PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE (Pág 310)

Máquina empaquetadora

a) Como la distribución de los pesos de los sacos es normal de media μ = 100 kg y desviación típica $\sigma = 2$ kg, obteniendo 101 kg en una medida, no parece que sea suficiente para desconfiar de la afirmación del fabricante.

b) En este caso sí, pues ya tenemos 50 sacos; es decir, 50 unidades. Como la población se distribuye *N*(100, 2), sabemos que las medias muestrales siguen una distribución normal de media μ (x) = μ = 100 kg y desviación típica $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{50}}$ = 0,28.

Por tanto, en este caso sí parece razonable rechazar la afirmación del fabricante.

Pilas que duran y duran

a) Aunque la duración sea bastante inferior a lo esperado como sólo hacemos una observación, esta no nos permite rechazar la afirmación.

b) En este caso, con una muestra de 100 pilas, sí parece razonable rechazar la afirmación.

c) No rechazaríamos la afirmación, pues el resultado obtenido con una muestra de 100 pilas está de acuerdo con lo que se decía.

¿Monedas falsas?

Reflexionamos sobre cada una de las siguientes experiencias.
a) *Lanzamos una moneda 10 veces y obtenemos 6 caras.*
b) *Lanzamos una moneda 100 veces y obtenemos 60 caras.*
c) *Lanzamos una moneda 1000 veces y obtenemos 600 caras.*
¿Podemos deducir de alguna de ellas que la moneda es incorrecta? ¿Con cuál de ellas llegamos a esa conclusión con más seguridad? (Responde intuitivamente).

a) Posiblemente esté trucada o sea defectuosa.
De los apartados **b)** y **c)** podemos deducir que la moneda es incorrecta.

La grasa en la leche

En este caso se trata de dilucidar si la diferencia de ese 0,6% es atribuible al azar o no se aprenderá a hacerlo en la unidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS (Pág 314)

① *Repite, paso a paso, el caso 1 para un nivel de significación α= 0,01.*

❶ Establecimiento de la hipótesis
p = proporción de "5" en la población.

Hipótesis nula = $H_0 : p = \frac{1}{6}$, hipótesis alternativa = $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ (contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 1/6 , supuesta	pr = 0,25	$\mu(p) = p = \frac{1}{6}$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}167\cdot 0{,}833}{100}} = 0{,}037$

❸ Regiones crítica y de aceptación

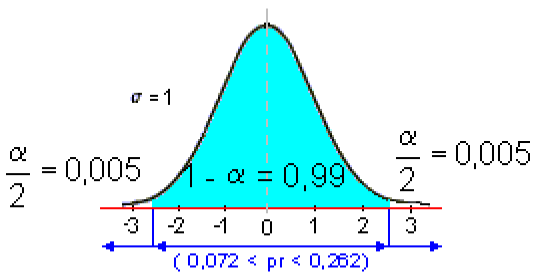
Si grado de significación = α = 0,01(grado de confianza = 1 - α = 0,99) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ el valor de z que deja por debajo de si 0,99 + 0,005 = 0,995 es $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p) < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p)\right) \equiv$

$\equiv \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}} < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv (0{,}167 - 2{,}575\cdot 0{,}037 < pr < 0{,}167 + 2{,}575\cdot 0{,}037) \equiv$

$\equiv$ (0,072 < pr < 0,262).

Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} pr \leq 0{,}072 \\ pr \geq 0{,}262 \end{cases}$



❹ Decisión

Como pr = 0,25 ∈ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la proporción de “5” en el dado es p = 1/6 y , por tanto, el dado se considera correcto.

❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸

②. *Repite, paso a paso, el caso 2 para un nivel de significación α = 0,10.*

❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸❸

❶ Establecimiento de la hipótesis

Media de los conocimientos de los soldados = μ.

Hipótesis nula = $H_0 : \mu = 102$, hipótesis alternativa = $H_1 : \mu \neq 102$ (contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 102 , supuesta	$\bar{x}$ = 101	$\mu(\bar{x}) = \mu = 102$
Desviación Típica	σ = 11		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{11}{\sqrt{400}} = 0{,}55$

❸ Regiones crítica y de aceptación (Contraste bilateral)

Si grado de significación = α = 0,1(grado de confianza = 1 - α = 0,90)$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$ el valor de z que deja por debajo de si 0,90 + 0,05 = 0,95 es $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

✪ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv (102 - 1{,}645 \cdot 0{,}55 < \bar{x} < 102 + 1{,}645 \cdot 0{,}55) \equiv (101{,}1 < \bar{x} < 102{,}9)$.

✪ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \leq 101{,}1 \\ \bar{x} \geq 102{,}9 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 101 $\in S_1$ (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula, los soldados no tienen el mismo nivel de conocimientos de hace cinco años.

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁

EJERCICIOS PROPUESTOS (Pág 315)

① **a)** *En una población para la cual es σ = 29, contrasta la hipótesis de que μ = 347, con un nivel de significación del 1%, mediante una muestra de 200 individuos en la que se obtiene $\bar{x}$ = 352.*
b) *Repite el contraste para a = 10%.*

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Media de los conocimientos de los soldados = μ.
Hipótesis nula = H_0:μ = 347, hipótesis alternativa = H_1: $\mu \neq$ 347(contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 347, supuesta	$\bar{x}$ = 352	$\mu(\bar{x}) = \mu = 347$
Desviación Típica	σ = 29		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{29}{\sqrt{200}} = 2{,}05$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,01(grado de confianza = 1 - α = 0,99) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ el valor de z que deja por debajo de si 0,99 + 0,005 = 0,995 es $z_{\alpha/2}$ = 2,575.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(347 - 2{,}575\cdot 2{,}05 < \bar{x} < 347 + 2{,}575\cdot 2{,}05\right) \equiv (341{,}72 < \bar{x} < 352{,}28).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \le 341{,}72 \\ \bar{x} \ge 352{,}28 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 352 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la media de la población es μ = 347 con un nivel de significación del 1%.

b) Los apartados ❶ y ❷ no varían.

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,1(grado de confianza = 1 - α = 0,90) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$ el valor de z que deja por debajo de si 0,9 + 0,05 = 0,95 es $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(347 - 1{,}645\cdot 2{,}05 < \bar{x} < 347 + 1{,}645\cdot 2{,}05\right) \equiv (343{,}63 < \bar{x} < 350{,}37).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \le 343{,}63 \\ \bar{x} \ge 350{,}37 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 352 $\in$ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que la media de la población es μ = 347 con un nivel de significación del 10%. Observa que al disminuir el grado de confianza del 99 % al 90 %), disminuye la amplitud de la zona de aceptación y, por tanto, aumenta la amplitud de la región crítica.

EJERCICIOS PROPUESTOS (Pág 316)

② *En una población para la cual es $\sigma = 29$, contrasta la hipótesis de que $\mu \leq 347$, con un nivel de significación del 1%, mediante una muestra de 200 individuos en la que se obtiene $\bar{x} = 352$.*

❶ Establecimiento de la hipótesis

Media de los conocimientos de los soldados = μ.

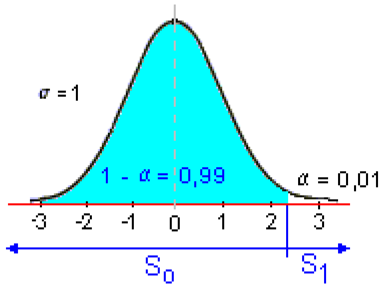
Hipótesis nula = $H_0: \mu \leq 347$, hipótesis alternativa = $H_1: \mu > 347$(contraste unilateral derecho, la región crítica está a la derecha de la distribución)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	$\mu = 347$, supuesta	$\bar{x} = 352$	$\mu(\bar{x}) = \mu = 347$
Desviación Típica	$\sigma = 29$		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{29}{\sqrt{200}} = 2{,}05$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = $\alpha = 0{,}01$(grado de confianza = $1 - \alpha = 0{,}99$) y el contraste es unilateral derecho el valor de z que deja por debajo de si 0,99 es $z_\alpha = 2{,}33$.



❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < \bar{x} \leq \mu(\bar{x}) + z_\alpha \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < \bar{x} \leq \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(-\infty < \bar{x} \leq 347 + 2{,}33 \cdot 2{,}05\right) \equiv (-\infty < \bar{x} \leq 351{,}78).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \bar{x} > 351{,}78$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x} = 352 \in S_1$ (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que la media de la población es $\mu \leq 347$ con un nivel de significación del 1%.

EJERCICIOS PROPUESTOS (Pág 318)

➀ *Respecto a un cierto dado, A opina que P[6] = 0,15, B opina que P[6] ≤ 0,15 y C opina que P[6] ≥ 0,15. Contrasta las tres hipótesis con un nivel de significación de 0,10, sabiendo que se arrojó el dado 1 000 veces y se obtuvo 183 veces el "6".*

❶ Establecimiento de la hipótesis

p = proporción de veces que sale "6" en un dado.

	A	B	C
H_0	$p = 0{,}15$	$p \le 0{,}15$	$p \ge 0{,}15$
H_1	$p \ne 0{,}15$	$p > 0{,}15$	$p < 0{,}15$
Tipo	Bilateral	Unilateral Derecho	Unilateral Izquierdo

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,15 , supuesta	pr = 0,183	$\mu(p) = p = 0{,}15$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{1000}} = 0{,}0113$

Ahora fijamos las zonas de contraste para las tres hipótesis diferentes:

Persona A (Contraste bilateral)

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,10 (grado de confianza = 1 - α = 0,90) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$ el valor de z que deja por debajo de si 0,90 + 0,05 = 0,95 es $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p) < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}} < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv \left(0{,}15 - 1{,}645\cdot 0{,}0113 < pr < 0{,}15 + 1{,}645\cdot 0{,}0113\right) \equiv$$

≡ (0,131 < pr < 0,169).

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} pr \le 0{,}131 \\ pr \ge 0{,}169 \end{cases}$

❹ Decisión

Como pr = 0,183 $\in$ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula de que la proporción de veces que sale “6” en el dado es p = 0,15.

PERSONA B (Contraste unilateral derecho)

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,10 (grado de confianza = 1 - α = 0,90) el valor de z que deja por debajo de si 0,90 es z_α = 1,28.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < pr \leq \mu(p) + z_\alpha \cdot \sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < pr \leq \mu(p) + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv \left(-\infty < pr \leq 0{,}15 + 1{,}28 \cdot 0{,}0113\right) \equiv (-\infty < pr \leq 0{,}1645).$$

Región crítica o de rechazo: S_1 = pr > 0,1645.

❹ Decisión

Como pr = 0,183 $\in$ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula de que la proporción de veces que sale “6” en el dado es $p \leq 0{,}15$.

PERSONA C (Contraste unilateral izquierdo)

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,10 (grado de confianza = 1 - α = 0,90) el valor de z que deja por encima de si 0,90 es z_α = 1,28.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sigma(p) \leq pr < +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq pr < +\infty\right) \equiv \left(0{,}131 \leq pr < +\infty\right).$$

Región crítica o de rechazo: S_1 = pr < 0,131.

❹ Decisión

Como pr = 0,183 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la proporción de veces que sale “6” en el dado es $p \geq 0{,}15$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS (Pág 322)

PARA PRACTICAR

Contrastes de hipótesis para la media

① *Realiza en cada caso el contraste de hipótesis con las condiciones que se dan a continuación (en todos los casos suponemos que la población de partida es normal):*

	H_0	σ	α	n	$\bar{x}$
a)	$\mu = 12$	1,5	0,01	10	11
b)	$\mu = 1{,}45$	0,24	0,05	16	1,6
c)	$\mu \le 11$	4,6	0,05	100	12
d)	$\mu \ge 15$	1	0,1	150	14,5

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = $H_0: \mu = 12$, hipótesis alternativa = $H_1: \mu \neq 12$(contraste bilateral).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	$\mu = 12$, supuesta	$\bar{x} = 11$	$\mu(\bar{x}) = \mu = 12$
Desviación Típica	$\sigma = 1{,}5$		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{10}} = 0{,}474$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = $\alpha = 0{,}01$(grado de confianza = $1 - \alpha = 0{,}99$) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ el valor de z que deja por debajo de si 0,99 + 0,005 = 0,995 es $z_{\alpha/2}$ = 2,575.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(12 - 2{,}575\cdot 0{,}474 < \bar{x} < 12 + 2{,}575\cdot 0{,}474\right) \equiv (10{,}78 < \bar{x} < 13{,}22).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \le 10{,}78 \\ \bar{x} \ge 13{,}22 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 11 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la media de la población es μ = 12 con un nivel de significación del 1%.

b)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:μ = 1,45, hipótesis alternativa = H_1: $\mu \neq$ 1,45(contraste bilateral).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 1,45, supuesta	$\bar{x}$ = 1,6	$\mu(\bar{x}) = \mu = 1,45$
Desviación Típica	σ = 1,5		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,24}{\sqrt{16}} = 0,06$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(1,45 - 1,96\cdot 0,06 < \bar{x} < 1,45 + 1,96\cdot 0,06\right) \equiv (1,33 < \bar{x} < 1,57).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \leq 1,33 \\ \bar{x} \geq 1,57 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 1,6 $\in$ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula de que la media de la población es μ = 1,45 con un nivel de significación del 5%.

c)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:$\mu \leq$ 11, hipótesis alternativa = H_1: μ > 11(contraste unilateral derecho, la región crítica está a la derecha de la distribución)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 11 , supuesta	$\bar{x}$ = 12	$\mu(\bar{x}) = \mu = 11$
Desviación Típica	σ = 4,6		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4,6}{\sqrt{100}} = 0,46$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es unilateral derecho el valor de z que deja por debajo de si 0,95 es z_α = 1,645.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < \bar{x} \le \mu(\bar{x}) + z_\alpha \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < \bar{x} \le \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(-\infty < \bar{x} \le 11 + 1{,}645 \cdot 0{,}46\right) \equiv (-\infty < \bar{x} \le 11{,}757).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \bar{x} > 11,757$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 12 $\in S_1$ (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que la media de la población es $\mu \le 11$ con un nivel de significación del 5%.

d)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:$\mu \ge 15$, hipótesis alternativa = H_1: $\mu < 15$(contraste unilateral izquierdo, la región crítica está a la izquierda de la distribución)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 15 , supuesta	$\bar{x}$ = 14,5	$\mu(\bar{x}) = \mu = 15$
Desviación Típica	σ = 1		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{150}} = 0,0816$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,1(grado de confianza = 1 - α = 0,90) y el contraste es unilateral izquierdo el valor de z que deja por encima de si 0,90 es z_α = -1,28.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_\alpha \cdot \sigma(\bar{x}) < \bar{x} \le +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} \le +\infty\right) \equiv \left(15 - 1{,}28 \cdot 0{,}0816 < \bar{x} \le +\infty\right) \equiv (14{,}896 < \bar{x} \le +\infty).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \bar{x} < 14{,}896$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 14,5 ∈ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que la media de la población es $\mu \geq 15$ con un nivel de significación del 10%.

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁

② Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2 400 horas, con una desviación típica igual a 300. Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra da una duración media de 2 320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%?

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁

❶ Establecimiento de la hipótesis

Duración media de las lámparas fabricadas = μ

Hipótesis nula = H_0: μ = 2 400, hipótesis alternativa = H_1: $\mu \neq$ 2 400 (contraste bilateral).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 2400, supuesta	$\bar{x}$ = 2 320	$\mu(\bar{x}) = \mu = 2\,400$
Desviación Típica	$\sigma = 300$		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{100}} = 30$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(2400 - 1{,}96 \cdot 30 < \bar{x} < 2400 + 1{,}96 \cdot 30\right) \equiv (\,2\,341{,}2 < \bar{x} < 2\,458{,}8).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \leq 2341{,}2 \\ \bar{x} \geq 2458{,}8 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 2 320 ∈ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que la duración media de las lámparas fabricadas sea μ = 2 400 horas con un nivel de significación del 5%.

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁

③ *Se sabe por experiencia que el tiempo obtenido por los participantes olímpicos de la prueba de 100 metros, en la modalidad de decathlon, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 12 segundos y desviación típica 1,5 segundos. Para contrastar, con un nivel de significación del 5%, si no ha variado el tiempo medio en la última Olimpiada, se extrajo una muestra aleatoria de 10 participantes y se anotó el tiempo obtenido por cada uno, con los resultados siguientes, en segundos:*

13 12 11 10 11 11 9 10 12 11

a) *¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?*
b) *Determina la región crítica.*
c) *Realiza el contraste.*
d) *Explica en el contexto del problema en qué consisten cada uno de los errores del tipo I y II.*

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

a) Tiempo medio que emplean los atletas de decathlon en recorrer 100 m = μ
Hipótesis nula = H_0: μ = 12 s, hipótesis alternativa = H_1: $\mu \neq$ 12 s (contraste bilateral).

b) Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(12 - 1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}} < \bar{x} < 12 + 1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right) \equiv (11{,}07 < \bar{x} < 12{,}93).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \leq 11{,}07 \\ \bar{x} \geq 12{,}93 \end{cases}$

c) Hallamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{13+12+11+10+11+11+9+10+12+11}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 11 $\in S_1$ (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que el tiempo medio que emplean los atletas de decathlon en recorrer 100 m = μ = 12 s con un nivel de significación del 5%.

d) Hemos rechazado la hipótesis nula (el tiempo que tardan los atletas en recorrer los 10 m es de 12 s), si es verdadera cometemos un **error tipo I**, la probabilidad de cometer este error es de un 5%.

Si hubiéramos aceptado la hipótesis nula y fuese falsa hubiésemos cometido un **error tipo II.**

④ *Se ha comprobado que el tiempo de espera (en minutos) hasta ser atendido, en cierto servicio de urgencias, sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 personas que fueron atendidas en dicho servicio, se ha calculado un tiempo medio de espera de 14,25 minutos y una desviación típica de 2,5 minutos.*

a) *¿Podríamos afirmar, con un nivel de significación del 5% (a = 0,05), que el tiempo medio de espera, en ese servicio de urgencias, no es de 15 minutos?*
b) *¿Qué podríamos concluir si el nivel de significación hubiese sido del 0,1% (a = 0,001)?*
c) *¿Existe contradicción en ambas situaciones? Justifica las respuestas.*

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Tiempo medio de espera hasta ser atendido en cierto servicio de urgencias = μ

Hipótesis nula = H_0: μ = 15 min, hipótesis alternativa = H_1: $\mu \neq$ 15 min (contraste bilateral).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 15, supuesta	$\bar{x}$ = 14,25	$\mu(\bar{x}) = \mu$ = 2 400
Desviación Típica	σ, desconocida	s = 2,5	$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2,5}{\sqrt{100}} = 0,25$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(15 - 1{,}96 \cdot 0{,}25 < \bar{x} < 15 + 1{,}96 \cdot 0{,}25\right) \equiv (\ 14{,}51 < \bar{x} < 15{,}49).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \leq 14{,}51 \\ \bar{x} \geq 15{,}49 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 14,25 $\in$ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula de que el tiempo medio de espera hasta ser atendido en cierto servicio de urgencias = μ = 15 min, con un nivel de significación del 5%.

b)

Al variar el nivel de significación cambian:

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,001(grado de confianza = 1 - α = 0,999) y el contraste es bilateral $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}0005$ el valor de z que deja por debajo de si 0,999 + 0,0005 = 0,9995 es $z_{\alpha/2}$ = 3,9.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x}) < \bar{x} < \mu(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\cdot\sigma(\bar{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(15 - 3{,}9\cdot 0{,}25 < \bar{x} < 15 + 3{,}9\cdot 0{,}25\right) \equiv (\,14{,}025 < \bar{x} < 15{,}975).$$

Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} \bar{x} \le 14{,}025 \\ \bar{x} \ge 15{,}975 \end{cases}$

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 14,25 ∈ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que el tiempo medio de espera hasta ser atendido en cierto servicio de urgencias = μ = 15 min, con un nivel de significación del 0,1%.

c) No hay contradicción lo que ocurre es que si exigimos mayor grado de confianza (pasamos de un 95 % en **a)** a un 99,9 % en **b)**), la amplitud el intervalo de confianza también aumenta incluyendo mayor cantidad de valores de la media muestral que puede, como en este caso, pasar de la región de rechazo a la región de aceptación.

❺ *La duración de las bombillas de 100 vatios que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas.*
Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:μ ≥ 800, hipótesis alternativa = H_1: μ < 800(contraste unilateral izquierdo, la región crítica está a la izquierda de la distribución).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 800 , supuesta	$\bar{x}$ = 750	$\mu(\bar{x}) = \mu = 800$
Desviación Típica	σ = 120		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{120}{\sqrt{50}} = 16{,}97$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,01(grado de confianza = 1 - α = 0,99) y el contraste es unilateral izquierdo el valor de z que deja por encima de si 0,99 es z_α = -2,33.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\overline{x}) - z_\alpha \cdot \sigma(\overline{x}) < \overline{x} \leq +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} \leq +\infty\right) \equiv \left(800 - 2{,}33 \cdot 16{,}97 < \overline{x} \leq +\infty\right) \equiv (\ 760{,}46\ < \overline{x} \leq +\infty).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_0 = \overline{x} < 760{,}46$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\overline{x}$ = 750 ∈ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula y habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía.

❻ *Una empresa asegura que unas determinadas pastillas de jabón duran más de 11 días. Para comprobarlo, se realiza una encuesta en 100 casos. Estas son las respuestas:*

DURACIÓN(días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24
RESPUESTAS	24	46	19	11

¿Se puede dar como válida la afirmación de la empresa, para un nivel de significación de a = 0,05?

Primero ampliamos la tabla (de datos agrupados) dada para hallar la media y la desviación típica de la muestra:

DURACIÓN(días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24	Sumas
Marca de clase(x_i)	7	12	17	22	
RESPUESTAS(f_i)	24	46	19	11	**100**
x_i^2	49	144	289	484	
$x_i \cdot f_i$	168	552	323	242	**1 285**
$x_i^2 \cdot f_i$	1 176	6 624	5 491	5 324	**18 615**

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{1285}{100} = 12{,}85\ ;\ s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{18615}{100} - 12{,}85^2} = \sqrt{186{,}15 - 165{,}1225} = 4{,}59$$

Y ahora planteamos y realizamos el contraste de hipótesis:

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:$\mu \geq 11$, hipótesis alternativa = H_1: $\mu < 11$(contraste unilateral izquierdo, la región crítica está a la izquierda de la distribución).

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo			Normal, $n \geq 30$.
Media	$\mu = 11$, supuesta	$\bar{x} = 12,85$	$\mu(\bar{x}) = \mu = 11$
Desviación Típica	σ (desconocida)	$s = 4,59$	$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4,59}{\sqrt{100}} = 0,459$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = $\alpha = 0,05$(grado de confianza = $1 - \alpha = 0,95$) y el contraste es unilateral izquierdo el valor de z que deja por encima de si 0,95 es $z_\alpha = -1,645$.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(\bar{x}) - z_\alpha \cdot \sigma(\bar{x}) < \bar{x} \leq +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} \leq +\infty\right) \equiv \left(11 - 1{,}645 \cdot 0{,}459 < \bar{x} \leq +\infty\right) \equiv (\ 10,24\ < \bar{x} \leq +\infty).$$

❂ Región crítica o de rechazo: $S_0 = \bar{x} < 10,24$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 12,85 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula y concluimos que las pastillas de jabón durarán más de 11 días con un riesgo del 5 %.

❉❉❉❀❀❂❀❀❉❉❉

⑦ Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6,5 años, con una desviación típica de 4.
¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justifica adecuadamente la respuesta.

❉❉❉❀❀❂❀❀❉❉❉

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0:$\mu \leq 6$, hipótesis alternativa = H_1: $\mu > 6$(contraste unilateral derecho, la región crítica está a la derecha de la distribución)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo			Normal, $n \geq 30$.
Media	$\mu = 6$, supuesta	$\bar{x} = 6,5$	$\mu(\bar{x}) = \mu = 6$
Desviación Típica	σ (desconocida)	$s = 4$	$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{64}} = 0,5$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95) y el contraste es unilateral derecho el valor de z que deja por debajo de si 0,95 es z_α = 1,645.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < \bar{x} \le \mu(\bar{x}) + z_\alpha \cdot \sigma(\bar{x})\right) \equiv$
$\equiv \left(-\infty < \bar{x} \le \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(-\infty < \bar{x} \le 6 + 1{,}645 \cdot 0{,}5\right) \equiv (-\infty < \bar{x} \le 6{,}8225)$.

Región crítica o de rechazo: $S_1 = \bar{x} > 6{,}8225$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\bar{x}$ = 6,5 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la media del tiempo medio de empleo en esa fábrica es $\mu \le 6$ con un nivel de significación del 5%.

❽ La Concejalía de juventud de un Ayuntamiento maneja el dato de que la edad a la que los hijos se independizan de sus padres es una variable normal con media 29 años y desviación típica 3 años. Aunque la desviación típica no plantea dudas, sí se sospecha que la media ha descendido, sobre todo por la política de ayuda al empleo que ha llevado a cabo el Ayuntamiento. Así, de un estudio reciente sobre 100 jóvenes que se acaban de independizar, se ha obtenido una media de 28,1 años de edad.

a) *Con un nivel de significación del 1%, ¿puede defenderse que la edad media no ha disminuido, frente a que sí lo ha hecho como parecen indicar los datos? Plantea el contraste o test de hipótesis y resuélvelo.*

b) *Explica, en el contexto del problema, en qué consisten cada uno de los errores del tipo I y II.*

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : $\mu \le 29$, hipótesis alternativa = H_1: $\mu > 29$(contraste unilateral derecho, la región crítica está a la derecha de la distribución)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Normal		Normal, la población lo es.
Media	μ = 29 , supuesta	$\bar{x}$ = 28,1	$\mu(\bar{x}) = \mu = 26$
Desviación Típica	σ = 3		$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{100}} = 0{,}3$

❸ Definición de regiones

Si grado de significación = α = 0,01(grado de confianza = 1 - α = 0,99) y el contraste es unilateral derecho el valor de z que deja por debajo de si 0,99 es z_α = 2,33.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < \overline{x} \le \mu(\overline{x}) + z_\alpha \cdot \sigma(\overline{x})\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < \overline{x} \le \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(-\infty < \overline{x} \le 29 + 2{,}33 \cdot 0{,}3\right) \equiv (-\infty < \overline{x} \le 29{,}699).$$

Región crítica o de rechazo: $S_1 = \overline{x} > 29{,}699$.

❹ Decisión

Como la media de la muestra tomada = $\overline{x}$ = 28,1 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula de que la media de edad en que los jóvenes se independizan de sus padres ha disminuido.

b) Hemos aceptado la hipótesis nula (la media de edad en que los jóvenes se independizan ha disminuido de 29 años), si fuese falsa, hubiésemos cometido un **error tipo II.**

Si hubiéramos rechazado la hipótesis nula y hubiese resultado que si es cierto que los jóvenes de esa ciudad se independizan antes el **error** cometido hubiese sido de **tipo I** (probabilidad del 1 %).

Contraste de hipótesis para la proporción.

⑨ *Realiza en cada caso el test de hipótesis con las condiciones que se indican:*

	H_0	α	n	pr
a)	p = 0,5	0,01	1 000	0,508
b)	$p \le 0{,}6$	0,05	600	0,61
c)	$p \ge 0{,}3$	0,1	200	0,25

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p = 0,5, hipótesis alternativa = H_1: $p \ne 0{,}5$(contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,5 , supuesta	pr = 0,508	$\mu(p) = p = 0{,}5$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p)=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{1000}}=0{,}0158$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,01(grado de confianza = 1 - α = 0,99)$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ el valor de z que deja por debajo de si 0,99 + 0,005 = 0,995 es $z_{\alpha/2}$ = 2,575.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p) < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}} < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv (0{,}5 - 2{,}575\cdot 0{,}0158 < pr < 0{,}5 + 2{,}575\cdot 0{,}0158) \equiv$$

$\equiv$ (0,459 < pr < 0,54).

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} pr \le 0{,}459 \\ pr \ge 0{,}54 \end{cases}$

❹ Decisión

Como pr = 0,508 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula.

b)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p $\le$ 0,6, hipótesis alternativa = H_1: p > 0,6(contraste unilateral derecho)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,6 , supuesta	pr = 0,61	$\mu(p) = p = 0{,}6$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p)=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{600}}=0{,}02$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,05 (grado de confianza = 1 - α = 0,95) el valor de z que deja por debajo de si 0,95 es z_α = 1,645.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < pr \le \mu(p) + z_\alpha \cdot \sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < pr \le \mu(p) + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv \left(-\infty < pr \le 0{,}6 + 1{,}645 \cdot 0{,}02\right) \equiv (-\infty < pr \le 0{,}633).$$

❂ Región crítica o de rechazo: S_1 = pr > 0,633.

❹ Decisión

Como pr = 0,61 $\in$ S_0 (pertenece a la región de aceptación), aceptamos la hipótesis nula.

c)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : $p \ge 0{,}3$, hipótesis alternativa = H_1: $p < 0{,}3$(contraste unilateral izquierdo)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,3 , supuesta	pr = 0,25	$\mu(p) = p = 0{,}3$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{200}} = 0{,}032$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,10 (grado de confianza = 1 - α = 0,90) el valor de z que deja por debajo de si 0,90 es z_α = - 1,28.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sigma(p) \le pr < +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} \le pr < +\infty\right) \equiv \left(0{,}3 - 1{,}28 \cdot 0{,}032 \le pr < +\infty\right) \equiv (0{,}26 \le pr < +\infty).$$

❂ Región crítica o de rechazo: S_1 = pr > 0,26.

❹ Como pr = 0,25 $\in$ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula.

❀❀❀❀❀❀❂❀❀❀❀❀❀

➀➀ *Un dentista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de caries dental. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 30 presentaban indicios de caries.*
Utilizando la aproximación normal, comprueba, a nivel de significación del 5%, si el resultado proporciona evidencia que permita rechazar la afirmación del dentista.

❀❀❀❀❀❀❂❀❀❀❀❀❀

Si llamamos p = proporción de niños de 10 años que padecen caries.

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p = 0,4, hipótesis alternativa = H_1: p ≠ 0,4(contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,4 , supuesta	pr = 0,30	$\mu(p) = p = 0{,}4$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{100}} = 0{,}049$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95)$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p) < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}} < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv (0{,}4 - 1{,}96\cdot 0{,}049 < pr < 0{,}4 + 1{,}96\cdot 0{,}049) \equiv$$

≡ (0,304 < pr < 0,496).

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} pr \le 0{,}304 \\ pr \ge 0{,}496 \end{cases}$

❹ Decisión

Como pr = 0,30 ∈ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula, es decir la proporción de niños de 10 años con caries no es del 40 %.

❈❈❈❀❀❂❀❀❈❈❈

ⒹⒹ Una empresa de productos farmacéuticos afirma en su publicidad que uno de sus medicamentos reduce considerablemente los síntomas de la alergia primaveral en el 90% de la población.
Una asociación de consumidores ha experimentado dicho fármaco en una muestra de 200 socios de la misma, obteniendo el resultado indicado en la publicidad en 170 personas.
Determina si la asociación de consumidores puede considerar que la afirmación de la empresa es estadísticamente correcta al nivel de significación de 0,05.

❈❈❈❀❀❂❀❀❈❈❈

Si llamamos p = proporción de casos en que el medicamento reduce la alergia primaveral.

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p = 0,9, hipótesis alternativa = H_1: p ≠ 0,9(contraste bilateral, de dos colas)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,9 , supuesta	pr = 170/200 = 0,85	$\mu(p) = p = 0,9$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,9\cdot 0,1}{200}} = 0,0212$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,05(grado de confianza = 1 - α = 0,95)$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$ el valor de z que deja por debajo de si 0,95 + 0,025 = 0,975 es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p) < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}} < pr < \mu(p) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv (0,9 - 1,96\cdot 0,0212 < pr < 0,9 + 1,96\cdot 0,0212) \equiv$$

≡ (0,858 < pr < 0,942).

❂ Región crítica o de rechazo: $S_1 = \begin{cases} pr \le 0,858 \\ pr \ge 0,942 \end{cases}$

❹ Decisión

Como pr = 0,85 ∈ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula, es decir la proporción de de casos en que el medicamento reduce la alergia primaveral.

❄❄❄❀❀✪❀❀❄❄❄

①② *Se afirma que, en una determinada ciudad, al menos el 30% de las familias poseen ordenador. Se toma una muestra aleatoria de 200 familias de la ciudad y resulta que 50 poseen ordenador. A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación?*

❄❄❄❀❀✪❀❀❄❄❄

Sea p = proporción de familias de una determinada ciudad que tienen ordenador.

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p ≥ 0,3, hipótesis alternativa = H_1: p < 0,3(contraste unilateral izquierdo)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,3 , supuesta	pr = 50/200 = 0,25	$\mu(p) = p = 0,3$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p)=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{200}}=0,032$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,05 (grado de confianza = 1 - α = 0,95) el valor de z que deja por debajo de si 0,95 es z_α = - 1,645.

❂ Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sigma(p) \le pr < +\infty\right) \equiv$

$$\equiv \left(\mu(p) - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} \le pr < +\infty\right) \equiv (0,3 - 1,645 \cdot 0,032 \le pr < +\infty) \equiv (\,0,247 \le pr < +\infty).$$

❂ Región crítica o de rechazo: S_1 = pr > 0,247.

❹ Como pr = 0,25 $\in$ S_1 (pertenece a la región crítica), rechazamos la hipótesis nula, es decir la proporción de familias de una determinada ciudad que tienen ordenador no es de al menos el 30%.

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

⓭ El 42% de los escolares de un cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias. Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido.

a) *Contrasta, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.*

b) *¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido?*

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

Sea p = proporción de escolares de cierto país que pierden al menos un día de clase a causa de la gripe.

a)

❶ Establecimiento de la hipótesis

Hipótesis nula = H_0 : p $\le$ 0,42, hipótesis alternativa = H_1: p > 0,42(contraste unilateral derecho)

❷ Características de:

	Población	Muestra	Distribución muestral
Tipo	Binomial	Binomial	Normal, n·pr y n·qr >5
Media/Proporción	p = 0,42 , supuesta	pr = 0,45	$\mu(p) = p = 0,42$
Desviación Típica	σ (desconocida)		$\sigma(p)=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0,42\cdot 0,58}{1000}}=0,0156$

❸ Regiones crítica y de aceptación

Si grado de significación = α = 0,05 (grado de confianza = 1 - α = 0,95) el valor de z que deja por debajo de si 0,95 es z_α = 1,645.

Región o zona de aceptación: $S_0 = \left(-\infty < pr \le \mu(p) + z_\alpha \cdot \sigma(p)\right) \equiv$

$$\equiv \left(-\infty < pr \le \mu(p) + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \equiv \left(-\infty < pr \le 0{,}42 + 1{,}645 \cdot 0{,}0156\right) \equiv (-\infty < pr \le 0{,}446).$$

Región crítica o de rechazo: S_1 = pr > 0,446.

❹ Decisión

Como pr = 0,45 ∈ S_1 (pertenece a la región de rechazo), rechazamos la hipótesis nula, es decir la proporción de escolares de cierto país que pierden al menos un día de clase a causa de la gripe no es menor del 42 %.

b) Es la probabilidad de cometer un error tipo II, ya que concluiríamos erróneamente que se había mantenido la proporción en contra del resultado del contraste.

PARA PROFUNDIZAR

①④ En un test de hipótesis para estudiar si el cociente intelectual medio de los estudiantes de una universidad es 113, hemos seleccionado una muestra aleatoria de 180 estudiantes, obteniendo una media de 115. La zona de aceptación obtenida ha sido el intervalo (111,98; 114,02) y sabemos que la desviación típica es a = 7. Por tanto, hemos rechazado la hipótesis.
¿Cuál es la probabilidad de habernos equivocado, es decir, de haber rechazado la hipótesis, cuando en realidad era verdadera? ¿Cómo se llama este tipo de error?

El error que consiste en rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera, se llama error de tipo I y la probabilidad de cometerlo es precisamente α, el nivel de significación que calcularemos en este caso concreto:

• La semiamplitud del intervalo de aceptación es: $\frac{114{,}02 - 111{,}98}{2} = 1{,}02$, que, en un intervalo de confianza, es el val24r que se resta y suma a la media es decir $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Como sabemos que σ = 7 y que *n* = 180, podemos despejar $z_{\alpha/2}$:

$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}02 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}02\cdot\frac{\sqrt{180}}{7} =$ $z_{\alpha/2}$ = 1,955, si miramos en la tabla normal la probabilidad correspondiente a este valor de z es 0,9746 = $1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha$ = 2·(1 – 0,9746) = 0,0508 es decir de un 5,08 % que es la probabilidad de haber cometido un **error de tipo I** (rechazar H_0 siendo cierta).

❊❊❊❁❁✪❁❁❁❊❊❊

➀➄ *En una determinada provincia, la nota media en matemáticas de los alumnos de 2º de Bachillerato del curso pasado fue de 5,8, con una desviación típica de 2,3 puntos. Con un nivel de significación de 0,05 y suponiendo que la desviación típica sigue siendo la misma, queremos contrastar la hipótesis de que la media no ha variado. Para ello, vamos a extraer una muestra aleatoria de tamaño 100. Así, la zona de aceptación será el intervalo (5,35; 6,25). Si al final la media real fuera de 5 puntos, ¿cuál es la probabilidad de obtener una media muestral que nos lleve a cometer un error de tipo II (es decir, aceptar Ho siendo falsa)?*

❊❊❊❁❁✪❁❁❁❊❊❊

Si al final la media real fuera μ = 5, las medias muestrales en muestras de tamaño *n* = 100, con σ = 2,3, se distribuirían según una $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5,\frac{2{,}3}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, según una *N*(5; 0,23).

Así, la probabilidad de aceptar la hipótesis nula siendo falsa (esto es, la probabilidad de cometer un **error de tipo II**) sería la probabilidad de obtener una media muestral que cayera dentro de la zona de aceptación, es decir:

$p(5{,}35 < \bar{x} < 6{,}25) \overset{(1)}{=} p\left(\frac{5{,}35-5}{0{,}23} < z < \frac{6{,}25-5}{0{,}23}\right)$ = p(1,52 < *z* < 5,43) = p(*z* < 5,43) – p(*z* < 1,52) = 1 – 0,9357 = 0,0643, tenemos una probabilidad del 6,43 % de aceptar que la media no ha variado habiéndolo hecho.

(1) Tipificamos pasando de puntuaciones directas a puntuaciones típicas o tipificadas.

❊❊❊❁❁✪❁❁❁❊❊❊