la forma del apartado a), por ejemplo x = 0:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 5 \\ 2 & -3 & 1 & | & -4 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 5 \\ -1 & -1 & 0 & | & -9 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z=5 \xrightarrow{3)} z=5+2y=23 \\ x+y=9 \xrightarrow{2)} y=9 \\ x=0 \end{cases}$$

La solución: (x = 0, y = 9, z = 23)

❸❼ Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+y-z &= 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= -1 \end{cases}$$

---oo0oo---

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones, lo que no ocurre en este caso, ya que el primero es compatible e indeterminado con infinitas soluciones (dos ecuaciones y tres incógnitas) y el segundo una solución única.

❸❽ Encuentra dos valores del parámetro a para los cuales este sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 0 \\ ax+y+2z &= 1 \\ x+3z &= 2 \\ 2x+az &= 3 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ a & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 3 & | & 2 \\ 2 & 0 & a & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4-2F_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & a-4 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \\ \xrightarrow{F_4-2F_3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & | & -1 \end{pmatrix}$$

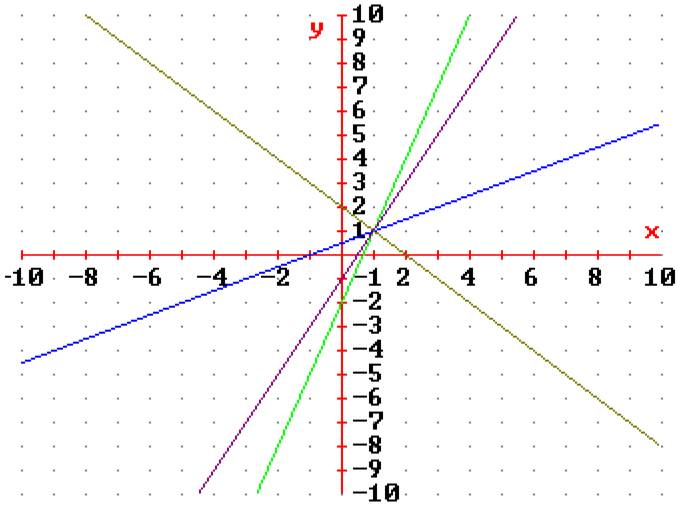
Si a = 1, la 2ª fila daría una ecuación incompatible: 0 = 1.
Si a = 6, la 4ª fila daría una ecuación incompatible: 0 = -1.

❸❾ Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?

---oo0oo---

No, pues pueden ser dos pares de rectas secantes en el mismo punto, la solución única.

Por ejemplo, los sistemas $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ tienen por solución (x = 1, y = 1), los mismos términos independientes pero distintos coeficientes, son cuatro rectas secantes en el (1,1) y diferentes:



PARA PROFUNDIZAR (página 49)

40 En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en 3 estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,2 €/litro y el precio en B, de 1,18 €/litro, pero ha olvidado el precio en C (supongamos que son m €/litro, con m desconocido). También recuerda que:

• La suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
• El número de litros consumidos en B fue el mismo que en C.
• El gasto en litros en A superó al de B en 12,60 €.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudia la compatibilidad del sistema en función de m. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en C?

---oo0oo---

Si llamamos:

x = nº de litros repostados en A.
y = nº de litros repostados en B.
z = nº de litros repostados en C.

Se cumplirá:

$$\begin{cases}1{,}2x+1{,}18y=mz+46{,}80\\ y=z\\ 1{,}2x=1{,}18y+12{,}60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1{,}2x+1{,}18y-mz=46{,}80\\ y-z=0\\ 1{,}2x-1{,}18y=12{,}60\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}1{,}2 & 1{,}18 & -m & | & 46{,}80\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & | & 12{,}60\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1-F_3}\\ \xrightarrow{F_2}\\ \xrightarrow{F_3}\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2{,}36 & -m & | & 34{,}2\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & | & 12{,}60\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1-2{,}36F_2}\\ \xrightarrow{F_2}\\ \xrightarrow{F_3}\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -m+2{,}36 & | & 34{,}2\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & | & 12{,}60\end{pmatrix}$$

Como –m + 2,36 = 0, si m = 2,36, tenemos:

❶ Si m = 2,36, la primera fila daría una ecuación imposible y elsitema sería incompatible. A 2,36 € no puede vender la gasolina la estación C.

❷ Si m ≠ 2,36 el sistema es compatible y determinado.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❹❶Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:

$$a)\begin{cases}x+y+z=a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{cases}\qquad b)\begin{cases}ax+y-z=0\\ 2x+ay=2\\ -x+z=1\end{cases}$$

---ooOoo---

a) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & a-1\\ 2 & 1 & a & | & a\\ 1 & a & 1 & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\ \xrightarrow{F_2-2F_1}\\ \xrightarrow{F_3-F_1}\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & a-1\\ 0 & -1 & a-2 & | & 2-a\\ 0 & a-1 & 0 & | & 2-a\end{pmatrix}$$

① Si a = 1, la matriz queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & -1 & -1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 1\end{pmatrix}$ y el sistema asociado es incompatible ya la tercera fila da lugar a una ecuación imposible.

② Si a = 2, la matriz queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & -1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$ el sistema $\begin{cases}x+y+z=1\xrightarrow{3)}x=1-z\\ -y=0\xrightarrow{2)}y=0\\ y=0\xrightarrow{1)}y=0\end{cases}$ es compatible e indeterminado , haciendo z = λ, la solución es (x = 1 - λ, y = 0, z = λ)

③ Si a ≠ 1 ∧ y a ≠ 2, el sistema es compatible y determinado.

b) $$\begin{pmatrix}a & 1 & -1 & | & 0\\ 2 & a & 0 & | & 2\\ -1 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{F_1+F_3}\\ \xrightarrow{F_2}\\ \xrightarrow{F_3}\end{matrix}\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 0 & | & 1\\ 2 & a & 0 & | & 2\\ -1 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{aF_1-F_2}\\ \xrightarrow{F_2}\\ \xrightarrow{F_3}\end{matrix}\begin{pmatrix}a^2-a-2 & 0 & 0 & | & a-2\\ 2 & a & 0 & | & 2\\ -1 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

① Si a = - 1 la matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -3 \\ 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ -1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ y el sistema es incompatible.

② Si a = 2 la matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 2 \\ -1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible e indeterminado, lo resolvemos:

$\begin{cases} x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \\ -x + z = 1 \rightarrow z = 1 + x \end{cases}$ si hacemos x = λ, la solución es (x = λ, y = 1 - λ, z = 1 + λ)

③ Si a ≠ -1 ∧ a ≠ 2, el sistema es compatible y determinado.

❁❁❁❁❁❖❁❁❁❁❁

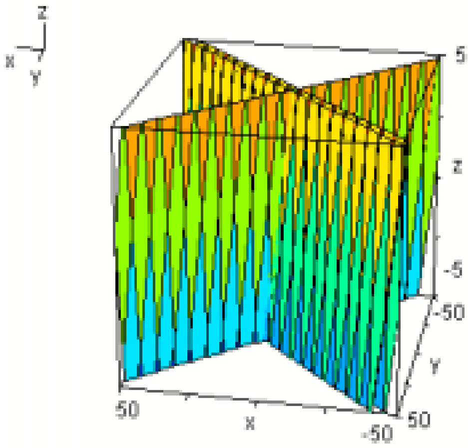
❹❷ Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *a*:

$\begin{cases} ax + y + z - 4 & = 0 \\ x + y + z + 1 & = 0 \\ x - ay + z - 1 & = 0 \end{cases}$ Interprétalo geométricamente.

---oo0oo---

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -a & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1 - F_3} \\ \xrightarrow{F_2 - F_3} \\ \xrightarrow{F_3} \end{matrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1+a & 0 & | & 3 \\ 0 & 1+a & 0 & | & -2 \\ 1 & -a & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

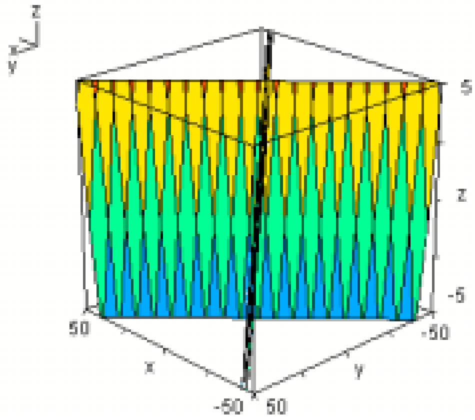
① a = 1 ⇒ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ el sistema es incompatible ya que las dos primeras ecuaciones dan distintos valores para y (y = 3/2, y = -1).



Los dos primeros planos son paralelos (incompatibilidad) y el tercero les corta.

② a = - 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ el sistema es incompatible (segunda ecuación imposible)

Los dos últimos planos son paralelos y el tercero los corta.



❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❹❸ Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

☞ Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.

---oo0oo---

Si sumamos las 5 ecuaciones, como nos recomienda el autor:

4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76, es decir 4(x + y + z + t + w) = 76, o sea x + y + z + t + w = 19.

❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + y + z + t por 17 tenemos:
x + y + z + t + w = 17 + w = 19, luego w = 19 – 17 = 2.
❍ Si tenemos en cuenta la segunda ecuación y sustituimos x + y + z + w por 16 tenemos:
x + y + z + t + w = 16 + t = 19, luego t = 19 – 16 = 3.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + y + t + w por 15 tenemos:
x + y + z + t + w = 15 + z = 19, luego z = 19 – 15 = 4.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + z + t + w por 14 tenemos:
x + y + z + t + w = 14 + y = 19, luego y = 19 – 14 = 5.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos y + z + t + w por 14 tenemos:
x + y + z + t + w = 14 + x = 19, luego x = 19 – 15 = 5.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❹❹ Nos dicen que x, y, z, t y w son números enteros y que k vale 36 ó 38. Decide razonadamente cuál de los dos es su valor y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{cases}$$

---oo0oo---

Si procedemos, como en el ejercicio anterior, a sumar las 5 ecuaciones, tenemos:

4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k, es decir 4(x + y + z + t + w) = 148 + k, o sea:

x + y + z + t + w = 148/4 + k/4; x + y + z + t + w = 37 + k/4, luego k ha de ser múltiplo de cuatro para que la suma sea entera (ya que se nos dice que los sumandos lo son) y 36 es múltiplo de 4 y 38 no, entonces deducimos que k = 36 y, por tanto x + y + z + t + w = 46.

Para hallar las incógnitas procedemos como en el ejercicio anterior:

❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + y + z + t por 35 tenemos:
x + y + z + t + w = 35 + w = 46, luego w = 46 – 35 = 11.
❍ Si tenemos en cuenta la segunda ecuación y sustituimos x + y + z + w por 36 tenemos:
x + y + z + t + w = 36 + t = 46, luego t = 46 – 36 = 10.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + y + t + w por 38 tenemos:
x + y + z + t + w = 38 + z = 46, luego z = 46 – 38 = 8.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos x + z + t + w por 39 tenemos:
x + y + z + t + w = 39 + y = 46, luego y = 46 – 39 = 7.
❍ Si tenemos en cuenta la primera ecuación y sustituimos y + z + t + w por 36 tenemos:
x + y + z + t + w = 36 + x = 46, luego x = 46 – 36 = 10.

❁❁❁❀❀❖❀❀❁❁❁

❹❺ Una cuadrilla de 5 obreros se compromete a podar los 222 árboles de una plantación. Trabajan de lunes a sábado. Cada día, cuatro de ellos podan y el quinto los atiende (repone herramientas, les da agua, recoge los troncos que caen...). Cada obrero poda el mismo número diario de árboles; es decir, si Alberto poda 8 árboles un día, podará 8 árboles cada día que intervenga. Los resultados son:

Lunes: 35 árboles podados.
Martes: 36 árboles podados.
Miércoles: 36 árboles podados.
Jueves: 38 árboles podados.
Viernes: 38 árboles podados.
Sábado: 39 árboles podados.

Calcula cuántos árboles diarios poda cada uno de los cinco obreros sabiendo que ninguno de ellos está los seis días podando.

---oo0oo---

w = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el lunes.
t = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el martes.
z = nº de árboles diarios que poda el que descansa el jueves.
y = nº de árboles diarios que poda el que descansa el sábado.
x = nº de árboles diarios que poda el obrero que falta.
(Descansará el miércoles o el viernes; coincidirá con t o con z).

Luego los árboles que podan cada día, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{cases}$$ en donde k será 36 o 38

Esto es justo el ejercicio anterior que ya hemos resuelto, luego:
w = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el lunes = 11.
t = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el martes = 10.
z = nº de árboles diarios que poda el que descansa el jueves = 8.
y = nº de árboles diarios que poda el que descansa el sábado = 7
x = nº de árboles diarios que poda el obrero que falta = 10.

Comprobación

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 + 7 + 8 + 10 = 35 \\ x + y + z + w = 10 + 7 + 8 + 11 = 36 \\ x + y + t + w = 10 + 7 + 10 + 11 = 38 \\ x + z + t + w = 10 + 8 + 10 + 11 = 39 \\ y + z + t + w = 7 + 8 + 10 + 11 = 36 = k \end{cases}$$